



$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b y$

y^3

$\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$

$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\tan \alpha}$

$\sqrt{x^2 - x} - x^2$

$n! = \prod_{k=1}^n k$

e-ISSN
2665-2471

PAS XIN MATEMÁTICO

$\frac{x_A + x_C}{2}$

$m \cdot S/2$

$(x) = \frac{d}{3}$

$f(x) \sim \frac{\alpha \pi}{2}$

$\frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}\right) - (n-1)x}{1 + (n-1)2x^2}$

$\Delta x \rightarrow 0$

$(x) = d$

$\sum_{n=1}$

$\sqrt[3]{a^4}$

$m=S$

$V + E + F = 2$

 **KONRAD LORENZ**
FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$

Vol. 6
No. 2

$\sin \frac{3}{4}$

$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

PASKÍN MATEMÁTICO

<https://editorial.konradlorenz.edu.co/paskin-matematico.html>

e-mail: paskin@konradlorenz.edu.co

Editor

John A. Arredondo

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co

Comité Editorial

Ruth Alejandra Torres

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
rutha.torresr@konradlorenz.edu.co

Julián Jiménez Cárdenas

Universidad de los Andes
jo.jimenezc1@uniandes.edu.co

Camilo Ramírez Maluendas

Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales
camramirezma@unal.edu.co

Andrés Mauricio Rivera

Pontificia Universidad Javeriana
Sede Cali
amrivera@javerianacali.edu.co

Leidy Catherine Sánchez

ScotiaGBS del grupo Scotiabank
leidy.sanchez@scotiabank.com

Jesús Muciño

Centro de Ciencias Matemáticas UNAM-Morelia
muciray@matmor.unam.mx

Esta publicación puede ser difundida y reproducida con fines académicos y científicos por todos aquellos que tengan a bien hacer un correcto uso de su contenido.

ISSN 2665-2471

Fundación Universitaria Konrad Lorenz: Tel: (57 1) 347 23 11, Carrera 9 Bis No. 62- 43 Bogotá – Colombia, email: info@konradlorenz.edu.co. **Carácter académico:** Institución Universitaria. Personería Jurídica por Resolución 18537 del 4 de noviembre de 1981 del Ministerio de Educación Nacional. Institución de Educación Superior sujeta a inspección y vigilancia por el Ministerio de Educación Nacional (Art. 2.5.3.2.10.2, Decreto 1075 de 2015).

MATEMÁTICO

EN ESTE NÚMERO

*

- Juan Pablo Hernández Rodas
- La trascendentalidad de π - pág. 1
- Juan Camilo Buitrago Cruz y Gonzalo Medina - Homomorfismos entre cuádruplas indescomponibles-Caso preinyectivo - pág. 8
- Adolfo Margain y Abimael Bengochea
- Órbitas periódicas en problemas de n -cuerpos - pág. 17
- Jeisson Cruz Amaya, Andersson Hincapie Amaya y Alberto Arias Guzmán
- Dinámica de competencia entre sistemas operativos: un enfoque Lotka-Volterra - pág. 22
- Leidy Catherine Sánchez
- MateKuento - pág. 30
- John A. Arredondo y Alejandro Cárdenas
- Paskín Challenge - pág. 34

Juan Pablo Hernández Rodas^{*}
jphernand@unal.edu.co

1. Resumen

El número pi (π), una constante matemática que ha fascinado a científicos, matemáticos y entusiastas por milenios, trasciende su simple definición como la relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo. Su naturaleza irracional y trascendente lo coloca en una categoría especial dentro del universo numérico. Desde su aparición en antiguas civilizaciones hasta su papel crucial en la ciencia moderna, pi ha demostrado ser un elemento crucial en el desarrollo del pensamiento matemático y científico. En éste artículo veremos con la trascendencia de pi va más allá de una implicación numérica, simbolizando la búsqueda humana de conocimiento y la belleza inherente en las leyes matemáticas que gobiernan nuestro universo.

2. Introducción

Un problema muy importante para los matemáticos desde la época de la antigua Grecia, consistía en responder si era posible o no, encontrar un polinomio racional no nulo que tuviera al número π como raíz. Apenas en el año 1882, el matemático Alemán Carl Louis Ferdinand Lindemann logró dar una prueba de la trascendencia del número π , es decir, demostró que el número π no puede ser raíz de ningún polinomio racional. En este artículo se discutirán las herramientas necesarias para entender la prueba sobre la trascendencia del número π dada por Lindemann.

Probar si el número π es trascendente o no, fue un problema que llamó la atención de grandes matemáticos desde hace miles de años. Por ejemplo, uno de los famosos problemas de regla y compás planteados por los antiguos griegos, es la cuadratura del círculo, que consistía en decidir si era posible con regla y compás construir un cuadrado con la misma área de un círculo de radio uno. Este fue un problema que no tuvo respuesta por mucho tiempo, hasta que a finales del siglo XIX, con el desarrollo de la teoría de cuerpos, se observó que el conjunto de todos los números construibles con regla y compás tienen una estructura algebraica conocida con el nombre de cuerpo, y que todos los números construibles con regla y compás son algebraicos, es decir, son raíz de algún polinomio racional.

El problema de la cuadratura del círculo es equivalente a decidir si el número π es construible con regla y compás. En

1882, con la prueba de la trascendencia del número π dada por Lindemann, se pudo concluir que el número π no es construible con regla y compás, y por lo tanto, la cuadratura del círculo no es posible con regla y compás.

En este artículo se va a introducir las nociones y resultados de la teoría de cuerpos, necesarios para desarrollar las ideas de la demostración sobre la trascendencia de π dadas por Lindemann en 1882.

3. Preliminares

La teoría de Galois es un área de la matemática que gira en torno a estructuras algebraicas conocidas con el nombre de cuerpos, y que, gracias a un gran teorema conocido como el teorema de Galois, relacionan estas estructuras algebraicas con otras estructuras conocidas como grupos. Esta conexión entre cuerpos y grupos permitió, por ejemplo, resolver los tres problemas griegos de regla y compás, además de responder en general cuando un polígono regular es construible o no con regla y compás.

También, usando este gran teorema, es posible dar otra prueba del teorema fundamental del álgebra, teorema que fue inicialmente demostrado por el matemático Alemán Carl Friedrich Gauss en 1799.

La teoría de cuerpos y la teoría de Galois está desarrollada a partir del estudio de unas estructuras algebraicas conocidas como cuerpos, junto con el estudio de extensiones de cuerpos. Una extensión de cuerpos es simplemente un homomorfismo de cuerpos no trivial $\phi: K \rightarrow F$, que se suele escribir como $K \subset F$ o $F|K$. La notación $K \subset F$ se debe a que K se puede identificar con el cuerpo $\phi(K)$ que claramente es un subconjunto de F . En este artículo se usará la notación $F|K$ como referencia a que F es una extensión de K . Todos los cuerpos resultan ser extensiones de $\mathbb{Q}$ o de $\mathbb{Z}_p$ con p primo. En este artículo, dado que el objeto de estudio, el número π , vive en la extensión de cuerpos $\mathbb{C}|\mathbb{Q}$, se hará énfasis en extensiones de los números racionales.

Al tener una extensión de cuerpos $F|K$, el cuerpo F adquiere estructura de K -espacio vectorial, ya que al estar los elementos de K dentro de F , tiene sentido la multiplicación de un elemento de K por uno de F . Se sabe que todo K -espacio vectorial V tiene asociada una dimensión definida como el cardinal de cualquier base para el espacio vectorial y denotada $\dim_K(V)$. Esto permite definir el índice de una extensión $F|K$ como $[F:K] = \dim_K(F)$.

Una extensión $F|K$ se dice que es finita si $[F:K] < \infty$. Por

^{*}Departamento de Matemática y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales

ejemplo, como consecuencia de que $\mathbb{R}$ no es contable y $\mathbb{Q}$ si es contable, se tiene que la extensión $\mathbb{R}|\mathbb{Q}$ no es finita. Dentro del estudio de las extensiones de cuerpos, existen unas extensiones conocidas con el nombre de extensiones algebraicas. Si $F|K$ es una extensión de cuerpos, un elemento $\alpha \in F$ se dice que es algebraico sobre K , si existe un polinomio no nulo $p(x) \in K[x]$ tal que $p(\alpha) = 0$.

Una extensión $F|K$ es algebraica si todo elemento de F es algebraico sobre K . Los elementos de $\mathbb{C}$ que son algebraicos sobre $\mathbb{Q}$ se llamarán algebraicos. Por ejemplo $\alpha = \sqrt{2}$ es algebraico. Los elementos de $\mathbb{C}$ que no son algebraicos serán llamados números trascendentes o trascendentales. Por ejemplo, el número π es trascendental, como se mostrará en este artículo.

4. Números algebraicos enteros

La noción de elementos algebraicos está dada solo para extensiones de cuerpos, sin embargo, aunque $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo (es solo un anillo), se dice que un número complejo α es algebraico entero si existe un polinomio mónico $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $p(\alpha) = 0$. Por ejemplo, $i \in \mathbb{C}$ es algebraico entero ya que es raíz del polinomio mónico $x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$.

El conjunto de los números algebraicos enteros denotados por $\overline{\mathbb{Z}}$, resulta ser un anillo conmutativo con unidad. Una relación importante entre los números algebraicos y los números algebraicos enteros, es que todo número algebraico multiplicado por un número natural adecuado se convierte en algebraico entero.

Proposición 1. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es algebraico, existe un número natural $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n\alpha$ es algebraico entero.

Demostración. Suponiendo que $p(x) = x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \dots + q_1x + q_0 \in \mathbb{Q}[x]$ es tal que $p(\alpha) = 0$. Considerando $n \in \mathbb{N}$ tal que $nq_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i = 1, \dots, m$; entonces si $q(x) = x^m + nq_{m-1}x^{m-1} + \dots + n^{m-1}q_1x + n^mq_0$, es claro que $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ y $q(n\alpha) = 0$ ya que

$$\begin{aligned} q(n\alpha) &= n^m\alpha^m + nq_{m-1}n^{m-1}\alpha^{m-1} + \dots + n^{m-1}q_1n\alpha + n^mq_0 \\ &= n^m[\alpha^m + q_{m-1}\alpha^{m-1} + \dots + q_1\alpha + q_0] = 0. \end{aligned}$$

□

En el anillo de los números enteros $\mathbb{Z}$, se sabe que existe un conjunto de números llamados números primos, que permiten expresar de manera única cualquier entero como producto de potencias de primos distintos, resultado conocido con el nombre de teorema fundamental de la aritmética. Como consecuencia, todo número entero es divisible por solo finitos números primos.

Claramente, todos los números enteros son algebraicos enteros, es decir, $\mathbb{Z} \subset \overline{\mathbb{Z}}$. Por lo tanto, en particular, los números primos son algebraicos enteros, y surge la siguiente pregunta: ¿Los números algebraicos enteros son también divisibles por solo finitos primos?

Definición 1. Dados $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Z}}$, se dice que β divide a α , entonces $\beta|\alpha$, si existe $\gamma \in \overline{\mathbb{Z}}$ tal que $\alpha = \gamma\beta$.

Ahora se demostrará que todo número algebraico entero es divisible por solo finitos números primos. Para esto se necesita introducir una cantidad entera asociada a cada número algebraico entero, que tiene como divisores primos a todos los posibles divisores primos del número algebraico entero.

Se debe tener en cuenta que toda extensión $F|\mathbb{Q}$ finitamente generada por elementos algebraicos es simple, es decir, es de la forma $F = \mathbb{Q}(\alpha)$ para cierto $\alpha \in F$.

Teorema 1 (Teorema del elemento primitivo). Toda extensión de cuerpos $F|\mathbb{Q}$ finitamente generada por elementos algebraicos es de la forma $F = \mathbb{Q}(\alpha)$, para cierto $\alpha \in F$.

Demostración. Basta demostrar que toda extensión $F = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ donde α y β son algebraicos, es de la forma $F = \mathbb{Q}(\gamma)$ para cierto $\gamma \in F$.

Suponga que $P(x), Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ son los polinomios mónicos minimales de α y β respectivamente. Al factorizar estos polinomios en $\mathbb{C}[x]$ se tiene que $P(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$ con $\alpha = \alpha_1$, y $Q(x) = (x - \beta_1) \dots (x - \beta_m)$ con $\beta = \beta_1$, donde además $\alpha_i \neq \alpha$ y $\beta_i \neq \beta$ para todo $i \neq 1$. Como el número de cocientes de la forma $\frac{\alpha_i - \alpha}{\beta - \beta_i}$ con $j \neq 1$ son finitos y el cuerpo $\mathbb{Q}$ es infinito, se puede escoger un racional $q \in \mathbb{Q}$ que sea diferente de todos estos cocientes.

Si se define $\gamma = \alpha + q\beta \in F$, se probará que $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\gamma)$.

En efecto, al considerar $H(x) = P(\gamma - qx) \in \mathbb{Q}(\gamma)[x]$. Se puede notar que $H(\beta) = P(\alpha) = 0$ y $H(\beta_i) \neq 0$ para todo $i \neq 1$, ya que $H(\beta_i) = P(\gamma - q\beta_i)$ y $\alpha + q\beta - q\beta_i \neq \alpha_j$ para todo $j = 1, \dots, n$, ya que la igualdad implica $q = \frac{\alpha_j - \alpha}{\beta - \beta_i}$ con $i \neq 1$. Lo anterior implica que $(Q(x), H(x)) = (x - \beta)$ en $\mathbb{C}[x]$, por lo tanto $(Q(x), H(x)) = (x - \beta)$ en $\mathbb{Q}(\gamma)[x]$ y por lo tanto, $x - \beta \in \mathbb{Q}(\gamma)[x]$, es decir, $\beta \in \mathbb{Q}(\gamma)$. Como $\gamma = \alpha + q\beta$ entonces $\alpha \in \mathbb{Q}(\gamma)$ y así se concluye que $\mathbb{Q}(\gamma) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$. □

El teorema anterior permite ver fácilmente que para toda extensión finita $F|\mathbb{Q}$, el conjunto $\text{Hom}(F|\mathbb{Q}) = \{\sigma : F \rightarrow \mathbb{C} : \sigma \text{ homomorfismo de cuerpos y } \sigma|_{\mathbb{Q}} = \text{id}\}$ tiene cardinal $[F : \mathbb{Q}]$.

Para ver esto, vale la pena resaltar que dada una extensión finita $F|\mathbb{Q}$ se tiene que $F = \mathbb{Q}(\alpha)$ para cierto $\alpha \in F$ algebraico, donde si $[F : \mathbb{Q}] = n$ entonces el polinomio mónico minimal $p(x)$ de α es de grado n . Si $p(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$ en $\mathbb{C}[x]$ con $\alpha = \alpha_1$, entonces $\alpha_i \neq \alpha_j$ para todo $i \neq j$ ya que $\mathbb{Q}$ tiene característica cero, y por lo tanto, al ser $p(x)$ irreducible no tiene raíces múltiples, así, si $\sigma \in \text{Hom}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q})$ entonces $\sigma(\alpha) \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ y cada asignación $\sigma(\alpha) \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ define un elemento de $\text{Hom}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q})$. Por lo tanto $|\text{Hom}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q})| = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.

Definición 2. Dada una extensión finita de cuerpos $F|K$, se sabe que F es un K -espacio vectorial de dimensión finita. Al definir la norma $N_{F|K} : F \rightarrow K$ como la función que en cada $\alpha \in F$ está definida como el determinante de la transformación K -lineal $T_\alpha : F \rightarrow F$ que envía $x \mapsto \alpha x$.

En la definición anterior, se puede observar que si $F = K(\alpha)$ con $\alpha \in F$ algebraico sobre K , entonces $N_{K(\alpha)|K}(\alpha) = (-1)^n a_0 = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$, donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son las raíces del polinomio minimal para α en su cuerpo de descomposición y a_0 es su término independiente. En efecto, suponga $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in K[x]$ es el polinomio mónico minimal para α , luego $[K(\alpha) : K] = n$. Si $P_{T_\alpha}(x) \in K[x]$ denota el polinomio característico de la transformación lineal T_α , entonces $P_{T_\alpha}(x)$ es de grado n y tiene a α como raíz, luego por la minimalidad de $P(x)$ se sigue que $P(x) = P_{T_\alpha}(x)$. Ahora, de álgebra lineal se sabe que si $P(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ en $L[x]$, donde L es el cuerpo de descomposición de $P(x)$, y $\alpha = \alpha_1$, entonces $\det(T_\alpha) = (-1)^n P(0) = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$.

Observación 1. Si se tiene una extensión de cuerpos $F|\mathbb{Q}$ y que $\alpha \in F$ es algebraico sobre $\mathbb{Q}$. Se sabe que si $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = n$ entonces $|\text{Hom}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q})| = n$. Si $\text{Hom}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, entonces $N_{\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}}(\alpha) = \sigma_1(\alpha) \cdots \sigma_n(\alpha)$.

Demostración. Si $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ es el polinomio mónico minimal para α , entonces $\sigma_i(\alpha)$ es raíz de $p(x)$ para todo $i = 1, \dots, n$. Además cada homomorfismo σ_i está determinado por el valor en α , lo que implica que $\sigma_1(\alpha), \dots, \sigma_n(\alpha)$ son todas las distintas raíces de $p(x)$. De lo anterior se concluye que $N_{\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}}(\alpha) = \sigma_1(\alpha) \cdots \sigma_n(\alpha)$. $\square$

Dado que el determinante de un producto de matrices cuadradas del mismo tamaño es el producto de los determinantes de las matrices, se tiene entonces la siguiente propiedad de la norma definida anteriormente.

Proposición 2. Suponga que $F|K$ es una extensión finita, entonces dados $\alpha, \beta \in F$ se tiene que

$$N_{F|K}(\alpha\beta) = N_{F|K}(\alpha)N_{F|K}(\beta).$$

Además, si $r \in K$ y $[F : K] = n$, entonces $N_{F|K}(r) = r^n$.

Demostración. Note que $T_{\alpha\beta} = T_\alpha \circ T_\beta$, luego al tomar determinante se tiene que $\det(T_{\alpha\beta}) = \det(T_\alpha)\det(T_\beta)$, de donde se concluye la primera parte.

Ahora, si $r \in K$ entonces $T_r : F \rightarrow F$ que envía $x \mapsto rx$ coincide con la transformación lineal rI_n , donde $I_n : F \rightarrow F$ es la función identidad. Por lo tanto, $\det(T_r) = \det(rI_n) = r^n$, lo que muestra la segunda parte de la proposición. $\square$

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es algebraico, entonces la extensión $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ es finita, luego por definición $N_{\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}}(\alpha) \in \mathbb{Q}$. Ahora, si $\alpha \in \mathbb{C}$ es algebraico entero, entonces $N_{\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}}(\alpha) \in \mathbb{Z}$. Para ver esto, si $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ es mónico de grado minimal tal que $q(\alpha) = 0$. Observe que $q(x)$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ por ser de grado minimal, luego como $q(x)$ es mónico, del lema de Gauss se sigue que $q(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$. Así, se tiene que $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ es el polinomio mónico minimal para α , pero como se mostró anteriormente, si $q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ entonces $N_{\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}}(\alpha) = (-1)^n a_0 \in \mathbb{Z}$.

La discusión anterior permite formular la siguiente proposición, la cuál permitirá demostrar que los números algebraicos enteros tienen solo finitos divisores primos.

Proposición 3. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es algebraico entero y $p|\alpha$ donde p es un número primo, entonces $p|N_{\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}}(\alpha)$.

Demostración. Suponga que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = n$. Si $p|\alpha$ entonces $\alpha = p\beta$ para cierto $\beta \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $N_{\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}}(\alpha) = N_{\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}}(p\beta) = p^n N_{\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}}(\beta)$. Se sabe que $N_{\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}}(\alpha) \in \mathbb{Z}$ y como $\alpha = p\beta$ entonces $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta)$, por lo tanto $N_{\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}}(\beta) = N_{\mathbb{Q}(\beta)|\mathbb{Q}}(\beta) \in \mathbb{Z}$. Se concluye que $p | N_{\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}}(\alpha)$. $\square$

Como consecuencia se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es algebraico entero, entonces α es divisible por un número finito de primos.

Demostración. De la proposición anterior, si $p | \alpha$ entonces $p | N_{\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}}(\alpha)$. Como se mostró anteriormente, $N_{\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}}(\alpha) \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto, es divisible por solo finitos números primos. $\square$

5. Polinomios simétricos elementales

Dado un cuerpo K y el anillo de polinomios $K[x_1, \dots, x_n]$, se dice que un polinomio es simétrico, si al aplicarle cualquier permutación a las variables se obtiene el mismo polinomio, es decir, si $p(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = p(x_1, \dots, x_n)$ para todo $\sigma \in S_n$, donde S_n denota el grupo de biyecciones de $\{1, \dots, n\}$ en $\{1, \dots, n\}$.

Un teorema famoso debido a Gauss, muestra que todos los polinomios simétricos son generados como álgebra por finitos elementos conocidos con el nombre de polinomios simétricos elementales.

Estos polinomios simétricos elementales se construyen de la siguiente forma. Se considera el polinomio $H(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ en la variable x . Al destruir el producto se obtienen los coeficientes de $H(x)$ en términos de $x_1, \dots, x_n$, estos coeficientes son llamados los polinomios simétricos elementales en las variables $x_1, \dots, x_n$. Es decir,

$$H(x) = x^n + (-1)^1 s_1(x_1, \dots, x_n)x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} s_{n-1}(x_1, \dots, x_n)x + (-1)^n s_n(x_1, \dots, x_n),$$

donde $s_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq n} x_{j_1} \cdots x_{j_i}$.

Observe que $H(x) = (x - x_{\sigma(1)}) \cdots (x - x_{\sigma(n)})$ para todo $\sigma \in S_n$, por lo tanto, los coeficientes del polinomio $H(x)$ son invariantes bajo σ , para todo $\sigma \in S_n$, lo que muestra que $s_1, \dots, s_n$ son polinomios simétricos en las variables $x_1, \dots, x_n$.

Haciendo uso de los polinomios simétricos elementales y de los siguientes lemas, se van a caracterizar todos los subconjuntos finitos de una extensión finita $F|\mathbb{Q}$ que son fijados por todos los homomorfismos de cuerpos de F en $\mathbb{C}$ que dejan fijo a $\mathbb{Q}$.

Este primer lema es una consecuencia del lema de Zorn y es un resultado muy importante en la teoría de cuerpos, ya que permite mostrar la unicidad, salvo isomorfismos, de la clausura algebraica de un cuerpo.

Lema 1. Suponga que $F|K$ es una extensión algebraica y que L es un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces todo homomorfismo de cuerpos $\tau : K \rightarrow L$ se puede extender a un homomorfismo de cuerpos $\sigma : F \rightarrow L$ tal que $\sigma|_K = \tau$.

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ i \uparrow & \searrow \sigma & \\ K & \xrightarrow{\mu} & L \end{array}$$

Demostración. SE considera la familia $\mathcal{F}$ de todas las parejas (E, τ) donde E es un cuerpo intermedio entre K y F y $\tau : E \rightarrow L$ es un homomorfismo de cuerpos tal que $\tau|_K = \mu$.

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \uparrow & \\ & E & \\ & \uparrow \tau & \\ K & \xrightarrow{\mu} & L \end{array}$$

Esta familia claramente es no vacía ya que $(K, \mu) \in \mathcal{F}$.

Se ordena parcialmente la familia $\mathcal{F}$ con el orden: $(E, \tau) \leq (E', \tau')$ si $E \subseteq E'$ y $\tau'|_E = \tau$. Se considera ahora una cadena $\{(E_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de $\mathcal{F}$. Por ser una cadena, la unión $E = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ resulta ser un cuerpo y claramente $K \subseteq E \subseteq F$. Además, si se define $\tau : E \rightarrow L$ como $\tau(e) = \tau_\alpha(e)$ si $e \in E_\alpha$, entonces τ es un homomorfismo de cuerpos tal que $\tau|_K = \mu$ (τ está bien definido ya que si $e \in E_\alpha$ y $e \in E_\beta$ entonces como todos los elementos de la cadena son comparables, al suponer que $(E_\alpha, \tau_\alpha) \leq (E_\beta, \tau_\beta)$, se tiene que $\tau_\beta(e) = \tau_\alpha(e)$). Por lo tanto, $(E, \tau) \in \mathcal{F}$ y claramente $(E_\alpha, \tau_\alpha) \leq (E, \tau)$. Esto muestra que la cadena $\{(E_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ tiene cota superior, luego del lema de Zorn se concluye que $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal (E, τ) .

Al probar que $E = F$. Suponga por el absurdo que $E \subsetneq F$, luego existe $\alpha \in F$ tal que $\alpha \notin E$. Como la extensión $F|K$ es algebraica, entonces $E(\alpha)|E$ es algebraica. Suponga que $p(x) = x^n + e_{n-1}x^{n-1} + \dots + e_1x + e_0 \in E[x]$ es el polinomio mónico minimal para α . Al definir $\tau(p(x)) = x^n + \tau(e_{n-1})x^{n-1} + \dots + \tau(e_1)x + \tau(e_0)$, entonces $\tau(p(x)) \in L[x]$ y como L es algebraicamente cerrado, $\tau(p(x)) = (x - \beta_1) \cdots (x - \beta_n)$ con $\beta_1, \dots, \beta_n \in L$. Definiendo $\tau' : E(\alpha) \rightarrow L$ como $\tau'(e) = \tau(e)$ para todo $e \in E$ y $\tau'(\alpha) = \beta_1$. De esta forma se obtiene un homomorfismo de cuerpos $\tau' : E(\alpha) \rightarrow L$ tal que $\tau'|_K = \mu$, lo cual contradice la maximalidad de (E, τ) . Se concluye entonces que $E = F$. $\square$

Lema 2. Suponga que $F|\mathbb{Q}$ es una extensión algebraica. Si $\alpha \in F$ es tal que $\sigma(\alpha) = \alpha$ para todo $\sigma \in \text{Hom}(F|\mathbb{Q})$, entonces $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Demostración. Suponga por el absurdo que $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Por lo tanto, el polinomio mónico minimal $p(x)$ para α tiene grado mayor que uno, lo que permite escoger $\beta \in \mathbb{C}$ raíz de $p(x)$ con $\beta \neq \alpha$. Con esto se puede definir un homomorfismo de

cuerpos $\mu : \mathbb{Q}(\alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ como $\mu(q) = q$ para todo $q \in \mathbb{Q}$ y $\mu(\alpha) = \beta$, así se tiene $\mu \in \text{Hom}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q})$ tal que $\mu(\alpha) = \beta \neq \alpha$.

Ahora, como $F|\mathbb{Q}$ es algebraica y $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, del lema 1 se sabe que μ se puede extender a un homomorfismo $\sigma \in \text{Hom}(F|\mathbb{Q})$ tal que $\sigma|_{\mathbb{Q}(\alpha)} = \mu$. De esta forma se tiene $\sigma \in \text{Hom}(F|\mathbb{Q})$ tal que $\sigma(\alpha) = \mu(\alpha) \neq \alpha$, lo cual es absurdo. $\square$

Observación 2. Suponga que S tiene una colección de polinomios distintos $A = \{q_1(x_1, \dots, x_n), \dots, q_m(x_1, \dots, x_n)\}$. Si $\sigma \in S_n$ es una permutación cuya acción sobre A , definida como $\sigma(q_i(x_1, \dots, x_n)) = q_i(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, define una biyección $\sigma : A \rightarrow A$, entonces se tiene la siguiente igualdad de polinomios:

$$\prod_{i=1}^m (x - q_i(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{i=1}^m (x - q_i(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})).$$

El lema anterior y esta última observación, tiene como consecuencia la siguiente proposición.

Proposición 4. Suponga que $F|\mathbb{Q}$ es una extensión finita y que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son elementos distintos de F tales que $\sigma|_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}}$ es una biyección para todo $\sigma \in \text{Hom}(F|\mathbb{Q})$. Suponga además que $A = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ es una colección de polinomios distintos en $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ tales que todo elemento de S_n define una biyección de A en A . Entonces se tiene que

$$\prod_{i=1}^n (x - \beta_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \in \mathbb{Q}[x].$$

Demostración. De la observación anterior se tiene que

$$\prod_{i=1}^m (x - q_i(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{i=1}^m (x - q_i(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)})),$$

para toda permutación $\tau \in S_n$.

Evaluando en $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ en la ecuación anterior, se tiene que

$$\prod_{i=1}^m (x - q_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \prod_{i=1}^m (x - q_i(\alpha_{\tau(1)}, \dots, \alpha_{\tau(n)})),$$

para toda permutación $\tau \in S_n$.

Por otro lado, cada elemento $\sigma \in \text{Hom}(F|\mathbb{Q})$ al definir una biyección $\sigma : \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \rightarrow \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, define una permutación de S_n definida como $\sigma(i) = j$ si $\sigma(\alpha_i) = \alpha_j$, por lo tanto, $\sigma(\alpha_i) = \alpha_{\sigma(i)}$.

Con esta notación se concluye de la última ecuación que

$$\prod_{i=1}^m (x - q_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \prod_{i=1}^m (x - q_i(\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_n))),$$

para todo $\sigma \in \text{Hom}(F|\mathbb{Q})$.

Se observa que para cada $\sigma \in \text{Hom}(F|\mathbb{Q})$, como σ es homomorfismo y $\sigma|_{\mathbb{Q}} = \text{id}$, entonces dado $q(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ se tiene que $\sigma(q(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = q(\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_n))$. Se considera el polinomio

$$p(x) = \prod_{i=1}^n (x - \beta_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \in F[x].$$

Cada homomorfismo $\sigma \in \text{Hom}(F|\mathbb{Q})$ se extiende a un homomorfismo de anillos $\sigma : F[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$ definido de la siguiente forma: si $q(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0 \in F[x]$, entonces $\sigma(q(x)) = \sigma(a_m)x^m + \dots + \sigma(a_1)x + \sigma(a_0) \in \mathbb{C}[x]$.

De lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned}\sigma(p(x)) &= \prod_{i=1}^m (x - \sigma(\beta_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n))) \\ &= \prod_{i=1}^m (x - \beta_i(\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_n))) \\ &= p(x),\end{aligned}$$

para todo $\sigma \in \text{Hom}(F|\mathbb{Q})$.

Finalmente, si $p(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0$, de lo anterior se tiene que $\sigma(a_i) = a_i$ para todo $\sigma \in \text{Hom}(F|\mathbb{Q})$, y esto para todo $i = 0, \dots, m-1$. Así, del lema 2 se concluye que $a_i \in \mathbb{Q}$ para todo $i = 0, \dots, m-1$, y por lo tanto, $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$. $\square$

6. Identidad de Euler y la función exponencial

La identidad de Euler es una ecuación que relaciona los símbolos matemáticos $e, \pi, 0$ y 1 de la siguiente manera: $e^{i\pi} + 1 = 0$. La identidad se sigue inmediatamente una vez que se defina la función exponencial compleja. Vale la pena recordar que para $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $e^z = e^a e^{ib}$, donde $e^{ib} = \cos(b) + i\sin(b)$. En particular, $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$, y por lo tanto, $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Una propiedad de la función exponencial, que es consecuencia de la fórmula de integración por partes, está relacionada con el comportamiento de la integral de un producto de la función exponencial por un polinomio.

Teorema 2. Suponga que $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ es un polinomio de grado n . Entonces

$$\int e^{-z} p(z) dz = -e^{-z} \left(\sum_{i=0}^n p^{(i)}(z) \right),$$

donde $p^{(i)}(z)$ denota la i -ésima derivada de la función $p(x)$. En otras palabras, la función $-e^{-z} \left(\sum_{i=0}^n p^{(i)}(z) \right)$ es una antiderivada de $e^{-z} p(z)$.

Demostración. Una demostración del teorema se obtiene derivando el término de la derecha de la ecuación y observando simplemente que coincide con el término dentro de la integral. Ahora, si no se conociera la igualdad a la que se quiere llegar, esta prueba perdería su valor. Por esta razón, se demostrará el teorema observando como deducir la igualdad del teorema usando integración por partes.

Se observa que como $p(z)$ es un polinomio de grado n , entonces $p^{(i)}(z) \equiv 0$ para todo $i \geq n+1$.

Ahora, recordando que la fórmula de integración por partes es una consecuencia de la regla de Leibniz o regla de la derivada de un producto.

Usando integración por partes se tiene que

$$\int e^{-z} p(z) dz = -e^{-z} p(z) + \int e^{-z} p^{(1)}(z) dz.$$

Si se aplica la igualdad anterior a la integral $\int e^{-z} p^{(1)}(z) dz$ se tiene que

$$\int e^{-z} p(z) dz = -e^{-z} p(z) - e^{-z} p^{(1)}(z) + \int e^{-z} p^{(2)}(z) dz.$$

Continuando de manera recursiva, entonces

$$\begin{aligned}\int e^{-z} p(z) dz &= -e^{-z} [p(z) + p^{(1)}(z) + \dots + p^{(n)}(z)] + \\ &\quad + \int e^{-z} p^{(n+1)}(z) dz,\end{aligned}$$

y como $p^{(n+1)}(z) \equiv 0$, se obtiene la igualdad deseada. $\square$

7. Trascendentalidad de π

Se presentará cómo usando todo lo discutido anteriormente, Lindemann logró demostrar que el número π es trascendental, es decir, no es raíz de ningún polinomio racional no nulo. Suponiendo por el absurdo que el número π no es trascendental, es decir, es algebraico. Como el número $i \in \mathbb{C}$ es algebraico ya que es raíz del polinomio racional $x^2 + 1$, entonces $i\pi$ también es algebraico (el conjunto de los números algebraicos forma un cuerpo). Suponiendo que $q(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n) \in \mathbb{Q}[x]$ es el polinomio mónico minimal para $i\pi$ y suponiendo que $\alpha_1 = i\pi$.

Se observa que $\sigma|_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}} : \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \rightarrow \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ es una biyección para todo $\sigma \in \text{Hom}(F|\mathbb{Q})$, donde $F = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, ya que todo elemento $\sigma \in \text{Hom}(F|\mathbb{Q})$ es inyectivo y si α es raíz de $q(x)$ entonces $\sigma(\alpha)$ es también raíz de $q(x)$.

Ahora, para cada $k = 1, \dots, n$ se considera la colección de polinomios distintos en $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$, dada por $\Delta_k = \{x_{i_1} + \dots + x_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$. Se observa que toda permutación $\tau \in S_n$ define una biyección $\tau : \Delta_k \rightarrow \Delta_k$.

De la proposición 2, se tiene que para todo $k = 1, \dots, n$,

$$P_k(x) = \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (x - (\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k})) \in \mathbb{Q}[x].$$

Por lo tanto, el polinomio $P(x) = P_1(x) \dots P_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tiene como raíces a todos los elementos de la forma

$$\begin{aligned}\alpha_i, \quad & 1 \leq i \leq n, \\ \alpha_i + \alpha_j, \quad & 1 \leq i < j \leq n, \\ & \vdots \\ \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k}, \quad & 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, \\ & \vdots \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n.\end{aligned}$$

Si se listan estos elementos como $\beta_1, \dots, \beta_m$, se observa que estos elementos no son necesariamente distintos. Ahora,

suponiendo que $\beta_1, \dots, \beta_k$ son los elementos de esta lista que son diferentes de cero.

Entonces $P(x) = \prod_{i=1}^m (x - \beta_i) = x^{m-k} \prod_{i=1}^k (x - \beta_i) \in \mathbb{Q}[x]$, lo que implica que

$$H(x) = \prod_{i=1}^k (x - \beta_i) \in \mathbb{Q}[x].$$

Como $\beta_1, \dots, \beta_k$ son algebraicos sobre $\mathbb{Q}$, de la proposición 1, existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $N\beta_i \in \bar{\mathbb{Z}}$ para $i = 1, \dots, k$, por lo tanto $L(x) = N^k H(x) \in \bar{\mathbb{Z}}[x]$, es decir, sus coeficientes son algebraicos enteros.

Para cada número primo p , se considera el polinomio

$$f_p(z) = \frac{N^{p-1}}{(p-1)!} z^{p-1} L(z)^p$$

y la integral compleja

$$I_{p,i} = \int_0^{\beta_i} e^{-z} f_p(z) dz,$$

para $i = 1, \dots, k$. Se observa que $|I_{p,i}| \leq \frac{N^{p-1}}{(p-1)!} C_i$ para cierta constante C_i , y esto para todo $i = 1, \dots, k$, luego

$$\left| \sum_{i=1}^k e^{\beta_i} I_{p,i} \right| \leq \frac{N^{p-1}}{(p-1)!} C,$$

donde $C = \max_{i=1}^k \{|e^{\beta_i} C_i|\}$.

Así se tiene que la sucesión $\{s_p = \sum_{i=1}^k e^{\beta_i} I_{p,i}\}_{p \text{ primo}}$ converge a cero, ya que la serie $\sum_{p \text{ primo}} \frac{N^{p-1}}{(p-1)!}$ es convergente.

Por otro lado, la sucesión $\{\sum_{i=1}^k e^{\beta_i} I_{p,i}\}_{p \text{ primo}}$, es una sucesión no nula (no se vuelve cero después de un punto) de números enteros, lo que es claramente una contradicción. En efecto, como consecuencia del teorema 2 y del teorema fundamental del cálculo en los complejos, se tiene que

$$I_{p,i} = -e^{-\beta_i} \left[\sum_{j=0}^d f_p^{(j)}(\beta_i) \right] + \left[\sum_{j=0}^d f_p^{(j)}(0) \right], \quad (1)$$

donde d es el grado del polinomio $f_p(z)$.

Ahora, se puede notar que

$$f_p^{(j)}(z) = \frac{N^{p-1}}{(p-1)!} \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (z^{p-1})^{(l)} (L(z)^p)^{(j-l)}. \quad (2)$$

En la ecuación anterior, se observa que si $l < p-1$ entonces la función $(z^{p-1})^{(l)}$ evaluada en cero es cero, es decir, $(z^{p-1})^{(l)}(0) = 0$, lo que muestra que $f_p^{(j)}(0) = 0$ si $j < p-1$. Por otro lado, si $l > p-1$ es claro que $(z^{p-1})^{(l)} \equiv 0$, luego para $j > p-1$ se tiene que

$$\begin{aligned} f_p^{(j)}(0) &= \frac{N^{p-1}}{(p-1)!} \binom{j}{p-1} (p-1)! (L(z)^p)^{(j-(p-1))}(0) \\ &= pD_{p,j}, \end{aligned}$$

donde $D_{p,j} = \frac{1}{p} N^{p-1} \binom{j}{p-1} (L(z)^p)^{(j-p+1)}(0)$.

Observe que $p \mid (L(z)^p)^{(j-p+1)}(0)$ para $j \geq p$ y por lo tanto, $D_{p,j} \in \bar{\mathbb{Z}}$ cuando $j \geq p$.

Si $j = p-1$, entonces $f_p^{(p-1)}(0) = N^{p-1} L(0)^p$.

Se observa que como $L(x) \in \bar{\mathbb{Z}}[x]$ entonces $N^{p-1} L(0)^p \in \bar{\mathbb{Z}}$ y $pD_{p,j} \in \bar{\mathbb{Z}}$. Se puede notar también que como los coeficientes de $L(x)$ pertenecen al cuerpo $\mathbb{Q}(\beta_1, \dots, \beta_k)$ y $\beta_i \in F = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ para $i = 1, \dots, k$, entonces $N^{p-1} L(0)^p \in F$ y $pD_{p,j} \in F$. Esto permite concluir lo siguiente.

$$f_p^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < p-1 \\ pD_{p,j} & \text{si } j > p-1 \\ N^{p-1} L(0)^p & \text{si } j = p-1 \end{cases}, \quad (3)$$

donde $N^{p-1} L(0)^p, pD_{p,j} \in \bar{\mathbb{Z}} \cap F$.

Para computar $f_p^{(j)}(\beta_i)$, se observa que en general, si $q(x) \in K[x]$ es un polinomio que tiene como raíz a $\beta \in K$, es decir, $q(x) = (x - \beta)h(x)$, entonces $(q(x)^p)^{(j)}(\beta) = 0$ si $j < p$ y $p!$ divide a $(q(x)^p)^{(j)}(\beta)$ si $j \geq p$. En efecto, como $q(x)^p = (x - \beta)^p h(x)^p$ entonces se tiene que

$$(q(x)^p)^{(j)} = \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} ((x - \beta)^p)^{(l)} (h(x)^p)^{(j-l)}. \quad (4)$$

Ahora, como $((x - \beta)^p)^{(j)} = \frac{p!}{(p-j)!} (x - \beta)^{p-j}$ para $j < p$ entonces $((x - \beta)^p)^{(j)}(\beta) = 0$ si $j < p$. Esto permite decir que $(q(x)^p)^{(j)}(\beta) = 0$ si $j < p$.

Por otro lado, $((x - \beta)^p)^{(p)} = p!$, luego $((x - \beta)^p)^{(j)} = 0$ si $j > p$. Así, de la última ecuación se sigue que

$$(q(x)^p)^{(j)}(\beta) = \binom{j}{p} p! (h(x)^p)^{(j-p)}(\beta), \text{ si } j \geq p.$$

Se concluye entonces que $(q(x)^p)^{(j)}(\beta) = 0$ si $j < p$ y $p! \mid (q(x)^p)^{(j)}(\beta)$ si $j \geq p$.

Se usará lo anterior para computar $f_p^{(j)}(\beta_i)$. Recordando que $f_p(z) = \frac{N^{p-1}}{(p-1)!} z^{p-1} L(z)^p$. Como β_i es raíz de $L(z)$, de la discusión anterior se sigue que $(L(z)^p)^{(j)}(\beta_i) = 0$ si $j < p$ y $p! \mid (L(z)^p)^{(j)}(\beta_i)$ en $\bar{\mathbb{Z}}$ si $j \geq p$.

Por otro lado, como

$$f_p^{(j)}(z) = \frac{N^{p-1}}{(p-1)!} \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (L(z)^p)^{(l)} (z^{p-1})^{j-l}$$

entonces si $j < p$ se tiene que $f_p^{(j)}(\beta_i) = 0$ para $i = 1, \dots, k$, y si $j \geq p$ entonces

$$f_p^{(j)}(\beta_i) = \frac{N^{p-1}}{(p-1)!} \binom{j}{p} (L(z)^p)^{(p)}(\beta_i) (z^{p-1})^{j-p}(\beta_i) = pE_{p,j,i},$$

donde $E_{p,j,i} \in \bar{\mathbb{Z}} \cap F$ y $F = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Se concluye entonces que

$$f_p^{(j)}(\beta_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < p \\ pE_{p,j,i} & \text{si } j \geq p \end{cases},$$

con $E_{p,j,i} \in \bar{\mathbb{Z}} \cap F$.

[Ian22] Stewart Ian, *Galois theory*, Chapman and Hall/CRC, 2022.

[Iva05] Niven Ivan, *Irrational Numbers*, Cambridge University Press, 2005.

Volviendo a la ecuación 1, los computos anteriores implican que

$$\begin{aligned} I_{p,i} &= -e^{-\beta_i} \left[\sum_{j=p}^d p E_{p,j,i} \right] + \left[N^{p-1} L(0)^p + \sum_{j=p}^d p D_{p,j} \right], \\ &= -e^{-\beta_i} (p E_{p,i}) + (N^{p-1} L(0)^p + p D_p), \end{aligned}$$

donde $E_{p,i} = \sum_{j=p}^d E_{p,j,i}$ y $D_p = \sum_{j=p}^d D_{p,j}$.

Haciendo la suma para $i = 1, \dots, k$ se obtiene que

$$\sum_{i=1}^k e^{\beta_i} I_{p,i} = (N^{p-1} L(0)^p + p D_p) \left(\sum_{i=1}^k e^{\beta_i} \right) - p E_p. \quad (5)$$

Por otro lado, hay que recordar que $\alpha_1 = i\pi$ y que $1 + e^{i\pi} = 0$, por lo tanto, $\prod_{i=1}^n (1 + e^{\alpha_i}) = 0$. Al destruir este producto anterior se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + \left(\sum_{i=1}^n e^{\alpha_i} \right) + \dots + \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s} e^{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_s}} \right) + \dots + e^{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \\ &= 1 + \sum_{i=1}^m e^{\beta_i} = 1 + (m - k) + \sum_{i=1}^k e^{\beta_i}, \end{aligned} \quad (6)$$

donde recordando que $\beta_1, \dots, \beta_k$ son los no nulos.

De la última ecuación se sigue que $\sum_{i=1}^k e^{\beta_i} = t = k - m - 1 \in \mathbb{Z}$.

Reemplazando en la ecuación 5, se obtiene que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k e^{\beta_i} I_{p,i} &= t(N^{p-1} L(0)^p + p D_p) - p E_p, \\ &= t N^{p-1} L(0)^p - p(t D_p - E_p). \end{aligned}$$

Como $L(0), D_p, E_p \in \bar{\mathbb{Z}} \cap F$, entonces $s_p = \sum_{i=1}^k e^{\beta_i} I_{p,i} \in \bar{\mathbb{Z}} \cap F$, donde $F = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Se puede notar que $\sigma(s_p) = s_p$ para todo $\sigma \in \text{Hom}(F|\mathbb{Q})$, luego por el lema 2 se tiene que $s_p \in \mathbb{Q}$. Como s_p es algebraico entero y $s_p \in \mathbb{Q}$, entonces $s_p \in \mathbb{Z}$ (los únicos racionales que son algebraicos enteros son los números enteros).

Se puede observar que $s_p = 0 \Leftrightarrow t N^{p-1} L(0)^p = p(t D_p - E_p)$. Por otro lado, se sabe por el corolario 1 que existen finitos primos que dividen a $L(0)$, luego, suponiendo que $p_1, \dots, p_a$ son todos los divisores primos de t, N y $L(0)$, entonces los divisores primos de $t N^{p-1} L(0)^p$ están en el conjunto de primos $\{p_1, \dots, p_a\}$. Por lo tanto, $s_p \neq 0$ para todo $p \notin \{p_1, \dots, p_a\}$. Esto muestra que la sucesión $\{s_p\}_{p \text{ primo}}$ no es nula, es decir, no se vuelve cero después de un punto, pero esta sucesión es una sucesión de enteros que converge a cero, lo cual es absurdo.

Se concluye entonces que el número π es trascendental.

Referencias.

[Lan12] Serge Lang, *Algebra*, Springer Science & Business Media, 2012.

Acerca del autor: El profesor Juan Pablo trabaja en las áreas de álgebra conmutativa, álgebra homológica y geometría algebraica, y tiene un interés en general por la matemática y las aplicaciones de esta ciencia a otras áreas. Es amante de la guitarra clásica.

HOMOMORFISMOS ENTRE CUÁDRUPLAS INDESCOMPONIBLES-CASO PREINYECTIVO

Juan Camilo Buitrago Cruz y Gonzalo Medina*
 jbuitragocr@unal.edu.co; gmedinaar@unal.edu.co

Resumen

En este trabajo, se utilizó una dualidad entre la categoría de representaciones de un conjunto parcialmente ordenado y la correspondiente categoría de su opuesto, para obtener los espacios de homomorfismos entre los tipos de representaciones indecomponibles pertenecientes a la componente preinyectiva del carcaj de Auslander-Reiten asociado al problema de los cuatro subespacios.

1. Introducción

Obtener la clasificación completa, salvo isomorfismo, de cuatro subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo corresponde a un problema clásico, conocido como Problema de los Cuatro Subespacios, planteado y resuelto por Gelfand y Ponomarev en [GP70]. Posteriormente, se han propuesto otras soluciones, que difieren en las técnicas usadas y en la complejidad de las herramientas involucradas. En [Med23] se encuentra una descripción detallada del problema y de su importancia. Es importante, no solo clasificar las colecciones de cuatro subespacios, sino clasificar también los morfismos entre estas colecciones. En [Bre67, Bre74, MZ04, For08, Sim92] se presenta la clasificación de los espacios de homomorfismos entre ciertas colecciones indecomponibles.

En este artículo, que puede considerarse una continuación de [BM24], se estudia la componente preinyectiva del carcaj de Auslander-Reiten asociado al problema de los cuatro subespacios. Se va a considerar aquí una importante dualidad categórica para obtener, en el caso de la componente preinyectiva, los espacios de homomorfismos entre los diferentes pares de tipos de representaciones indecomponibles para los cuales existe un único morfismo irreducible. Se utilizarán técnicas sencillas de álgebra lineal para tal fin.

La estructura del artículo es la siguiente: en la sección 2, se presentarán las definiciones, notaciones y resultados fundamentales de la categoría de representaciones de un conjunto parcialmente ordenado. En la sección 3, se calcularán explícitamente la forma que tienen los espacios de homomorfismos entre los objetos indecomponibles correspondientes

a la componente preinyectiva del carcaj de Auslander-Reiten asociado a la tetrada.

2. Conjuntos parcialmente ordenados y su categoría de representaciones

En esta sección se presentarán las definiciones básicas asociadas a la categoría de representaciones de un conjunto parcialmente ordenado y se estudiarán las propiedades más importantes de un funtor que, en la próxima sección, permitirá obtener el resultado principal.

2.1. La categoría de representaciones de un conjunto parcialmente ordenado

Definición 2.1. Un **conjunto parcialmente ordenado** es una pareja $(\mathcal{P}, \leq)$, en donde $\mathcal{P}$ es un conjunto y $\leq$ es una relación de orden parcial sobre $\mathcal{P}$, es decir, la relación $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En lo que sigue, se van a considerar conjuntos parcialmente ordenados **finitos**, es decir, aquellos en los que el conjunto $\mathcal{P}$ es un conjunto finito.

Dado un conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}, \leq)$, su **conjunto parcialmente ordenado opuesto** $(\mathcal{P}^{op}, \leq^{op})$ tiene el mismo conjunto subyacente de puntos, es decir, $\mathcal{P}^{op} = \mathcal{P}$, y la relación de orden $\leq^{op}$ es la inversa de la relación $\leq$, es decir, $x \leq^{op} y$, en $\mathcal{P}^{op}$, si y solo si $y \leq x$, en $\mathcal{P}$.

A menudo se describirá un conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}, \leq)$ mediante su **diagrama de Hasse**: los elementos de $\mathcal{P}$ se representan con puntos y se traza un segmento ascendente de un punto x a un punto y , si $x < y$ y no existe z con $x < z < y$.

Aunque, por definición, un conjunto parcialmente ordenado es una pareja $(\mathcal{P}, \leq)$, es usual referirse a él solo mediante el conjunto $\mathcal{P}$. Resulta claro, a partir de las definiciones, que $(\mathcal{P}^{op})^{op} = \mathcal{P}$.

Ejemplo 1. A continuación, se muestra, mediante sus diagramas de Hasse, un conjunto parcialmente ordenado y su conjunto parcialmente ordenado opuesto:



*Programa Curricular de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales; Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales

Definición 2.2. Dados un campo k y un conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}, \leq)$, con n puntos, una colección $U = (U_0, U_i)_{i \in \mathcal{P}}$ de $n + 1$ espacios vectoriales sobre k se denomina **representación de $\mathcal{P}$ sobre k** si satisface las siguientes condiciones:

- U_0 es un espacio vectorial de dimensión finita sobre k . El espacio U_0 se denomina **espacio principal** de U .
- U_i es subespacio de U_0 , para cada punto i de $\mathcal{P}$.
- $U_i \subseteq U_j$, si $i \leq j$ en $\mathcal{P}$.

Un **morfismo** $\phi: U \rightarrow V$ entre dos representaciones $U = (U_0, U_i)_{i \in \mathcal{P}}$ y $V = (V_0, V_i)_{i \in \mathcal{P}}$ es una transformación lineal $\phi: U_0 \rightarrow V_0$ tal que $\phi(U_i) \subseteq V_i$, para todo $i \in \mathcal{P}$. El conjunto

$$\text{Hom}(U, V) = \{f \mid f: U \rightarrow V \text{ es morfismo}\}$$

tiene estructura natural de k -espacio vectorial con la suma y el producto por escalar usuales. $\text{Hom}(U, V)$ se denomina el **espacio de homomorfismos de U en V** .

Dos representaciones U y V se denominan **isomorfas**, si existe un isomorfismo k -lineal $\phi: U_0 \rightarrow V_0$ tal que $\phi(U_i) = V_i$, para todo $i \in \mathcal{P}$; en este caso, escribimos $U \simeq V$. La **suma directa** de dos representaciones $U = (U_0, U_i)_{i \in \mathcal{P}}$ y $V = (V_0, V_i)_{i \in \mathcal{P}}$ es la representación $U \oplus V$ dada por

$$U \oplus V = (U_0 \oplus V_0, U_i \oplus V_i)_{i \in \mathcal{P}}.$$

Una representación U se dice **indescomponible** si $U \simeq V \oplus W$ implica $V = 0$ o $W = 0$ (aquí, 0 denota la representación nula en la que todos los espacios vectoriales son el espacio trivial 0). La **dimensión** de una representación $U = (U_0, U_i)_{i \in \mathcal{P}}$ es el vector $d = \underline{\dim} U = (d_0, d_i)_{i \in \mathcal{P}}$, en donde

$$\begin{aligned} d_0 &= \dim_k(U_0) \quad \text{y} \\ d_i &= \dim_k(U_i), \end{aligned}$$

con

$$\underline{U}_i = \begin{cases} U_i, & \text{si } i \text{ es minimal en } \mathcal{P}. \\ U_i / \sum_{j < i} U_j, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Vale la pena recordar que un elemento m de un conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}, \leq)$ es **minimal en $\mathcal{P}$** si, para todo $x \in \mathcal{P}$, se tiene que $x \leq m$ implica $x = m$.

Ejemplo 2. Algunas de las nociones anteriores serán ilustradas con un par de ejemplos:

- (a) Dados un campo k y el conjunto parcialmente ordenado

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right\},$$

para la representación

$$U = (U_0, U_1, U_2, U_3) = (k, k, k, k)$$

de $\mathcal{P}$ sobre k , se tiene que

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= U_1 = k, \\ \underline{U}_2 &= U_2 / U_1 = k/k \simeq 0 \quad \text{y} \\ \underline{U}_3 &= U_3 / U_1 = k/k \simeq 0, \end{aligned}$$

así que el vector dimensión $d = \underline{\dim} U$ está dado por $d = (1, 1, 0, 0)$.

- (b) Dados un campo k y el conjunto parcialmente ordenado

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{ccc} 2 & & 4 \\ & \diagdown \quad \diagup & \\ & 1 & 3 \end{array} \right\},$$

para la representación

$$U = (U_0, U_1, U_2, U_3, U_4),$$

de $\mathcal{P}$ sobre k , dada por

$$\begin{aligned} U_0 &= k^3 = k \oplus k \oplus k, \\ U_1 &= k \oplus 0 \oplus 0, \quad U_2 = k \oplus 0 \oplus k, \\ U_3 &= 0 \oplus 0 \oplus k, \quad U_4 = 0 \oplus k \oplus k, \end{aligned}$$

se tiene que $\underline{U}_1 = U_1$ y $\underline{U}_3 = U_3$, pues 1 y 3 son minimales en $\mathcal{P}$. Además,

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= U_2 / \sum_{j < 2} U_j \\ &= U_2 / (U_1 + U_3) \\ &= (k \oplus 0 \oplus k) / (k \oplus 0 \oplus k) \\ &\simeq 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \underline{U}_4 &= U_4 / \sum_{j < 4} U_j \\ &= U_4 / U_3 \\ &= (0 \oplus k \oplus k) / (0 \oplus 0 \oplus k) \\ &\simeq 0 \oplus k \oplus 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el vector dimensión $d = \underline{\dim} U$ está dado por $d = (3, 1, 0, 1, 1)$.

Al tomar las representaciones de $\mathcal{P}$ sobre k como objetos y los morfismos entre ellas como morfismos, se obtiene la **categoría de representaciones de $\mathcal{P}$ sobre k** , que denotaremos $\text{rep}(\mathcal{P}, k)$. Esta categoría es una categoría de Krull-Schmidt (ver, por ejemplo, [Med23, capítulo 2]). De hecho, ya que los conjuntos $\text{Hom}(U, V)$ tienen estructura, no solo de grupos abelianos, sino de k -espacios vectoriales, la categoría $\text{rep}(\mathcal{P}, k)$ es también una k -categoría.

Ya que se están considerando espacios vectoriales de dimensión finita, se puede hacer uso del lenguaje matricial, tal y como se muestra a continuación.

Definición 2.3. Si se elige una base para U_0 y sistemas minimales de generadores para cada uno de los espacios $\underline{U}_i$, entonces una representación $U = (U_0, U_i)_{i \in \mathcal{P}}$ admite una **representación matricial** M_U , la cual es una matriz por bloques

$$M = M_U = \left[\begin{array}{c|c|c} \cdots & M_i & \cdots \end{array} \right], \quad i \in \mathcal{P},$$

en donde el número de filas de M es igual a d_0 y, para todo $i \in \mathcal{P}$, el número de columnas del bloque M_i es igual a d_i ; las columnas de cada bloque M_i son las coordenadas de los vectores del sistema minimal de generadores escogido para $\underline{U}_i$, con respecto a la base principal de U_0 (si $\underline{U}_i = 0$, entonces el bloque correspondiente al punto i está formado por una única columna nula).

Si se tienen en cuenta los posibles cambios de bases para los espacios, es claro que dos representaciones U y V de $\mathcal{P}$ sobre k son isomorfas si y solo si dos de sus presentaciones matriciales asociadas M_U y M_V son **equivalentes** en el sentido de que una de ellas puede convertirse en la otra al aplicar un número finito de las siguientes transformaciones admitidas:

- TA1: Operaciones elementales por filas de toda la matriz M .
 TA2: Operaciones elementales por columnas dentro de cada bloque M_i .
 TA3: Adiciones de columnas del bloque M_j a columnas del bloque M_i , si $j < i$ en $\mathcal{P}$.

Ejemplo 3. En este ejemplo se muestran presentaciones matriciales asociadas a algunas de las representaciones del conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{P}$ del ejemplo 1(a):

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \circ \quad \quad \circ 3 \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad 1 \circ \end{array} \right\}$$

$U = (U_0, U_1, U_2, U_3)$	$M_U = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix}$
$(k, 0, 0, 0)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
(k, k, k, k)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$(k, 0, k, 0)$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$(k, 0, 0, k)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$(k, 0, k, k)$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2.2. La dualidad D

Definición 2.4. Cabe recordar que, dado un espacio vectorial U_0 sobre un campo k , el **dual (algebraico) de U_0** , denotado $D(U_0)$ o más cómodamente U_0^* , es el conjunto de todas las transformaciones lineales de U_0 hacia el campo k :

$$D(U_0) = U_0^* = \{f: U_0 \rightarrow k \mid f \text{ es transformación } k\text{-lineal}\}$$

dotado, de manera natural, de estructura de espacio vectorial sobre k . Si tenemos una transformación k -lineal $g: U_0 \rightarrow V_0$ entre k -espacios vectoriales, se puede definir, por composición, una transformación k -lineal $D(g) = g^*: V_0^* \rightarrow U_0^*$, al tomar

$$D(g) = g^*(l) = l \circ g, \quad \text{para toda } l \in V_0^*.$$

Nota 1. Las transformaciones lineales de $D(U_0) = U_0^*$ se suelen llamar **funcionales lineales en U_0** . Además de las notaciones $D(U_0)$ y U_0^* , también es común utilizar $\text{Hom}_k(U_0, k)$ para el espacio dual de U_0 .

Proposición 2.5. Si U_0 es de dimensión finita sobre k , entonces U_0^* es también de dimensión finita sobre k y $\dim U_0^* = \dim U_0$. En particular, U_0 y su dual son espacios isomorfos.

Demostración. Dada una base $B = \{u_1, \dots, u_m\}$ para U_0 , se puede considerar el conjunto $B^* = \{u_1^*, \dots, u_m^*\}$ de elementos del dual de U_0 definidos, sobre la base B , de la siguiente manera:

$$u_i^*(u_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j. \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Por linealidad, extendemos la definición de los u_i^* a todo U_0 . Se puede observar que B^* es una base para el espacio dual de U_0 : si $0 = \alpha_1 u_1^* + \dots + \alpha_m u_m^*$, entonces, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, resulta

$$\begin{aligned} 0 &= 0(u_j) \\ &= (\alpha_1 u_1^* + \dots + \alpha_m u_m^*)(u_j) \\ &= \alpha_1 u_1^*(u_j) + \dots + \alpha_m u_m^*(u_j) \\ &= \alpha_j \end{aligned}$$

con lo que B^* es un conjunto linealmente independiente. Además, B^* genera a todo U_0^* : dado un funcional lineal arbitrario $f \in U_0^*$, se puede tomar $g = f(u_1)u_1^* + \dots + f(u_m)u_m^*$ en el generado por B^* y obtenemos que, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(u_j) &= f(u_1)u_1^*(u_j) + \dots + f(u_m)u_m^*(u_j) \\ &= (f(u_1)u_1^* + \dots + f(u_m)u_m^*)(u_j) \\ &= g(u_j). \end{aligned}$$

La anterior cadena de igualdades muestra que los funcionales lineales f y g coinciden sobre una base para U_0 y son, por lo tanto, iguales. La base B^* se suele llamar la **base dual** de la base B . $\square$

Corolario 2.6. Si U_0 es un k -espacio vectorial de dimensión finita, entonces los tres espacios U_0 , $D(U_0)$ y $D^2(U_0)$ tienen la misma dimensión. En particular, $U_0 \simeq D(U_0) \simeq D^2(U_0)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de la proposición 2.5. $\square$

Ahora se extenderá la definición de espacio dual a una dualidad categórica entre la categoría de representaciones de un conjunto parcialmente ordenado y la categoría de representaciones de su conjunto parcialmente ordenado dual.

Definición 2.7. Dados un campo k y un conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{P}$, el funtor de dualidad

$$D = ()^*: \text{rep}(\mathcal{P}, k) \rightarrow \text{rep}(\mathcal{P}^{op}, k)$$

actúa de la siguiente manera:

- I) Sobre los objetos: a cada representación $U = (U_0, U_i)_{i \in \mathcal{P}}$ de $\mathcal{P}$ sobre k , le asocia la colección $D(U) = U^* = (U_0^*, U_i^*)_{i \in \mathcal{P}^{op}}$ dada por

$$\begin{aligned} U_0^* &= \{f: U_0 \rightarrow k \mid f \text{ es transformación } k\text{-lineal}\} \\ U_i^* &= \{f \in U_0^* \mid f(U_i) = 0\}, \quad \text{para todo } i \in \mathcal{P}^{op}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

II) Sobre los morfismos: a un morfismo $g: U \rightarrow V$ entre dos representaciones $U = (U_0, U_i)_{i \in \mathcal{P}}$ y $V = (V_0, V_i)_{i \in \mathcal{P}}$ de $\mathcal{P}$ sobre k , le asocia $D(g) = g^*: V_0^* \rightarrow U_0^*$, dado como en la definición 2.4, es decir, $g^*(l) = l \circ g$, para toda $l \in V_0^*$.

En la siguiente proposición, se demostrará que, efectivamente, ese ha definido un funtor contravariante y se estudiarán algunas de sus propiedades fundamentales.

Proposición 2.8. *Con las notaciones y convenciones anteriores, se tiene lo siguiente:*

- a) D es un funtor contravariante de $\text{rep}(\mathcal{P}, k)$ en $\text{rep}(\mathcal{P}^{op}, k)$. También puede verse D como funtor contravariante de $\text{rep}(\mathcal{P}^{op}, k)$ en $\text{rep}(\mathcal{P}, k)$.
- b) El funtor D es un k -funtor, es decir, D respeta la estructura de k -espacios vectoriales de los conjuntos de homomorfismos. En particular, D es un funtor aditivo.
- c) D preserva el objeto cero y, por lo tanto, los morfismos nulos.
- d) D respeta las sumas directas finitas y también los coproductos finitos.
- e) $D \circ D \simeq 1_{\text{rep}(\mathcal{P}, k)}$ y $D \circ D \simeq 1_{\text{rep}(\mathcal{P}^{op}, k)}$. En particular, D establece una dualidad categórica entre las categorías $\text{rep}(\mathcal{P}, k)$ y $\text{rep}(\mathcal{P}^{op}, k)$.
- f) $\text{Hom}_{\text{rep}(\mathcal{P}, k)}(U, V) \simeq \text{Hom}_{\text{rep}(\mathcal{P}^{op}, k)}(D(V), D(U))$, para todas las representaciones U y V en $\text{rep}(\mathcal{P}, k)$.

Demostración. a) En primer lugar, si $U = (U_0, U_i)_{i \in \mathcal{P}}$ es un objeto en $\text{rep}(\mathcal{P}, k)$, entonces $D(U) = (U_0^*, U_i^*)_{i \in \mathcal{P}^{op}}$, definido según las expresiones (2.1), es, efectivamente, un objeto en $\text{rep}(\mathcal{P}^{op}, k)$: como U_0 es de dimensión finita sobre k , entonces, según el corolario 2.6, $\dim(U_0^*) = \dim(U_0)$. Por otro lado, es claro que, para cada $i \in \mathcal{P}^{op}$, el conjunto U_i^* es subconjunto no vacío de U_0^* , pues el funcional lineal nulo $0: U_0 \rightarrow k$ pertenece a cada U_i^* . Adicionalmente, si f y g son funcionales lineales de U_i^* y α es un escalar arbitrario de k , entonces $(\alpha f + g)(x) = \alpha f(x) + g(x) = 0$, para todo $x \in U_i$ y así $\alpha f + g$ pertenece a U_i^* , con lo que cada U_i^* es subespacio vectorial de U_0^* . Por último, si $i \leq^{op} j$ en $\mathcal{P}^{op}$, entonces $j \leq i$ en $\mathcal{P}$ y así $U_j \subseteq U_i$. Esta contención implica que $U_i^* \subseteq U_j^*$ pues todo funcional lineal de U_0 en k que anule a todo U_i anula también, en particular, a todo U_j .

Se puede observar ahora que si $f: U \rightarrow V$ es un morfismo en $\text{rep}(\mathcal{P}, k)$, entonces $D(f) = f^*: V^* \rightarrow U^*$ definido por $f^*(l) = l \circ f$, para todo $l \in V_0^*$, es un morfismo en $\text{rep}(\mathcal{P}^{op}, k)$: se tiene que $(l \circ f)(U_i) = l(f(U_i)) = 0$, pues $f(U_i) \subseteq V_i$ y l anula a todo V_i . Se ha demostrado así que $f^*(V_i^*) \subseteq U_i^*$, para todo $i \in \mathcal{P}^{op}$, es decir, f^* es morfismo de V^* en U^* .

Por otro lado, se tiene que $D(1_U) = 1_U^*$ es la transformación lineal $1_U^*: U_0^* \rightarrow U_0^*$ tal que $1_U^*(f) = f \circ 1_U = f = 1_{U^*}(f)$, para toda $f \in U_0^*$ y así $D(1_U) = 1_{D(U)}$.

Si, ahora, $f: U \rightarrow V$ y $g: V \rightarrow W$ son morfismos en $\text{rep}(\mathcal{P}, k)$, se tiene que $D(g \circ f): W^* \rightarrow U^*$ es la transformación lineal $D(g \circ f): W_0^* \rightarrow U_0^*$ tal que, para todo $l \in W_0^*$,

$$D(g \circ f)(l) = l \circ (g \circ f)$$

$$\begin{aligned} &= (l \circ g) \circ f \\ &= D(f)(l \circ g) \\ &= D(f)(D(g)(l)) \\ &= (D(f) \circ D(g))(l); \end{aligned}$$

es decir, $D(g \circ f) = D(f) \circ D(g)$. Con esto termina la prueba de que, efectivamente, D es funtor contravariante de $\text{rep}(\mathcal{P}, k)$ en $\text{rep}(\mathcal{P}^{op}, k)$. El resto de la afirmación de este literal se deduce de lo que se acaba de demostrar y de que $(\mathcal{P}^{op})^{op} = \mathcal{P}$.

b) Al tomar f y g morfismos de U a V en $\text{rep}(\mathcal{P}, k)$ y sea $\alpha \in k$ un escalar arbitrario; entonces, para todo $l \in D(V_0)$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} (\alpha f + g)^*(l) &= l \circ (\alpha f + g) \\ &= l \circ (\alpha f) + l \circ g \\ &= \alpha(l \circ f) + l \circ g \\ &= \alpha f^*(l) + g^*(l) \\ &= (\alpha f^* + g^*)(l). \end{aligned}$$

Así, $(\alpha f + g)^* = \alpha f^* + g^*$, es decir, el funtor D es un k -funtor.

c) En efecto,

$$D(0) = \{f: 0 \rightarrow k \mid f \text{ es transformación lineal}\} = 0,$$

con lo que la imagen mediante D de la representación nula en $\text{rep}(\mathcal{P}, k)$ es la representación nula en $\text{rep}(\mathcal{P}^{op}, k)$. Ahora bien, esto, junto con el que el morfismo nulo $0: U \rightarrow V$ es la composición de los dos únicos morfismos $U \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow V$, lo que lleva a que D también preserva morfismos nulos.

d) Basta probar el resultado para dos objetos, pues un simple argumento inductivo permite, entonces, extender el resultado a cualquier número finito de objetos. Sean entonces U y V representaciones en $\text{rep}(\mathcal{P}, k)$. Como $\text{rep}(\mathcal{P}, k)$ es una categoría aditiva, existen el producto y el coproducto para U y V , y los objetos correspondientes son isomorfos, es decir, tenemos una quintupla

$$(U \oplus V, i_1, i_2, \pi_1, \pi_2),$$

que satisface las propiedades universales del producto y del coproducto y tal que las inyecciones $i_1: U \rightarrow U \oplus V$ e $i_2: V \rightarrow U \oplus V$, junto con las proyecciones $\pi_1: U \oplus V \rightarrow U$ y $\pi_2: U \oplus V \rightarrow V$ satisfacen las igualdades

$$\begin{aligned} \pi_1 \circ i_1 &= 1_U, & \pi_2 \circ i_1 &= 0, \\ \pi_2 \circ i_1 &= 0, & \pi_2 \circ i_2 &= 1_V, \\ i_1 \circ \pi_1 + i_2 \circ \pi_2 &= 1_{U \oplus V}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Se va a probar que $(D(U \oplus V), D i_1, D i_2)$ satisface la condición universal para el producto (suma directa) de los objetos $D(U)$ y $D(V)$ en $\text{rep}(\mathcal{P}^{op}, k)$, con lo cual se obtendrá el isomorfismo $D(U \oplus V) \simeq D(U) \oplus D(V)$. Si se toma una representación Z de $\mathcal{P}$ sobre k , junto con morfismos $f_1: Z \rightarrow D(U)$ y $f_2: Z \rightarrow D(V)$, entonces se debe garantizar la existencia de

un único morfismo $h: Z \rightarrow D(U \oplus V)$ que haga conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 & Z & \\
 f_1 \swarrow & \downarrow h & \searrow f_2 \\
 & D(U \oplus V) & \\
 D\iota_1 \swarrow & & \searrow D\iota_2 \\
 D(U) & & D(V)
 \end{array} \quad (2.3)$$

Al tomar $h = (D\pi_1) \circ f_1 + (D\pi_2) \circ f_2$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 (D\iota_1) \circ h &= (D\iota_1) \circ ((D\pi_1) \circ f_1 + (D\pi_2) \circ f_2) \\
 &= (D\iota_1) \circ (D\pi_1) \circ f_1 + (D\iota_1) \circ (D\pi_2) \circ f_2 \\
 &= D(\pi_1 \circ \iota_1) f_1 + D(\pi_2 \circ \iota_1) f_2 \\
 &= D(1_U) \circ f_1 + D(0) \circ f_2 \\
 &= 1_{D(U)} \circ f_1 + 0 \\
 &= f_1,
 \end{aligned}$$

en donde se han usado las igualdades (2.2) y el que D es un funtor aditivo que preserva morfismos nulos. De manera completamente análoga, se prueba que $(D\iota_2) \circ h = f_2$. Se ha demostrado, así, la existencia de un morfismo h que hace conmutar el diagrama (2.3). Falta únicamente probar la unicidad del morfismo h : si se tiene un morfismo $g: Z \rightarrow D(U \oplus V)$ tal que $(D\iota_1) \circ g = f_1$ y $(D\iota_2) \circ g = f_2$, entonces

$$\begin{aligned}
 D(\iota_1 \circ \pi_1) \circ g &= ((D\pi_1) \circ (D\iota_1)) \circ g \\
 &= (D\pi_1) \circ ((D\iota_1) \circ g) \\
 &= (D\pi_1) \circ f_1
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

y, también,

$$\begin{aligned}
 D(\iota_2 \circ \pi_2) \circ g &= ((D\pi_2) \circ (D\iota_2)) \circ g \\
 &= (D\pi_2) \circ ((D\iota_2) \circ g) \\
 &= (D\pi_2) \circ f_2,
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
 g &= 1_{D(U \oplus V)} \circ g \\
 &= D(1_{U \oplus V}) \circ g \\
 &= D(\iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2) \circ g \quad (\text{por 2.2}) \\
 &= (D(\iota_1 \circ \pi_1) + D(\iota_2 \circ \pi_2)) \circ g \\
 &= D(\iota_1 \circ \pi_1) \circ g + D(\iota_2 \circ \pi_2) \circ g \\
 &= (D\pi_1) \circ f_1 + (D\pi_2) \circ f_2 \quad (\text{por 2.4 y 2.5}) \\
 &= h.
 \end{aligned}$$

e) Si se considera la composición de los siguientes funtores:

$$\text{rep}(\mathcal{P}, k) \xrightarrow{D} \text{rep}(\mathcal{P}^{op}, k) \xrightarrow{D} \text{rep}(\mathcal{P}, k)$$

se puede observar que $D^2 = D \circ D \simeq 1_{\text{rep}(\mathcal{P}, k)}$. Entre una representación arbitraria U de $\mathcal{P}$ sobre k y su doble dual $D^2(U) = D(D(U))$ se puede definir un morfismo $\phi_U: U \rightarrow$

$D^2(U)$, al considerar la transformación lineal $\phi_U: U_0 \rightarrow D^2(U_0)$ tal que, para todo $x \in U_0$, $\phi_U(x) = \bar{x}$, en donde $\bar{x}: D(U_0) \rightarrow k$ está dada por $\bar{x}(l) = l(x)$, para cada $l \in D(U_0)$. Entonces, la colección

$$\phi = \{\phi_U \mid U \text{ es objeto en } \text{rep}(\mathcal{P}, k)\}$$

es una transformación natural entre los funtores $1_{\text{rep}(\mathcal{P}, k)}$ y D^2 . En efecto, se debe verificar que, para todo morfismo $f: U \rightarrow V$ en $\text{rep}(\mathcal{P}, k)$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{f} & V \\
 \phi_U \downarrow & & \downarrow \phi_V \\
 D^2(U) & \xrightarrow{D^2(f)} & D^2(V)
 \end{array} \quad (2.6)$$

Sea $x \in U_0$, entonces

$$(\phi_V \circ f)(x) = \phi_V(f(x)) = \overline{f(x)}$$

y, además, se tiene que

$$(D^2(f) \circ \phi_U)(x) = D^2(f)(\phi_U(x)) = D^2(f)(\bar{x}) = \bar{x} \circ D(f).$$

Si l es, ahora, un elemento arbitrario de $D(V_0)$, entonces

$$\begin{aligned}
 (\bar{x} \circ D(f))(l) &= \bar{x}(D(f)(l)) \\
 &= \bar{x}(l \circ f) \\
 &= (l \circ f)(x) \\
 &= l(f(x)) \\
 &= \overline{f(x)}(l),
 \end{aligned}$$

con lo que $\overline{f(x)} = \bar{x} \circ D(f)$ y el diagrama (2.6) conmuta. Adicionalmente, para cada objeto U en $\text{rep}(\mathcal{P}, k)$, se tiene que ϕ_U es un isomorfismo: en efecto, si se toma $x \in \ker(\phi_U)$, se obtiene que $\phi_U(x) = \bar{x} = 0$, es decir,

$$l(x) = \bar{x}(l) = 0, \quad \text{para todo } l \in D(U_0). \quad (2.7)$$

Al fijar una base $\{u_0, \dots, u_m\}$ para U_0 , se puede escribir $x = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m$, para algunos escalares $\beta_i \in k$ y al tomar los funcionales lineales $\{u_1^*, \dots, u_m^*\}$ de la base dual (ver la demostración de la proposición 2.5), se obtiene, gracias a (2.7), que

$$\begin{aligned}
 0 &= u_i^*(x) \\
 &= u_i^*(\beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m) \\
 &= \beta_1 u_i^*(u_1) + \dots + \beta_m u_i^*(u_m) \\
 &= \beta_i,
 \end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, es decir, $x = 0$ y ϕ_U es inyectiva. Como, gracias al corolario 2.6, los espacios U_0 y $D^2(U_0)$ tienen igual dimensión, entonces ϕ_U es biyección y con esto, la colección $\phi = \{\phi_U \mid U \text{ es objeto en } \text{rep}(\mathcal{P}, k)\}$ es un isomorfismo natural entre $1_{\text{rep}(\mathcal{P}, k)}$ y D^2 .

f) Gracias al literal e), se sabe que D es una dualidad categórica y, por lo tanto, el funtor D es fiel y pleno (y también, denso). Adicionalmente, gracias a b), se sabe que D es

un k -funtor. De lo anterior, resulta el siguiente isomorfismo de k -espacios vectoriales:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{rep}(\mathcal{P},k)}(U, V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{rep}(\mathcal{P}^{op},k)}(D(U), D(V)),$$

para todas las representaciones U y V en $\mathrm{rep}(\mathcal{P},k)$. $\square$

En general, al aplicar la dualidad D se cambia de categoría; sin embargo, para aquellos conjuntos parcialmente ordenados que coinciden con su opuesto, al aplicar D volvemos a caer en la categoría de representaciones del conjunto parcialmente ordenado original. Si se combina esta sencilla observación con la proposición anterior, se obtiene el siguiente resultado, que será fundamental en la prueba del teorema principal, en la sección 3.

Corolario 2.9. Si $\mathcal{P}$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{op}$, entonces, para representaciones arbitrarias U y V de $\mathcal{P}$ sobre un campo k , se tiene el siguiente isomorfismo de k -espacios vectoriales:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{rep}(\mathcal{P},k)}(U, V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{rep}(\mathcal{P},k)}(D(V), D(U)),$$

Demostración. Como $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{op}$, entonces $\mathrm{rep}(\mathcal{P},k) = \mathrm{rep}(\mathcal{P}^{op},k)$; el resultado se sigue del isomorfismo dado en f) de la proposición 2.8. $\square$

Ejemplo 4. A continuación, se ilustra el efecto de la dualidad D sobre algunas de las representaciones del conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{P}$ del ejemplo 1(a):

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \circ \quad 3 \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \circ \end{array} \right\} \quad \mathcal{P}^{op} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \circ \quad 3 \circ \end{array} \right\}$$

$U = (U_0, U_1, U_2, U_3)$		$U^* = (U_0^*, U_1^*, U_2^*, U_3^*)$
$(k, 0, 0, 0)$	$\longmapsto$	(k, k, k, k)
(k, k, k, k)	$\longmapsto$	$(k, 0, 0, 0)$
$(k, 0, k, 0)$	$\longmapsto$	$(k, k, 0, k)$
$(k, 0, 0, k)$	$\longmapsto$	$(k, k, k, 0)$
$(k, 0, k, k)$	$\longmapsto$	$(k, k, 0, 0)$

3. Espacios de homomorfismos-El caso preinyectivo

En esta sección, se van a obtener los espacios de homomorfismos entre cuádruplas indescomponibles entre las que hay un morfismo irreducible en la componente preinyectiva del carcaj de Auslander-Reiten asociado al problema de los cuatro subespacios. Esta demostración va a ser muy rápida, gracias al uso del funtor de dualidad y a la aplicación de los resultados correspondientes a los espacios de homomorfismos entre las cuádruplas indescomponibles un morfismo irreducible en la componente postproyectiva del carcaj de Auslander-Reiten asociado a la tetrada (ver [BM24, Teorema 3.1]).

Definición 3.1. El conjunto parcialmente ordenado

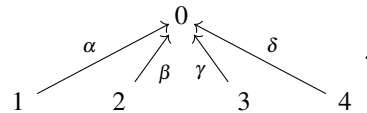
$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{cccc} \circ & \circ & \circ & \circ \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right\},$$

formado por cuatro puntos mutuamente incomparables, se denomina **tetrada**. Dado un campo k , una representación de $\mathcal{T}$ sobre k se denomina una **cuádrupla de subespacios**.

Así, las cuádruplas de subespacios tienen la forma $U = (U_0, U_1, \dots, U_4)$, en donde U_0 es un espacio vectorial de dimensión finita sobre k y $U_1, \dots, U_4$ son cuatro subespacios de U_0 . La **dimensión** de una cuádrupla $U = (U_0, U_1, \dots, U_4)$ es, entonces, el vector $d = \dim U = (d_0, d_1, \dots, d_4)$ en donde $d_i = \dim_k(U_i)$, para todo $i \in \{0, \dots, 4\}$. Tomando las cuádruplas como objetos y los morfismos entre cuádruplas como morfismos, se obtiene la categoría que será denotada como $\mathrm{rep}(\mathcal{T}, k)$.

El problema de los cuatro subespacios consiste en obtener la clasificación completa, salvo isomorfismo, de todas las cuádruplas indescomponibles. Para el objetivo de este trabajo, resulta particularmente útil la forma matricial en que está presentada la solución a este problema en [MZ04, apéndice, págs. 22 y 23].

Como se mencionó en [BM24], a la tetrada $\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 4\}$ se puede hacer corresponder el carcaj $\mathcal{C}$ dado por



De hecho, tenemos un funtor

$$F: \mathrm{rep}(\mathcal{T}, k) \rightarrow \mathrm{rep}(\mathcal{C}, k)$$

que induce un isomorfismo de k -espacios vectoriales

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{rep}(\mathcal{P},k)}(U, V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{rep}(\mathcal{T},k)}(F(U), F(V)).$$

Los detalles de la definición del funtor F se encuentran en [BM24]. En particular, para hallar los espacios de homomorfismos entre ciertos objetos en $\mathrm{rep}(\mathcal{T}, k)$, se puede calcular los espacios correspondientes en la categoría $\mathrm{rep}(\mathcal{C}, k)$. Este hecho fue utilizado por los autores, en el artículo citado, para obtener los espacios de homomorfismos para las cuádruplas indescomponibles asociadas a la componente postproyectiva del carcaj de Auslander-Reiten correspondiente al carcaj $\mathcal{C}$. Con la ayuda de ese resultado, presentado más adelante en el teorema 3.2, se van a calcular los espacios de homomorfismos para las cuádruplas indescomponibles asociadas a la componente preinyectiva del carcaj de Auslander-Reiten correspondiente a $\mathcal{C}$.

Nota 2. En el cuadro 1, para enteros positivos q y r , la matriz nula de tamaño $q \times r$ se denotan como $\mathbf{0}_{q,r}$; la matriz nula de tamaño $q \times q$ se denota por $\mathbf{0}_q$. Para un entero positivo s , las matrices $I_s^{\leftarrow}$ ($I_s^{\rightarrow}$, respectivamente) son matrices de tamaños $s \times (s+1)$ obtenidas al agregar una columna de ceros a la

izquierda (y a la derecha, respectivamente) de la matriz identidad I_s . Explícitamente, se obtiene:

$$I_s^{\leftarrow} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_s^{\rightarrow} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si $s = 0$, las matrices $I_0^{\leftarrow}$ e $I_0^{\rightarrow}$ son iguales; son matrices «formales» con cero filas y una columna, que representan el operador lineal $k \rightarrow 0$.

En las matrices de tipo V^* , la franja horizontal inferior corresponde a una fila. Si $n = 0$, todos los bloques de las dos franjas horizontales superiores de la matriz de este tipo son bloques vacíos, lo que da lugar a la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, que corresponde a la cuádrupla (k, k, k, k) .

Nota 3. En la Figura 1 se presenta la componente preinyectiva del carcaj de Ausander-Reiten asociado a $\mathcal{C}$. En esta componente aparecen únicamente cuádruplas indescomponibles de los tipos III^* , IV^* o V^* (el tipo al que pertenece cada una de las cuádruplas aparece en la parte inferior de la figura). La columna de la derecha, encerrada entre un rectángulo, contiene cuatro de los objetos inyectivos indescomponibles asociados al carcaj $\mathcal{C}$; estos objetos no corresponden a representaciones de la tetrada (aunque formalmente podrían ser tratados como cuádruplas indescomponibles de tipo IV^* , para $n = -1$). En el cuadro 1, se presentan los tipos III^* , IV^* y V^* en su forma matricial (tomada de [MZ04]), junto con sus correspondientes vectores de dimensión d .

Tal como se ve en la Figura 1, para la componente preinyectiva del carcaj de Ausander-Reiten asociado a $\mathcal{C}$, se tiene que los casos en los que existe un morfismo irreducible entre indescomponibles son los siguientes:

1. De tipo V^* , con dimensión de la forma $n = 2t + 1$, a tipo III^* , con dimensión de la forma $n = t$, en donde $t \geq 0$ es un entero.
2. De tipo III^* , con dimensión de la forma $n = t$, a tipo V^* , con dimensión de la forma $n = 2t$, en donde $t \geq 0$ es un entero.
3. De tipo V^* , con dimensión de la forma $n = 2t + 2$, a tipo IV^* , con dimensión de la forma $n = t$, en donde $t \geq 0$ es un entero.
4. De tipo IV^* , con dimensión de la forma $n = t$, a tipo V^* , con dimensión de la forma $n = 2t + 1$, en donde $t \geq 0$ es un entero.

En los teoremas 3.2 y 3.3, se utilizará la siguiente notación: para un entero no negativo s , una cuádrupla indescomponible de tipo T , en donde T es uno de los tipos III , IV , V , III^* , IV^* o V^* , con vector de dimensión $n = s$, se denotará T_s .

A manera de referencia, el teorema que muestra la clasificación de los espacios de homomorfismos asociados a las cuádruplas indescomponibles de la componente postproyectiva.

Cuadro 1: forma matricial de las cuádruplas indescomponibles, junto con sus vectores de dimensión, correspondientes a la componente preinyectiva del carcaj de Ausander-Reiten asociado al carcaj $\mathcal{C}$.

III^*

$$d = (2n + 1, n, n + 1, n + 1, n + 1)$$

I_n	$\mathbf{0}_{n,n+1}$	$I_n^{\leftarrow}$	$I_n^{\rightarrow}$
$\mathbf{0}_{n+1,n}$	I_{n+1}	I_{n+1}	I_{n+1}

$$n \geq 0$$

IV^*

$$d = (2n + 2, n + 1, n + 1, n + 1, n + 2)$$

I_{n+1}	$\mathbf{0}_{n+1}$	I_{n+1}	$I_{n+1}^{\leftarrow}$
$\mathbf{0}_{n+1}$	I_{n+1}	I_{n+1}	$I_{n+1}^{\rightarrow}$

$$n \geq 0$$

V^*

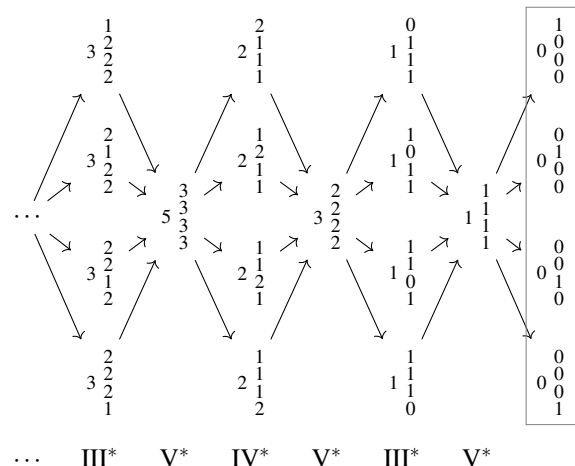
$$d = (2n + 1, n + 1, n + 1, n + 1, n + 1)$$

$I_n^{\leftarrow}$	$I_n^{\leftarrow}$	$I_n^{\rightarrow}$	$\mathbf{0}_{n,n+1}$
$\mathbf{0}_{n,n+1}$	$I_n^{\rightarrow}$	$I_n^{\leftarrow}$	$I_n^{\leftarrow}$
$10 \dots 0$	$10 \dots 0$	$10 \dots 0$	$10 \dots 0$

$$n \geq 0$$

Teorema 3.2. Dado un campo k , los espacios de homomorfismos correspondientes a las representaciones indescomponibles en la componente postproyectiva del carcaj de

Figura 1: componente preinyectiva del carcaj de Ausander-Reiten correspondiente al carcaj $\mathcal{C}$ asociado a la tetrada.



Auslander-Reiten asociado a $\mathcal{C}$, para los cuales hay al menos un morfismo irreducible, están dados por

- a) $\text{Hom}(V_{2t}, III_t) \simeq k$.
- b) $\text{Hom}(III_t, V_{2t+1}) \simeq k$.
- c) $\text{Hom}(V_{2t+1}, IV_t) \simeq k$.
- d) $\text{Hom}(IV_t, V_{2t+2}) \simeq k$.

Demostración. Ver [BM24, Teorema 3.1, págs. 5–10]. $\square$

Como para la tetrada $\mathcal{T}$ se tiene que $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{op}$, del resultado anterior junto con el corolario 2.9 se obtiene el resultado principal.

Teorema 3.3. *Dado un campo k , los espacios de homomorfismos correspondientes a las representaciones indecomponibles en la componente preinyectiva del carcaj de Auslander-Reiten asociado a $\mathcal{C}$, para los cuales hay al menos un morfismo irreducible, están dados por*

- a) $\text{Hom}(V_{2t+1}^*, III_t^*) \simeq k$.
- b) $\text{Hom}(III_t^*, V_{2t}^*) \simeq k$.
- c) $\text{Hom}(V_{2t+2}^*, IV_t^*) \simeq k$.
- d) $\text{Hom}(IV_t^*, V_{2t+1}^*) \simeq k$.

Demostración. a) Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(V_{2t+1}^*, III_t^*) &= \text{Hom}(D(V_{2t+1}), D(III_t)) \\ &\simeq \text{Hom}(III_t, V_{2t+1}) \quad (\text{Por e) de 2.8}) \\ &\simeq k. \quad (\text{Por b) de 3.2}) \end{aligned}$$

b) Procediendo de manera análoga,

$$\begin{aligned} \text{Hom}(III_t^*, V_{2t}^*) &= \text{Hom}(D(III_t), D(V_{2t})) \\ &\simeq \text{Hom}(V_{2t}, III_t) \quad (\text{Por e) de 2.8}) \\ &\simeq k. \quad (\text{Por a) de 3.2}) \end{aligned}$$

c) Además,

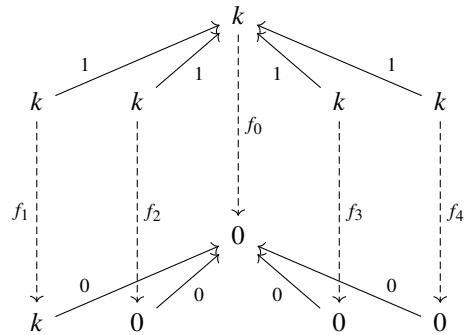
$$\begin{aligned} \text{Hom}(V_{2t+2}^*, IV_t^*) &= \text{Hom}(D(V_{2t+2}), D(IV_t)) \\ &\simeq \text{Hom}(IV_t, V_{2t+2}) \quad (\text{Por e) de 2.8}) \\ &\simeq k. \quad (\text{Por d) de 3.2}) \end{aligned}$$

d) Finalmente,

$$\begin{aligned} \text{Hom}(IV_t^*, V_{2t+1}^*) &= \text{Hom}(D(IV_t), D(V_{2t+1})) \\ &\simeq \text{Hom}(V_{2t+1}, IV_t) \quad (\text{Por e) de 2.8}) \\ &\simeq k. \quad (\text{Por c) de 3.2}) \end{aligned}$$

Con esto, termina nuestra prueba. $\square$

Nota 4. Aunque los objetos inyectivos indecomponibles del recuadro de la derecha de la figura 1 no corresponden a representaciones de la tetrada, (pues su espacio principal es 0), mientras que uno de los espacios asociados a uno de los puntos de la tetrada es isomorfo a k , por completitud, se va a calcular el espacio de homomorfismos entre las representaciones indecomponibles de tipo V^* con $n = 0$ y estos inyectivos indecomponibles. Ya que todos ellos son isomorfos entre sí (y corresponden a permutaciones de los puntos de la tetrada), basta considerar uno cualquiera de ellos; por ejemplo, el de la esquina superior derecha, con vector de dimensión $(0, 1, 0, 0)$. Es necesario hallar todas las colecciones de cinco transformaciones lineales $(f_0, f_1, \dots, f_5)$ que hagan conmutar el siguiente diagrama:



Es claro que f_0, f_2, f_3 y f_4 deben ser el morfismo nulo, ya que sus codominios son el espacio 0. Así pues, solo se debe determinar los posibles valores para f_1 de tal forma que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{1} & k \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_0=0 \\ k & \xrightarrow{0} & 0 \end{array}$$

conmute. Es claro que f_1 puede ser multiplicación por un elemento arbitrario de k , así que el espacio de homomorfismos es, en este caso, $\{(0, \alpha, 0, 0, 0) \mid \alpha \in k\}$, que es isomorfo al campo base k .

4. Colofón

Mediante técnicas elementales de álgebra lineal, se ha obtenido explícitamente, en este artículo y en su homólogo [BM24], los espacios de homomorfismos entre los tipos de representaciones indecomponibles correspondientes a la componente no regular (es decir, aquella formada por las cuádruplas indecomponibles que pertenecen a la componente postproyectiva o a la preinyectiva) del carcaj de Auslander-Reiten asociado al problema de los cuatro subespacios.

Como trabajo a futuro, queda el problema análogo para la componente regular: obtener explícitamente, mediante herramientas de álgebra lineal, los espacios de homomorfismos asociados a los objetos indecomponibles correspondientes a la componente formada por las cuádruplas indecomponibles que no pertenecen a la componente postproyectiva ni a la preinyectiva.

Agradecimientos

Los autores agradecen al semillero interseeds REAL por crear un ambiente propicio para la investigación en álgebra.

Referencias.

- [Bre67] S. Brenner, *Endomorphism algebras of vector spaces with distinguished sets of subspaces*, J. Algebra **6** (1967), 100–114.
- [Bre74] ———, *On four subspaces of a vector space*, J. Algebra **29** (1974), 587–599.
- [BM24] J.C. Buitrago and G. Medina, *Espacios de homomorfismos entre cuádruplas indescomponibles*, Paskín Matemático **6** (2024), no. 1, 1–10.
- [For08] T.A. Forbregd, *The 4 Subspace Problem: Advisor: Sverre Smalø*, Master's Thesis, Norwegian University of Science and Technology, 2008., t.1y/28hz.
- [GP70] I.M. Gelfand and V.A. Ponomarev, *Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite dimensional vector space*, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, Hilbert space operators, 1970, pp. 163–237.
- [Med23] G. Medina, *Sobre el Problema de los Cuatro Subespacios*, Paskín Matemático **5** (2023), no. 1, 9–18.
- [MZ04] G. Medina and A.G. Zavadskij, *The four subspace problem: An elementary solution*, Linear Algebra and its Applications **392** (2004), 11–23.
- [Sim92] D. Simson, *Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories*, Gordon and Breach Science Publishers, 1992.

Acerca de los autores: Juan Camilo es estudiante de 7.º semestre del Programa Curricular de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales y es integrante del semillero interseeds REAL.

Gonzalo es profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales; su área de trabajo es la teoría de representaciones de estructuras algebraicas. Es el coordinador del semillero interseeds REAL.

ÓRBITAS PERIÓDICAS EN PROBLEMAS DE n -CUERPOS

Adolfo Margain y Abimael Bengochea *

adolfofomargain@gmail.com; abimael.bengochea@itam.mx

1. Resumen

Las evoluciones periódicas son desde hace mucho tiempo de interés, en particular en matemáticas. La motivación de este trabajo es exponer algunas de las soluciones periódicas del problema de n cuerpos, problema del área de ecuaciones diferenciales, con múltiples aplicaciones en astronomía y astrofísica, el cual busca determinar los movimientos individuales de un conjunto de partículas, por fijar ideas se puede pensar en un conjunto de objetos astronómicos, como un sistema solar, que interactúan mutuamente según las leyes de la gravitación universal de Newton, o según alguna ley de atracción o repulsión más complicada.

2. Introducción

Los fenómenos periódicos ocurren en toda clase de sistemas y han sido estudiados ampliamente a lo largo de la historia. Un ejemplo de esto lo da Quételet [Que64, Don17], quien notó, mediante un análisis de datos en cierto periodo de tiempo, que año tras año el número de nacimientos en Bruselas tuvo un valor máximo en febrero y un mínimo en julio. Esta periodicidad en los meses de febrero y julio se asocia a una condición climática favorable/desfavorable para la gestación. El movimiento de algunos cuerpos celestes en nuestro sistema solar es periódico, en particular lo que se refiere a la Tierra y el Sol, lo que motivó a que, en construcciones realizadas por nuestros antepasados, en diferentes partes del mundo, se consideraran detalles asociados a días especiales. Por ejemplo el solsticio de verano (21 de junio). Ese día, en Machu Picchu - Perú, la luz del sol pasa a través de las ventanas del Templo de Sol de tal forma que ilumina la piedra ceremonial en el interior de dicho templo. En la misma fecha, en la Catedral de San Sabino, Bari - Italia, los rayos del Sol pasan a través de la rosa en la fachada para coincidir con la rosa esculpida en el piso del interior de la iglesia.

El concepto de repetición puede ser muy amplio. Como es usual en matemáticas, definiremos qué significa que una solución sea periódica, y por qué es interesante estudiarlas desde un punto de vista matemático. A lo largo del trabajo describiremos algunas soluciones periódicas interesantes, poco usuales, que aparecen en el problema de n cuerpos. Todas las soluciones que describiremos tienen una característica común, son simétricas.

3. Ecuaciones diferenciales

La forma estándar de una ecuación diferencial ordinaria¹ es:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U. \quad (1)$$

Usualmente se considera que U es un conjunto abierto y f es una función clase C^1 en U .

Definición 3.1. Se dice que la función $\mathbf{u}(t)$, con dominio $I \subset \mathbb{R}$, es solución de la ecuación diferencial ordinaria si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\mathbf{u}(t)$ es diferenciable para todo $t \in I$,
2. $\mathbf{u}(t) \in U$ para todo $t \in I$,
3. $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = f(\mathbf{u}(t))$, para todo $t \in I$.

Algunos comentarios relevantes sobre las soluciones de (1):

1. En general, (1) tiene una infinidad de soluciones; si se agrega al problema (1) la condición inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, se obtendrá una única solución del sistema².
2. Solamente en algunos casos se puede resolver el sistema, es decir, determinar explícitamente una función $\mathbf{u}(t)$ que describa todas las soluciones del sistema. Un ejemplo de esto es el sistema lineal autónomo homogéneo $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$; la solución de este sistema es $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c}$, donde $e^{\cdot}$ es la exponencial de la matriz y $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante arbitrario.

Ya que, en general, no se puede resolver explícitamente las ecuaciones diferenciales ordinarias (1), se suelen estudiar las soluciones de forma geométrica, en un sentido cualitativo. A continuación, se definen los dos primeros casos relativamente más sencillos soluciones: equilibrios y soluciones periódicas.

Definición 3.2. Se dice que la solución $\mathbf{u}(t)$ del sistema (1) es de equilibrio si $\mathbf{u}(t) = \mathbf{c}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Es inmediato ver que si y sólo si $\mathbf{x}_0$ es una raíz de f , entonces $\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}_0$, $t \in \mathbb{R}$, es una solución de equilibrio del sistema.

Se continúa con las soluciones periódicas.

¹Consideramos el caso autónomo, esto es cuando el campo f no depende explícitamente del tiempo t .

²Una ecuación diferencial ordinaria con esta restricción se conoce como problema de Cauchy.

*Departamento de Matemáticas, Instituto Tecnológico Autónomo de México

Definición 3.3. La solución $\mathbf{u}(t)$ del sistema es periódica, con periodo³ $T > 0$, si cumple $\mathbf{u}(t+T) = \mathbf{u}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

En el área de ecuaciones diferenciales, las soluciones periódicas es un tema amplio. En el problema de n -cuerpos existen soluciones periódicas con características especiales. A continuación, se expondrán algunos de los casos más interesantes.

4. Problema clásico de n -cuerpos

El problema clásico de n -cuerpos se refiere al estudio del movimiento en el plano o espacio ($\mathbb{R}^d$ con $d = 2$ o $d = 3$) de n partículas puntuales que interactúan mediante la fuerza gravitacional de Newton. Utilizando $\mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^d$, $m_k > 0$ para denotar, respectivamente, al vector de posición y masa de la k -ésima partícula, se tiene que la interacción entre las partículas del sistema de n cuerpos está definida por el potencial gravitacional:

$$U = -\sum_{i < j} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (2)$$

donde es $|\cdot|$ la norma euclidiana y G la constante de gravitación universal.

Utilizando la segunda ley de Newton, o una formulación Lagrangiana[LL60], se pueden obtener las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de los n cuerpos:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{Gm_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

El conjunto de ecuaciones (3) es un sistema de segundo orden que no está definido si al menos dos partículas tienen la misma posición en algún tiempo, es decir, existe una colisión. Introduciendo el vector de configuración $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$, el conjunto donde colisionan los cuerpos i y j es:

$$\Delta_{ij} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j\},$$

por lo que el conjunto donde al menos colisionan dos cuerpos resulta ser:

$$\Delta = \bigcup_{i < j} \Delta_{ij}.$$

Así, el sistema de ecuaciones diferenciales del problema de n -cuerpos (3) está bien definido si $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d \setminus \Delta$. Usualmente, el sistema de segundo orden (3) se reduce a uno de primero orden para tener una estructura similar a (1). Esto se hace introduciendo velocidades $\mathbf{v}_i \equiv \dot{\mathbf{r}}_i$, $i = 1, \dots, n$. Note que, dadas las condiciones iniciales en posiciones y velocidades de todos las partículas, el movimiento de los n cuerpos, equivalente a la solución de (3), está definido.

³Se considera como periodo $T > 0$ al menor número real $T > 0$ con el que se cumple la relación de periodicidad $\mathbf{u}(t+T) = \mathbf{u}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

4.1. Soluciones homográficas

Una solución homográfica [LSM15] del problema de n -cuerpos es aquella en la que se preserva la configuración de los n cuerpos para todo tiempo. Dichas soluciones tienen la forma:

$$\mathbf{r}_i(t) = \gamma(t)R(t)\mathbf{r}_0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

donde $\gamma(t)$ es un factor de escala, $R(t)$ una rotación y $\mathbf{r}_0$ una configuración fija. Dichos términos satisfacen ciertas ecuaciones las cuales se obtienen al combinar (4) con (3). Una solución homográfica se denomina equilibrio relativo⁴ si $\gamma(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Para el caso de $n = 3$ cuerpos con masas arbitrarias m_1, m_2, m_3 , existen soluciones periódicas de este tipo con dos configuraciones posibles. En un caso (Lagrange), los tres cuerpos forman una configuración de triángulo equilátero; en el otro caso, los tres cuerpos están en configuración colineal (Euler). Existen condiciones iniciales que dan lugar a soluciones homográficas donde los tres cuerpos siguen trayectorias elípticas o circulares con las configuraciones triangular o colineal. Este tipo de órbitas se esquematiza en las Figuras 1 y 2.

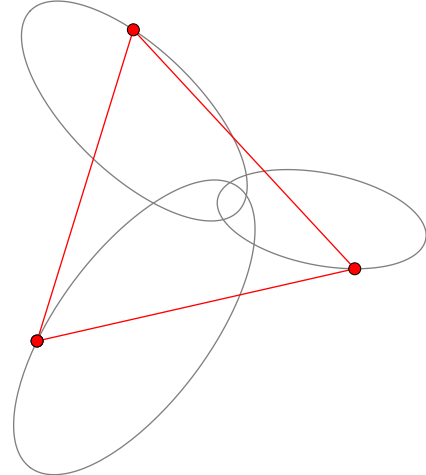


Figura 1: Soluciones de Lagrange.

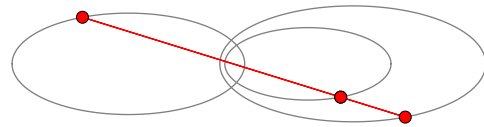


Figura 2: Soluciones de Euler.

4.2. Coreografías

Un coreografía del problema de n -cuerpos [Sim01] se define como una solución periódica donde todas las partículas siguen la misma trayectoria con el mismo espaciado temporal. Por ejemplo, para $n = 3$ se tiene que las posiciones de

⁴El nombre de equilibrio relativo se debe a que en un sistema en rotación con una velocidad angular adecuada la solución de los n -cuerpos no cambia en el tiempo.

los tres cuerpos $\mathbf{r}_i$, $i = 1, 2, 3$, deben satisfacer para todo tiempo t la relación:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1(t) &= \mathbf{r}_3(t + T/3), \\ \mathbf{r}_2(t) &= \mathbf{r}_1(t + T/3), \\ \mathbf{r}_3(t) &= \mathbf{r}_2(t + T/3).\end{aligned}$$

donde los vectores de posición son T periódicos.

El ejemplo más sencillo de coreografía, en el problema de tres cuerpos, es en el que las partículas tienen masas iguales y se mueven en una circunferencia común con una frecuencia angular constante (equilibrio relativo).

Existen coreografías con formas geométricas exóticas, por ejemplo, la coreografía con forma de ocho. Esta solución fue descrita por Moore [Moo93], y su existencia, como solución del problema de tres cuerpos, fue demostrada posteriormente por A. Chenciner y R. Montgomery [CM00]. En esta órbita, los tres cuerpos siguen la trayectoria de un ocho, como se muestra en la Figura 3; la evolución de la órbita de los tres cuerpos se muestra en la Figura 4.

El estudio de las coreografías es un problema abierto. Por ejemplo, todas las coreografías que se conocen en el problema de n -cuerpos poseen masas iguales, no se sabe si esto sucede para cualquier coreografía.

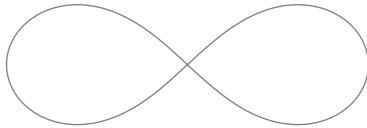


Figura 3: Coreografía con figura de ocho.

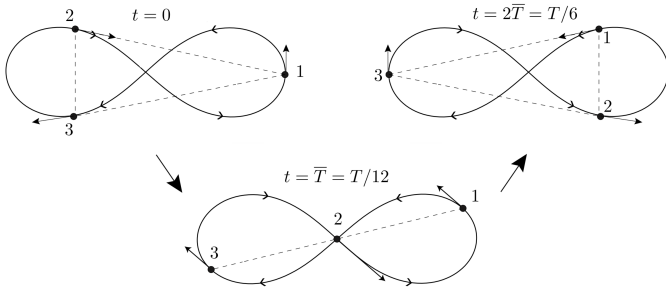


Figura 4: Evolución coreografía con figura de ocho, periodo $T = 12\bar{T}$.

4.3. Órbitas de Schubart

En el problema gravitacional de los tres cuerpos $n = 3$, Schubart [Sch56], descubrió una órbita periódica en la que suceden colisiones binarias en ciertos tiempos. Esta es una órbita en un sentido “extendido” ya que, estrictamente no está asociada a una solución del problema de los tres cuerpos debido a que el sistema de ecuaciones diferenciales no está definido en el momento que suceden las colisiones binarias. Sin

embargo, existen técnicas para regularizar este tipo de colisiones, como lo es la transformación Levi-Civita [Cel03], que básicamente consiste en utilizar cambios de variable, incluyendo un nuevo tiempo, de tal forma que el nuevo sistema esté bien definido en la colisión binaria.

El periodo de la órbita de Schubart es T^5 . En el tiempo $t = 0$, las partículas 1 y 2 están en la misma posición (colisión), a la izquierda del origen del sistema coordenado, en una posición $x = -a$. En cambio, la partícula 3 está a una distancia $2a$ del origen del sistema coordenado, en la posición $x = 2a$. En este punto la partícula 3 tiene velocidad cero, mientras que las partículas 1 y 2 tienen velocidades ficticias dirigidas a la izquierda y derecha, respectivamente. Posteriormente, las partículas 1 y 3 se mueven hacia la izquierda, mientras que la partícula 2 hacia la derecha, de tal forma que la distancia entre las partículas 2 y 3 decrece. Luego, cuando el tiempo es $t = T/6$, las partículas 2 y 3 están en la misma posición (colisión), en la posición $x = a$, mientras que la partícula 1 se encuentra en la posición $x = -2a$. Aquí, la primera partícula tiene velocidad cero, mientras que las partículas 2 y 3 tienen velocidades ficticias dirigidas a la derecha e izquierda, respectivamente. Las configuraciones de los vectores de estado de los tres cuerpos en el intervalo temporal $[0, T/6]$ están relacionados de la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1(t + T/6) &= -\mathbf{r}_3(t), \\ \mathbf{r}_2(t + T/6) &= -\mathbf{r}_1(t), \\ \mathbf{r}_3(t + T/6) &= -\mathbf{r}_2(t).\end{aligned}$$

La descripción posterior de la órbita se obtiene mediante una permutación de los índices, como se muestra en la Figura 5. Cabe destacar que la órbita de Schubart tiene la estructura de una coreografía, aunque no es una solución regular a causa de las colisiones binarias.

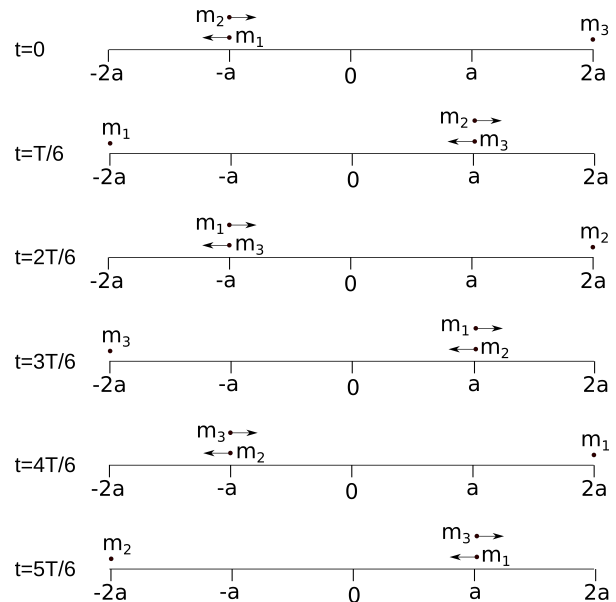


Figura 5: Evolución órbita Schubart, periodo $t = T$.

⁵En la órbita numérica determinada por Schubart se utilizó una distancia característica $a \approx 0,71756083$ y el periodo $T = 4,69808380$.

Una pregunta natural con respecto a las órbitas tipo Schubart es si pueden existir para masas diferentes. Esto ha sido estudiado y reportado como posible en el problema de 3-cuerpos [Yan12].

5. Generalizaciones

En matemáticas, es usual modificar y estudiar los objetos matemáticos. En el problema de n -cuerpos, existen diferentes formas de generalizar; una de ellas consiste en cambiar el espacio donde se mueven los cuerpos. Todos los ejemplos que hemos mencionado suceden en el plano, entonces se podría plantear estudiar órbitas periódicas que sucedieran en la superficie de una esfera (curvatura positiva) o un hiperboloide (curvatura negativa). El planteamiento de este problema también involucra la modificación del potencial de interacción, se considera la interacción mediante geodésicas de las superficies donde ocurre el movimiento. A continuación, se utilizarán las ecuaciones de movimiento que usualmente se utilizan para este tipo de problemas, el lector interesado en el desarrollo de dichas ecuaciones puede consultar [Dia15].

5.1. Coreografías de n cuerpos en la esfera

En la sección anterior se discutió el movimiento de n partículas que interactúan gravitacionalmente en el plano $\mathbb{R}^2$ o en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$, ahora se van a considerar n partículas que están restringidas a moverse en la superficie de una esfera de radio R . Debido a esta restricción, la tres coordenadas del vector de posición de cada partícula no son independientes, deben satisfacer la ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Además de la restricción del movimiento a la superficie de una esfera de radio R , queda por definir el tipo de interacción. En estos modelos, la interacción entre partículas también es de pares y depende de la distancia entre ellas, pero la distancia utilizada no es la euclidiana, se define sobre geodésicas que conecten a las dos partículas. Entre las posibles potenciales que definen la interacción en la superficie, usualmente se considera el potencial cotangente:

$$U = -\frac{1}{R} \sum_{i < j} m_i m_j \cotan \left(\frac{\hat{d}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)}{R} \right), \quad (5)$$

donde

$$\hat{d}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = R \arccos \left(\frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{R^2} \right).$$

Para el potencial (5), las ecuaciones de movimiento para los n cuerpos son:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j (R^3 \mathbf{r}_j - R(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j) \mathbf{r}_i)}{[R^4 - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j)^2]^{3/2}} + R^{-2} (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i) \mathbf{r}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Una de las preguntas en este tipo de sistemas es sobre la existencia de coreografías. En [MG16], se obtienen órbitas

coreográficas para el problema de n -cuerpos en la superficie de una esfera. En particular, se obtienen coreografías que pueden considerarse la continuación de la coreografía con figura de ocho tomando como parámetro de continuación el radio de la esfera R (una de estas coreografías se esquematiza en la Figura 6). En el caso $R \rightarrow \infty$ se recupera la coreografía en el problema clásico de 3-cuerpos.

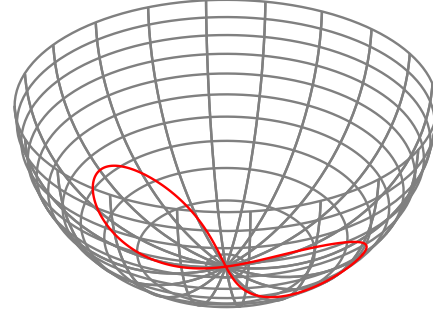


Figura 6: Coreografía de tres cuerpos con masas iguales en la esfera.

5.2. Coreografías de n cuerpos en el hiperboloide

En esta sección consideramos n partículas que están restringidas a moverse en la superficie de un hiperboloide de una hoja. En este caso, las coordenadas del vector de posición de cada partícula deben satisfacer la ecuación:

$$x^2 + y^2 - z^2 = -R^2, \quad z > 0.$$

donde R es un parámetro positivo. En este problema surge de forma natural un producto interior diferente al considerado en la secciones previas, dada por:

$$(x_1, y_1, z_1) \odot (x_2, y_2, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 - z_1 z_2.$$

El potencial que define la interacción entre las partículas es:

$$U = -\frac{1}{R} \sum_{i < j} m_i m_j \coth \left(\frac{\hat{d}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)}{R} \right), \quad (7)$$

con

$$\hat{d}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = R \operatorname{arcosh} \left(-\frac{\mathbf{r}_i \odot \mathbf{r}_j}{R^2} \right).$$

Para el potencial (7), las ecuaciones de movimiento de los n cuerpos resultan:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j (R^3 \mathbf{r}_j + R(\mathbf{r}_i \odot \mathbf{r}_j) \mathbf{r}_i)}{[(\mathbf{r}_i \odot \mathbf{r}_j)^2 - R^4]^{3/2}} - R^{-2} (\dot{\mathbf{r}}_i \odot \dot{\mathbf{r}}_i) \mathbf{r}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Para este modelo también se han obtenido órbitas coreográficas con masas iguales, en particular aquellas que corresponden a la continuación de la coreografía con figura de ocho del problema clásico de 3-cuerpos [Mon16]. Esta órbita se esquematiza en la Figura 7.

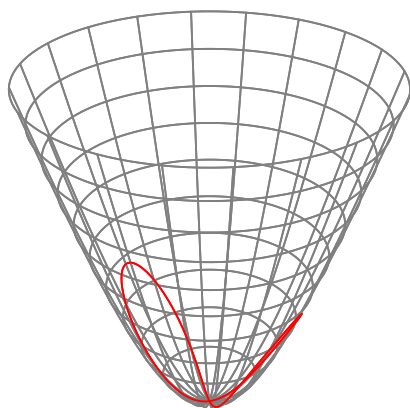


Figura 7: Coreografía de tres cuerpos con masas iguales en el hiperboloide.

6. Conclusiones

En general, el estudio de las soluciones periódicas es una tarea compleja, cuya dificultad se debe a la no linealidad de las ecuaciones del movimiento y la dimensión del espacio donde están definidas las soluciones. Las soluciones periódicas son fundamentales en diferentes áreas, en particular, en ecuaciones diferenciales. En esta exposición se ha presentado, en un sentido de divulgación, algunas soluciones del problema de n -cuerpos. El lector interesado puede encontrar otros conceptos interesantes relacionados con el tema, como lo son la estabilidad de las soluciones periódicas y bifurcación de las soluciones.

Referencias.

- [MG16] H. Montanelli and N. I. Gushterov, *Computing Planar and Spherical Choreographies*, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems **15** (2016), no. 1, 235–256.
- [Mon16] H. Montanelli, *Computing hyperbolic choreographies*, Regular and Chaotic Dynamics **21** (2016), 522–530.
- [Don17] K. Donnelly, *Redeeming Belgian Science, Periodic Phenomena and Global Physics in Brussels, 1825-1870*, History of Meteorology **8** (2017), 54–73.
- [Que64] L. A. J. Quetelet, *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges*, Bruxelles M. Hayez, 1864.
- [LL60] L. D. Landau and E. M. Lifshits, *Mechanics*, Cambridge University Press, 1960.
- [LSM15] J. Llibre, C. Simó, and R. Moeckel, *Central Configurations, Periodic Orbits, and Hamiltonian Systems*, Springer Basel, 2015.
- [Sim01] C. Simó, *New families of solutions in N -body problems*, In European Congress of Mathematics: Barcelona, July 10–14, 2000, Volume I, pp. 101–115. Birkhäuser Basel, 2001.
- [Cel03] A. Celletti, *Basics of regularization theory*, In Chaotic worlds: from order to disorder in gravitational N -body dynamical systems, pp. 203–230. Springer Netherlands, 2003.
- [Dia15] F. Diacu, *The Newtonian n -Body Problem in the Context of Curved Space*, In Extended Abstracts Spring 2014: Hamiltonian Systems and Celestial Mechanics; Virus Dynamics and Evolution, pp. 23–26. Springer, 2015.
- [Moo93] C. Moore, *Braids in classical dynamics*, Physical Review Letters **70** (1993), 3675–3679.

- [Yan12] D. Yan, *A simple existence proof of Schubart periodic orbit with arbitrary masses*, Frontiers of Mathematics in China **7** (2012), 145–160.
- [CM00] A. Chenciner and R. Montgomery, *Montgomery. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses*, Annals of mathematics **152** (2000), 881–901.
- [Sch56] J. Schubart, *Numerische Aufsuchung periodischer Lösungen im Dreikörperproblem*, Astronomische Nachrichten **283** (1956), no. 1, 17–22.

Acerca del autor: Adolfo Bargain es estudiante de matemáticas aplicadas con un fuerte interés en las finanzas, particularmente en la búsqueda de patrones que permitan realizar trading de manera efectiva. Además de las matemáticas, disfruta explorar temas relacionados con la tecnología y la programación, le gusta leer novelas de ciencia ficción y está aprendiendo programación de videojuegos.

Abimael Bengochea es doctor en física de la Universidad Autónoma Metropolitana de México. En su tiempo libre le gusta escuchar música y tocar la guitarra acústica.

DINÁMICA DE COMPETENCIA ENTRE SISTEMAS OPERATIVOS: UN ENFOQUE LOTKA-VOLTERRA

Jeisson Cruz Amaya, Andersson Hincapie Amaya y Alberto Arias Guzmán*
jeissona.cruza@konradlorenz.edu.co, andersson.hincapiea@konradlorenz.edu.co,
gelbera.ariasg@konradlorenz.edu.co

Resumen

Este artículo propone un análisis detallado de la dinámica de los sistemas operativos (OS) utilizando el modelo Lotka-Volterra, estableciendo una analogía entre la ecología y el sistema bancario. Se examina la crucial “transferencia” de usuarios entre sistemas operativos prominentes como Windows, Mac OS y Linux, un aspecto vital para la industria tecnológica y la toma de decisiones empresariales estratégicas. El estudio emplea las ecuaciones de Lotka-Volterra para modelar la competencia dinámica entre estos sistemas operativos, identificando y evaluando parámetros clave que influyen significativamente en su evolución y participación de mercado. Este enfoque permite comprender mejor las dinámicas competitivas dentro del sector tecnológico, proporcionando conocimientos profundos para la planificación estratégica y el desarrollo de políticas empresariales adaptativas en un entorno digital en constante cambio.

1. Introducción

En un mundo cada vez más interconectado y digital, el estudio de la dinámica de sistemas y su aplicación en diferentes contextos se ha vuelto esencial. El artículo [Com12], plantea una interesante analogía entre la ecología y el sistema bancario, utilizando el modelo Lotka-Volterra para analizar la interacción entre los bancos, las empresas y los individuos en la transferencia de capital.

Además, como argumenta [Tho11], el sistema financiero y el ecosistema comparten similitudes, y este proyecto busca aplicar esa analogía al estudio de los sistemas operativos, explorando cómo la competencia y la colaboración influyen en su equilibrio y evolución, de manera similar a como ocurre en el mundo financiero y ecológico. Al igual que en la naturaleza, los sistemas operativos también se adaptan a las demandas cambiantes de los usuarios y las empresas. Al comprender mejor estas dinámicas, se pueden tomar decisiones más informadas en el mundo tecnológico.

Siguiendo esta línea, este artículo se centra en aplicar un enfoque similar al estudio de los sistemas operativos (OS). Al igual que en el artículo mencionado, donde se analiza la

transferencia de capital, aquí se examinará la «transferencia» de usuarios entre diferentes sistemas operativos, como Windows, Mac OS, Linux y otros. Esto es relevante dado que, al igual que en el sector financiero, los sistemas operativos desempeñan un papel fundamental en la tecnología de la información, donde millones de usuarios individuales y empresas toman decisiones sobre cuál utilizar. Predecir la cantidad de usuarios de cada OS en el tiempo representa un desafío intrigante y de gran relevancia para la industria tecnológica y la toma de decisiones empresariales.

Para abordar este desafío, este artículo empleará las ecuaciones de Lotka-Volterra como una herramienta matemática clave para modelar la dinámica de la competencia entre los sistemas operativos de escritorio más utilizados en el mundo. Como lo menciona [LTW14] en su artículo, las ecuaciones Lotka-Volterra son capaces de expresar la interacción entre dos o más competidores que están en el mismo mercado. Estas ecuaciones incluyen parámetros fundamentales que influyen en las tasas de crecimiento de cada especie.

Por otro lado, [WW16] mencionan que un aspecto crítico es el cálculo preciso de los parámetros de Lotka-Volterra, que representan la dinámica del mercado y determinan cómo los sistemas operativos compiten y evolucionan en el tiempo. Estos parámetros, como la capacidad de crecimiento propio, la capacidad de nicho de mercado y la tasa de competencia, son esenciales para comprender la evolución de la cuota de mercado de cada OS.

2. Metodología

2.1. Recopilación de Datos

Debido a la falta de datos precisos sobre la cantidad de usuarios de cada sistema operativo, el enfoque del proyecto se centra en utilizar la información disponible sobre la cantidad de computadoras a lo largo del tiempo como un indicador sustituto. Según [sta08], la Unión Internacional de Telecomunicaciones dejó de publicar datos relacionados después de 2005, y este indicador fue eliminado de los indicadores oficiales de los Objetivos de Desarrollo del Milenio. Además, el número exacto de computadoras personales en uso actualmente sigue siendo una estimación aproximada. Por otro lado, [Abr21] menciona en su artículo

*Estudiantes del programa de Matemáticas e Ingenierías de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz.

que en 2020 había alrededor de 1,28 mil millones de computadoras en todo el mundo, y se espera que para 2021 esta cifra aumente a 1,34 mil millones.

Para facilitar la aplicación de la regresión lineal, se tomará el año 1983 como punto de partida ($t_0 = 0$) en la línea de tiempo. Esto simplificará el proceso de análisis de datos y permitirá realizar estimaciones y predicciones de manera más conveniente en relación con la cantidad de computadoras a lo largo del tiempo.

Año	t	Millones de computadoras
1983	0	12,6
1984	1	19,8
1985	2	30,4
1986	3	38,4
1987	4	47,5
1988	5	74,0
1989	6	86,3
1990	7	101,0
1991	8	130,0
1992	9	155,0
1993	10	175,0
1994	11	200,0
1995	12	235,0
1996	13	275,0
1997	14	325,0
1998	15	375,0
1999	16	435,0
2000	17	500,0
2001	18	555,0
2002	19	615,0
2003	20	650,0
2004	21	775,0
2005	22	808,0
2020	37	1028,0
2021	38	1034,0

Tabla 1: Millones de computadoras personales por año [sta08].

De modo que, es fundamental contar con estadísticas precisas sobre las cuotas de mercado de cada sistema operativo. Estos datos proporcionan una visión clara de la distribución de usuarios en un momento dado y son esenciales para comprender la dinámica de la competencia entre los sistemas operativos. Según las estadísticas publicadas por [RF23] en el siguiente enlace <https://es.statista.com/estadisticas/634540/sistemas-operativos-par-a-pc-cuota-de-mercado-mundial/>.

Además, las cuotas de mercado para cada sistema operativo son un indicador crítico que proporciona información valiosa para la formulación de estrategias y la toma de decisiones empresariales. Un análisis preciso de estas cuotas de mercado permitirá evaluar la efectividad de las estrategias de cada sistema operativo en la competencia por usuarios.

La Figura 1 que se presenta ofrece una visión detallada del

mercado de sistemas operativos desde el año 2010 hasta el año 2023. Cada línea en el gráfico representa la evolución de un sistema operativo específico, proporcionando un análisis visual de las tendencias de adopción y participación en el mercado a lo largo del tiempo. A medida que se sigue el trazado de cada línea, se observan los cambios en la participación de mercado de Windows, Mac OS, Linux y otros sistemas operativos. Las fluctuaciones en las líneas revelan momentos clave en la competencia entre estos sistemas, proporcionando perspectivas sobre sus respectivos crecimientos y declives a lo largo de la década.

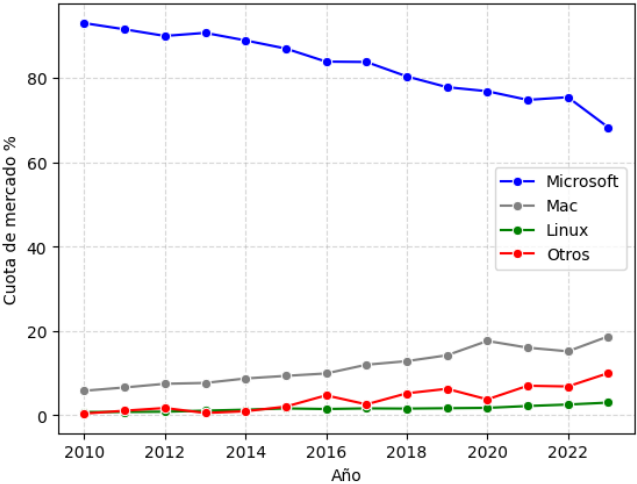


Figura 1: Cuota de mercado para cada sistema operativo objeto de estudio. Elaborado con base en [RF23].

Por otro lado, para comprender completamente la dinámica de la competencia entre los OS, también se tendrá en cuenta la población mundial y la cantidad de personas que hacen uso de Internet. Estos factores son fundamentales, ya que brindan información valiosa sobre usuarios potenciales. La interacción entre la población mundial y la cantidad de usuarios de Internet es esencial para determinar la demanda entre los diferentes OS.

La población mundial actúa como un límite superior en la cantidad total de usuarios potenciales de OS. A medida que la población mundial crece, se abre la posibilidad de un mayor número de usuarios en el mercado. Sin embargo, no todos estos usuarios forman parte del mercado de sistemas operativos de escritorio, ya que factores como la edad, la ubicación geográfica y la disponibilidad de tecnología influyen en la adopción de OS. Por lo tanto, la población mundial proporciona una base sobre la cual se pueden estimar la capacidad de carga del sistema. De acuerdo con un artículo publicado por la [ONU23], se estima que actualmente hay más de 8000 millones de personas en el mundo.

Además, la cantidad de personas que hacen uso de Internet es un indicador clave de la penetración tecnológica en la sociedad. Cuanto mayor sea el número de personas que utilizan Internet, mayor será la base de usuarios potenciales

para sistemas operativos de escritorio y, por lo tanto, en la elección de un OS. Según [NF24], el número de usuarios de Internet en el mundo alcanzó los 5350 millones de personas, lo que representa al 66,2 %.

2.2. Análisis de Datos

El análisis de datos desempeña un papel fundamental en este proyecto, ya que permite comprender y modelar la evolución de la cantidad de computadoras en el mundo a lo largo de las décadas. Para facilitar este análisis, se utilizarán herramientas como Google Colab y el lenguaje de programación Python.

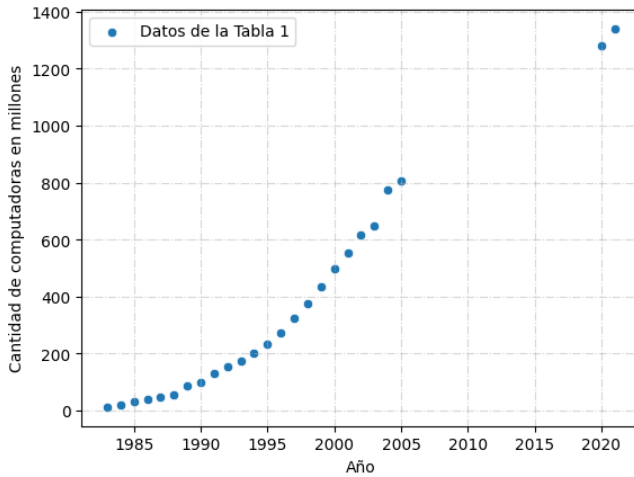


Figura 2: Cantidad de computadoras personales desde 1983 hasta 2023. Elaborado con base en la Tabla 1 [sta08].

Al graficar los datos de la Tabla 1 se observa una distribución que se asemeja a una curva logística, por lo cual es prudente asumir que los datos están modelados por la función

$$y = \frac{K}{1 + be^{ct}},$$

donde:

- y representa la población (o cualquier variable de interés que sigue un crecimiento logístico) en el tiempo t .
- K es la capacidad de carga del entorno. En términos prácticos, K es el límite superior de y conforme t tiende a infinito.
- b es una constante relacionada con la población inicial y_0 .
- c es una constante que determina la tasa de crecimiento o decrecimiento. Puede ser positiva o negativa.

Para estimar los valores faltantes desde el año 2006 a 2019, se debe linealizar de alguna manera esta curva logística. Se elige esta técnica debido a la adecuación de la curva,

lo que permite obtener proyecciones más precisas sobre la cantidad de computadoras en el mundo en los años sin datos disponibles. Posteriormente, se utilizarán estas estimaciones para determinar la cantidad de usuarios de cada sistema operativo.

Según [SH11], $y_c = y(t_c)$, donde t_c es el punto crítico en el que y_c es un punto de inflexión. De esta manera, el punto crítico de la función logística modelada se encuentra aproximadamente alrededor de $t = 21$ ó $t = 2004$. Esto se deduce al observar los datos de la Figura 2, que representa la máxima derivada de la curva logística y, por ende, el punto de inflexión en el crecimiento. Además, de acuerdo con [SH11], el punto crítico es esencial para determinar el momento en el que se alcanza la saturación.

2.2.1. Linealización de la curva logística

Una técnica efectiva para linealizar la curva logística es transformar la ecuación original mediante manipulaciones algebraicas. La expresión logística $y_i = \frac{K}{1 + be^{ct_i}}$, donde $K = 2y_c$ puede reorganizarse para obtener una forma lineal más manejable,

$$\frac{2y_c}{y_i} - 1 = be^{ct_i},$$

$$\ln\left(\frac{2y_c}{y_i} - 1\right) = \ln(b) + ct_i,$$

donde:

- y_i es el número de computadoras para cada instante de tiempo t_i .
- $2y_c$ representa la saturación de la curva, el punto donde la ecuación logística alcanza su valor máximo.
- $\ln(b)$ es el punto de corte de la recta en el eje vertical.
- c es la pendiente de la recta, reflejando la tasa de crecimiento.

Al expresar la ecuación resultante en la forma lineal

$$\ln\left(\frac{2y_c}{y_i} - 1\right) = \ln(b) + ct_i,$$

obtenemos una relación directa entre el

$$\ln\left(\frac{2y_c}{y_i} - 1\right)$$

y t_i . Esta forma lineal facilita la visualización y análisis de los datos. Al denotar la variable transformada como $\hat{y}_i$, la ecuación se simplifica a:

$$\hat{y}_i = \ln(b) + ct_i. \quad (1)$$

Utilizando la ecuación 1, se puede representar gráficamente los datos para $\hat{y}_i$ y aplicando una regresión lineal simple a esta representación linealizada, se obtiene una línea recta que modela la relación. Este enfoque simplificado facilita la

interpretación de la dinámica de crecimiento de usuarios y proporciona una herramienta efectiva para ajustar la curva logística a los datos observados.

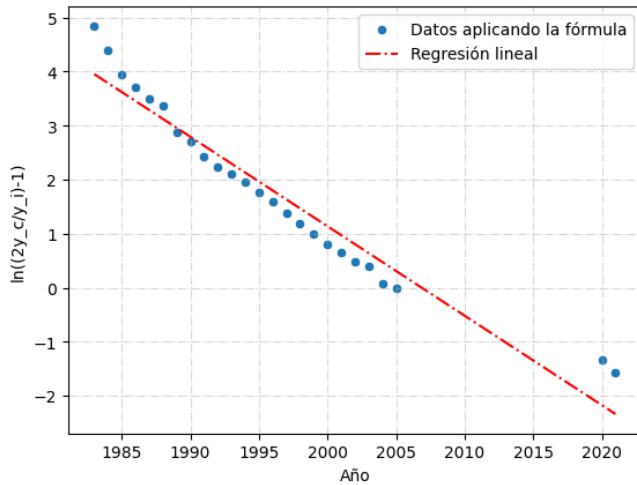


Figura 3: Datos linealizados aplicando fórmula vs Regresión lineal.

Una vez encontrados los valores de los parámetros b y c a través de la regresión lineal, se procede a emplear la función logística para ajustar la curva correspondiente. Esto implica utilizar la ecuación logística $y = \frac{2y_c}{1+be^{ct}}$ con los parámetros determinados. A través de esta curva logística, se realiza la estimación de los datos faltantes, lo que brinda una aproximación más precisa de la cantidad de computadoras en el mundo en los años sin información disponible.

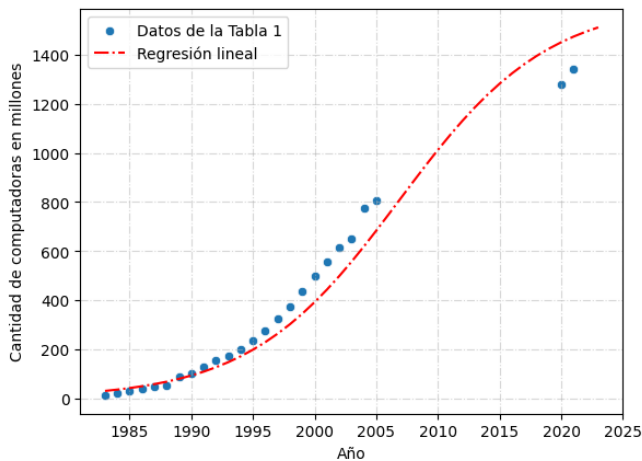


Figura 4: Gráfica de datos de la Tabla 1 vs Ajuste de los datos con los parámetros encontrados.

La Figura 4 muestra el resultado del ajuste, donde la curva logística se adapta a los datos conocidos, proporcionando una representación visual de la relación entre la variable

t y la cantidad de computadoras y . Esta representación gráfica facilita la interpretación de la tendencia general a lo largo del tiempo. Posteriormente, se evalúa la calidad del modelo mediante el cálculo del error relativo para cada punto, utilizando la siguiente fórmula.

$$\text{Error Relativo} = \frac{|\text{Valor Observado} - \text{Valor Estimado}|}{|\text{Valor Observado}|}.$$

Se aplica a los valores observados y estimados en los años disponibles. Este análisis proporciona una evaluación detallada de la precisión de las estimaciones en comparación con los datos reales, identificando posibles desviaciones y áreas de mejora. El proceso de ajuste logístico y la evaluación a través del error relativo ofrecen una metodología robusta para modelar y estimar la cantidad de computadoras en el mundo a lo largo del tiempo. La visualización gráfica y el análisis cuantitativo permiten una comprensión más completa de la dinámica de crecimiento y ofrecen una base sólida para proyecciones futuras en ausencia de datos concretos.

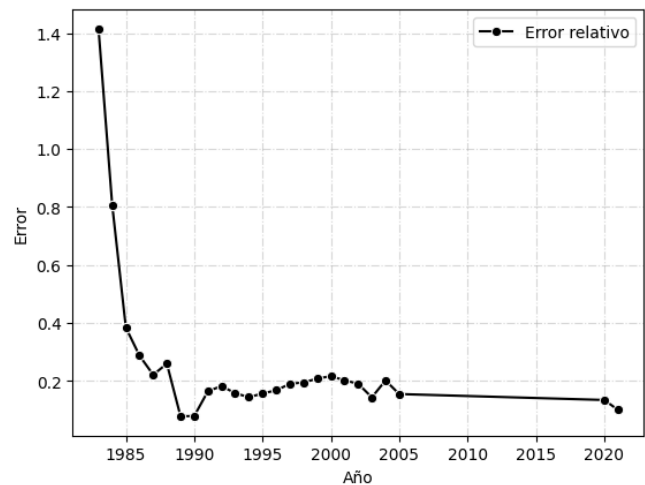


Figura 5: Error relativo de los datos de la Tabla 1 Vs ajuste logístico.

2.2.2. Estimación de usuarios para cada OS

En el proceso de estimación de usuarios para cada sistema operativo (OS), se integra la cantidad estimada de computadoras en el mundo, calculada mediante el modelo logístico, con la tasa de participación específica de cada sistema operativo, como se mencionó previamente. Este enfoque se extiende a partir del año 2010, aprovechando los datos de cuotas de mercado disponibles. La multiplicación de estas cuotas por la cantidad estimada de computadoras proporciona una estimación coherente de usuarios para cada año.

Considerando que el año inicial es 2010 ($t_0 = 0$), se facilita un análisis y alineación precisa de los datos en función de este punto. Esta elección permite calcular la tasa de crecimiento y

las estimaciones de usuarios de sistemas operativos de manera más precisa a lo largo del tiempo.

La fórmula utilizada para calcular los usuarios estimados es:

$$Usuarios\ estimados = \frac{y_i \cdot m_i}{100},$$

dado que incorpora la estimación de la cantidad de computadoras en el mundo y la tasa de participación del sistema operativo. Este método proporciona una estimación detallada de la cantidad de usuarios para cada sistema operativo en los años sin datos disponibles, permitiendo un análisis más preciso de la evolución a lo largo del tiempo, donde:

- *Usuarios estimados* es la cantidad estimada de usuarios para un sistema operativo específico.
- y_i es la estimación de la cantidad de computadoras en el mundo en un año dado.
- m_i es la tasa de participación de un sistema operativo específico en ese mismo año.

Año	t	Windows	Mac OS	Linux	Otros
2010	0	941,5	58,9	7,9	4,2
2011	1	982,7	70,9	8,5	11,7
2012	2	1017,9	84,5	9,6	19,6
2013	3	1075,4	91,0	13,0	6,5
2014	4	1098,8	107,9	16,4	11,9
2015	5	1114,9	119,9	20,9	26,4
2016	6	1110,2	131,3	19,7	62,6
2017	7	1140,6	163,2	22,3	35,3
2018	8	1121,0	179,1	22,2	72,7
2019	9	1108,5	202,7	23,9	89,5
2020	10	1114,9	255,8	25,5	54,7
2021	11	1102,3	236,4	32,4	103,2
2022	12	1126,7	226,6	38,1	102,2
2023	13	1032,0	282,8	45,1	151,1

Tabla 2: Estimación de usuarios para cada sistema operativo.

En aras de contextualizar las estimaciones proporcionadas en la Tabla 2, es fundamental comprender la metodología. La estimación de usuarios para cada sistema operativo se fundamenta en la integración de la cantidad prevista de computadoras en el mundo, derivada del modelo logístico, con las tasas de participación específicas de cada sistema operativo. Este enfoque, que se extiende desde el año 2010, capitaliza los datos de cuotas de mercado disponibles, asegurando así una estimación coherente de usuarios en cada año, permitiendo una evaluación detallada de la evolución de la base de usuarios de Windows, Mac OS, Linux y otros sistemas operativos. Esta interpretación se ve respaldada tanto por los datos cuantitativos presentados en la tabla como por la representación gráfica de la Figura 6, ofreciendo una visión completa de la proyección anticipada de usuarios de sistemas operativos a lo largo del tiempo.

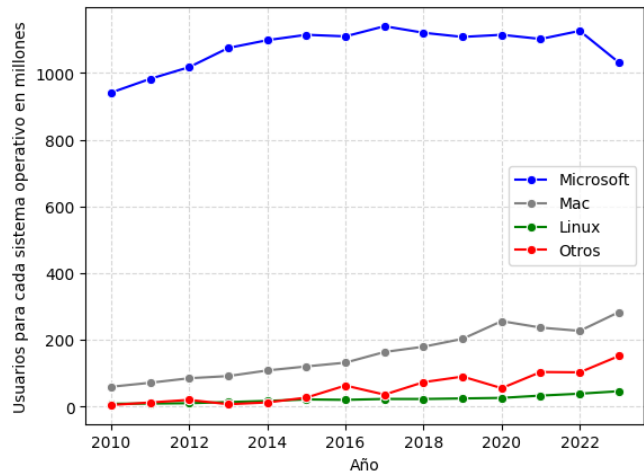


Figura 6: Usuarios para cada sistema operativo. Elaborado con base en la Tabla 2.

2.3. Adaptación del Modelo Lotka-Volterra

Esta metodología consiste en analizar la “transferencia” de usuarios entre diferentes OS, como Windows, Mac OS, Linux y otros. Este enfoque se asemeja al uso del modelo Lotka-Volterra en ecología para estudiar la interacción entre diferentes especies en un ecosistema. En lugar de depredadores y presas, en este caso, se considera a los sistemas operativos como especies que compiten por los usuarios. Cada sistema operativo intenta atraer y mantener a los usuarios a lo largo del tiempo, lo que resulta en una competencia por cuotas de mercado. Al igual que en la ecología, esta competencia implica tasas de crecimiento, factores de interacción y capacidades de nicho, pero aplicados al ámbito de la tecnología.

Para modelar esta competencia, es importante adaptar las ecuaciones de Lotka-Volterra para representar las tasas de cambio en la cantidad de usuarios de cada sistema operativo en función del tiempo. Así, podemos describir cómo la competencia y la colaboración entre los sistemas operativos influyen en su dinámica y cuotas de mercado a lo largo del tiempo.

El modelo Lotka-Volterra describe las interacciones entre dos especies en un ecosistema, y su aplicación a la competencia entre sistemas operativos implica adaptar el modelo al contexto. En el modelo original, una especie actúa como presa (W), y la otra como depredador (M). Sin embargo, en este caso, se considera a los sistemas operativos como especies que compiten entre sí por usuarios. La ecuación general para el modelo Lotka-Volterra en ausencia de competidores para este proyecto es:

$$\frac{dW}{dt} = a_1 W - a_2 W^2,$$

donde:

- $\frac{dW}{dt}$ Es la tasa de cambio a través del tiempo de los

usuarios que usan Windows.

- a_1 Es la tasa de crecimiento.
- a_2 Es el parámetro de competencia interna.

Al incorporar la segunda especie se producirá una competencia entre ellas, y será necesario añadir el término a_3WM . La ecuación que describe su comportamiento dinámico será:

$$\frac{dW}{dt} = a_1W - a_2W^2 - a_3WM.$$

Por lo tanto, el sistema al agregar la cuarta especie, se tiene:

$$\begin{cases} \frac{dW}{dt} = W(a_1 - a_2W - a_3M - a_4L - a_5O), \\ \frac{dM}{dt} = M(b_1 - b_2M - b_3W - b_4L - b_5O), \\ \frac{dL}{dt} = L(c_1 - c_2L - c_3W - c_4M - c_5O), \\ \frac{dO}{dt} = O(d_1 - d_2O - d_3W - d_4M - d_5L). \end{cases}$$

Para aplicar el modelo Lotka-Volterra en este contexto, necesitaríamos estimar los valores de a_i , b_i , c_i y d_i a partir de datos de la competencia real entre los sistemas operativos, como las tasas de adopción de cada sistema y la influencia que un sistema tiene en la elección del otro. El modelo nos permitiría entender cómo la competencia y la colaboración influyen en la distribución de usuarios a lo largo del tiempo. Por su similitud con la ecuación logística

$$\frac{dX}{dt} = r_1X \left(\frac{K - X}{K} \right),$$

es posible utilizar el siguientes sistema:

$$\begin{cases} \frac{dW}{dt} = r_1W \left(1 - \frac{W + \beta_1M + \gamma_1L + \delta_1O}{K_1} \right), \\ \frac{dM}{dt} = r_2M \left(1 - \frac{M + \alpha_1W + \gamma_2L + \delta_2O}{K_2} \right), \\ \frac{dL}{dt} = r_3L \left(1 - \frac{L + \alpha_2W + \beta_2M + \delta_3O}{K_3} \right), \\ \frac{dO}{dt} = r_4O \left(1 - \frac{O + \alpha_3W + \beta_3M + \gamma_3L}{K_4} \right), \end{cases}$$

donde:

- $\frac{dW}{dt}$ es la tasa de cambio a través del tiempo de los usuarios que usan Windows.
- $\frac{dM}{dt}$ es la tasa de cambio a través del tiempo de los usuarios que usan Mac.
- $\frac{dL}{dt}$ es la tasa de cambio a través del tiempo de los usuarios que usan Linux.
- $\frac{dO}{dt}$ es la tasa de cambio a través del tiempo de los usuarios que usan otros OS.
- r_i es la tasa de crecimiento de usuarios que usan de cada sistema operativo.
- α_i representa el efecto los usuarios de Windows tiene sobre los usuarios de otros OS.

- β_i representa el efecto los usuarios de Mac tiene sobre los usuarios de otros OS.
- γ_i representa el efecto los usuarios de Linux tiene sobre los usuarios de otros OS.
- δ_i representa el efecto los usuarios de otros OS tiene sobre los usuarios de Windows, Mac y Linux.
- K_i representa la capacidad de carga del sistema para cada OS.

Al igual que la fórmula logística se adaptó para estimar la cantidad de computadoras en el tiempo, también es aplicable para calcular la tasa de crecimiento de usuarios de cada sistema operativo. La forma logística para este propósito se expresa como

$$y = \frac{2y_c}{1 + be^{ct_i}},$$

esta formulación permite modelar cómo la cantidad de usuarios de un sistema operativo evoluciona a lo largo del tiempo, tomando en cuenta las limitaciones de crecimiento y las condiciones del mercado.

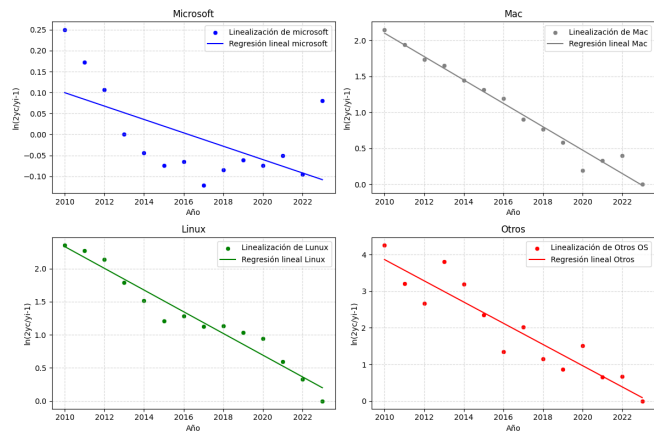


Figura 7: Regresión lineal para cada sistema operativo.

Para ajustar y modelar la curva logística de crecimiento de usuarios de sistemas operativos, se aplicarán técnicas de regresión. La regresión nos permitirá encontrar los parámetros b y c de la ecuación logística, que son fundamentales para determinar cómo se ha desarrollado la cantidad de usuarios de cada sistema operativo a lo largo del tiempo. Con estos parámetros, se puede obtener una estimación precisa de la tasa de crecimiento y proyectar la cantidad de usuarios en el futuro. Este proceso de regresión lineal ayudará a comprender mejor la dinámica de la competencia entre los sistemas operativos.

Con el fin de obtener detalles más específicos sobre el cálculo de estos parámetros y la aplicación de la regresión, se invita a revisar el código desarrollado en Colab, disponible en el siguiente [enlace](#). Google Colab proporciona una plataforma interactiva donde se puede explorar en detalle la metodología utilizada y realizar ajustes según sea necesario para una

comprensión más profunda del proceso de modelado. Este recurso adicional brinda transparencia y acceso directo a la implementación práctica de las técnicas de regresión empleadas en el análisis del crecimiento de usuarios de sistemas operativos, facilitando así la replicación y validación de los resultados presentados en este estudio.

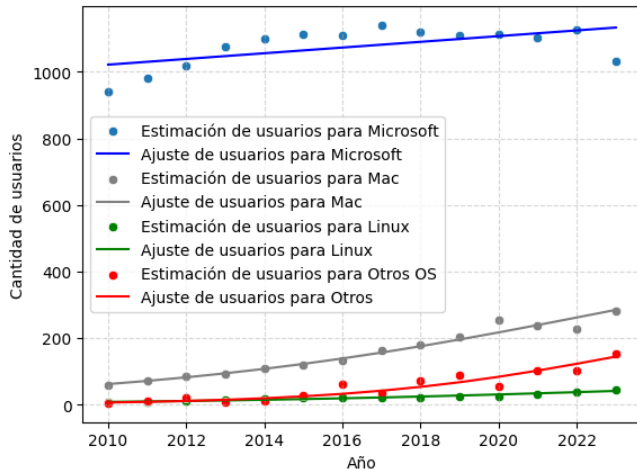


Figura 8: Estimación de usuarios para cada sistema operativo de acuerdo con los parámetros calculados.

Para determinar los parámetros (α_i , β_i , γ_i , δ_i y K_i) en el sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra adaptado, se tomaron como base las cuotas de mercado del último año registrado en los datos obtenidos. Esto significa que (α_i , β_i , γ_i , δ_i) se establecieron utilizando las cifras disponibles más recientes de cuotas de mercado para los sistemas operativos. Además, (K_i) se definió como el 66,2 % de la población mundial total. Estas decisiones permiten utilizar datos concretos y relevantes para calibrar el modelo y proporcionar estimaciones más precisas de la dinámica de competencia y colaboración entre los sistemas operativos a lo largo del tiempo. Es así como el modelo final con los parámetros redondeados a dos decimales es:

$$\begin{cases} \frac{dW}{dt} = 0,015W \left(1 - \frac{W+0,18M+0,03L+0,1O}{5296} \right), \\ \frac{dM}{dt} = 0,16M \left(1 - \frac{M+0,68W+0,03L+0,1O}{5296} \right), \\ \frac{dL}{dt} = 0,16L \left(1 - \frac{L+0,68W+0,18M+0,1O}{5296} \right), \\ \frac{dO}{dt} = 0,29O \left(1 - \frac{O+0,68W+0,18M+0,03L}{5296} \right). \end{cases}$$

El módulo "solve_ivp" de Python se emplea para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Esto resulta invaluable cuando no es viable obtener soluciones analíticas precisas, lo que es común en situaciones complejas. "solve_ivp" implementa métodos numéricos como el método de Runge-Kutta, que divide las ecuaciones diferenciales ordinarias EDO en pasos pequeños y calcula la solución

en cada uno de ellos. Al ejecutar el código con los parámetros adecuados, se obtiene la solución para el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias hasta el año 2030. Es fundamental destacar que estos parámetros pueden variar a lo largo del tiempo y no se tienen en cuenta factores complejos como la inversión de capital de las empresas y estrategias de marketing, que también influyen en la dinámica de usuarios de sistemas operativos. El enfoque aquí se basa en las tasas de crecimiento previamente calculadas.

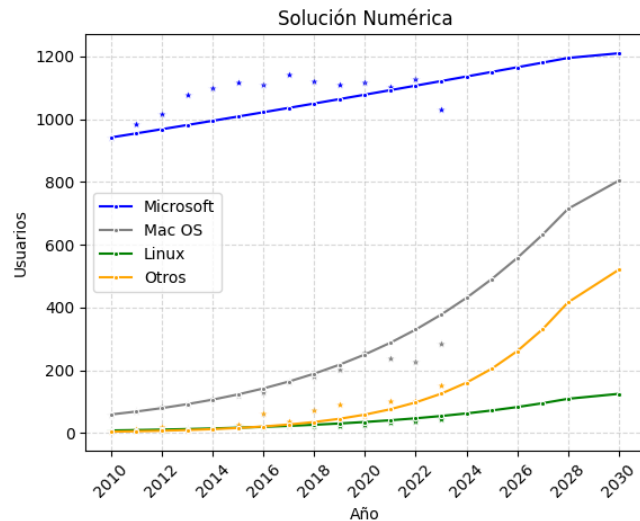


Figura 9: Solución numérica del sistema de ecuaciones Lotka-Volterra resultante.

3. Conclusiones

1. El proyecto demuestra cómo los modelos matemáticos, en particular el modelo Lotka-Volterra, pueden aplicarse en contextos no tradicionales, como la estimación de la cantidad de usuarios de sistemas operativos. Esta versatilidad de los modelos matemáticos permite abordar problemas complejos en diversas áreas.
2. El enfoque de utilizar la regresión lineal y modelos logísticos para estimar datos faltantes en el crecimiento de computadoras y, por ende, usuarios de sistemas operativos, resulta efectivo.
3. El proyecto destaca la influencia de la población mundial y la penetración de Internet en la demanda de sistemas operativos. La relación entre estos factores y la cantidad de usuarios de sistemas operativos subraya la importancia de considerar el entorno global al tomar decisiones en la industria tecnológica.
4. Las conclusiones obtenidas muestran que la combinación de modelos matemáticos y técnicas estadísticas puede ofrecer herramientas poderosas para

analizar y predecir fenómenos complejos en la evolución de sistemas tecnológicos.

5. La validación de los resultados mediante comparaciones con datos reales refuerza la confianza en la aplicación práctica de los modelos propuestos en este estudio.
6. Se concluye que la aplicación de modelos matemáticos avanzados no solo facilita la interpretación de tendencias en datos complejos, sino que también permite realizar proyecciones precisas y útiles para la toma de decisiones en el ámbito tecnológico.

Agradecimientos.

Agradecimientos especiales a la profesora Mariam Pinto Heydler por su dedicación y profundas enseñanzas en ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales han sido fundamentales para el desarrollo de este proyecto. Asimismo, agradecemos sinceramente al profesor Alexander Arredondo por su continua orientación y apoyo experto a lo largo de todo el proceso. Igualmente, nuestro reconocimiento al profesor Camilo Posada por compartir de manera generosa su vasto conocimiento y brindar valiosas perspectivas que enriquecieron este estudio.

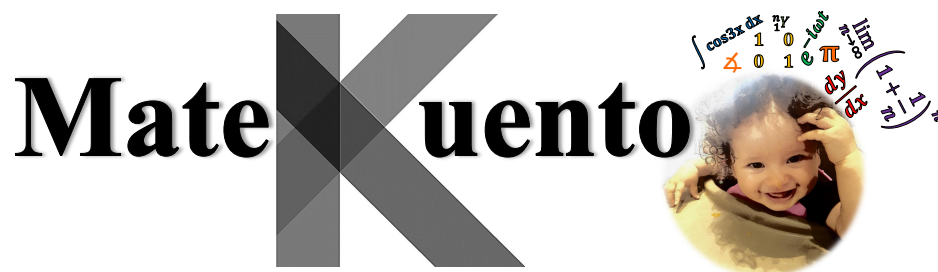
Además, queremos expresar nuestro más profundo agradecimiento al profesor Jaime Mora, cuyo apoyo incansable y enseñanzas han sido pilares fundamentales para la realización exitosa de este proyecto. Su compromiso y dedicación han sido invaluable en nuestros caminos de aprendizaje y desarrollo profesional.

Referencias.

- [Abr21] AbrirArchivos, *La cantidad de computadoras en el mundo: ¿cuántas hay?* (2021), <https://abrirarchivos.info/tema/la-cantidad-de-computadoras-en-el-mundo-cuantas-hay/>. Accedido: 2024-07-19.
- [Com12] Călin-Adrian Comes, *Banking System: Three level Lotka-Volterra Model*, *Procedia Economics and Finance* **vol. 3** (2012), 251-255, DOI [https://doi.org/10.1016/S2212-5671\(12\)00148-7](https://doi.org/10.1016/S2212-5671(12)00148-7).
- [RF23] Rosa Fernández, *Cuota de mercado mundial de los sistemas operativos para ordenadores de sobremesa de 2010 a 2022* (2023), <https://es.statista.com/estadisticas/634540/sistemas-operativos-para-pc-cuota-de-mercado-mundial/>. Accedido: 2024-07-19.
- [NF24] Noelia Fragueta, *El número de usuarios de internet en el mundo crece un 1,8% y alcanza los 5.350 millones (2024)* (2024), <https://marketing4ecommerce.net/usuarios-de-internet-mundo/>. Accedido: 2024-07-19.
- [SH11] Stefan Heinz, *Mathematical Modeling*, Springer Heidelberg Dordrecht, 2011.
- [LTW14] Ya-Lin Liu, Fang-Mei Tseng, and Hsiang-Hsun Wu, *Market penetration among competitive innovation products: The case of the Smartphone Operating System*, *Journal of Engineering and Technology Management* **vol. 32** (2014), 40-59, DOI <https://doi.org/10.1016/j.jengtecman.2013.10.002>.

- [ONU23] ONU, *Estado de la Población Mundial 2023: 8.000 millones de vidas, infinitas posibilidades, argumentos a favor de los derechos y libertades* (2023), <https://mexico.un.org/es/228596-estado-de-la-poblacion-mundial-2023-8000-millones-de-vidas-infinitas-posibilidades>. Accedido: 2024-07-19.
- [sta08] stats.areppim.com, *Personal Computers Forecast* (2008), https://stats.areppim.com/stats/stats_pcxfcst.htm. Accedido: 2024-07-19.
- [Tho11] Grahame Thompson, *Sources of Financial Sociability: Networks, Ecological Systems or Diligent Risk Preparedness?*, *CRESC Working Paper Series* **Vol. 98** (2011), DOI <https://doi.org/10.1080/17530350.2011.609699>.
- [WW16] Hsi-Tse Wang and Ta-Chung Wang, *Application of the grey Lotka-Volterra model to forecast the diffusion and competition analysis of the TV and smartphone industries*, *Technological Forecasting and Social Change* **vol. 106** (2016), 37-44, DOI <https://doi.org/10.1016/j.techfore.2016.02.008>.

Acerca de los autores: Jeisson es estudiante de matemáticas y emprendedor en proyectos de transporte, además, apasionado por el ajedrez y las matemáticas; su mente estratégica y su amor por los desafíos lo impulsan a buscar constantemente nuevas formas de innovar en su campo. Andersson es estudiante de matemáticas, le gusta practicar deportes, entre ellos se destaca más en ping pong, fútbol y baloncesto, le gusta mucho la programación y su deseo es fundar una empresa que desarrolle soluciones con matemáticas aplicadas, además de convertirlo en un instrumento educativo. Alberto es estudiante de ingeniería de sistemas con diplomados en big data y data analytics, tiene una amplia experiencia como científico de datos, actualmente se desempeña como analista de datos en la Bolsa Mercantil de Colombia y disfruta de los paisajes y una vida tranquila con sus seres queridos.



Huellas y Patrones: Un Crimen Familiar

En su propia casa, entre los ecos de sus risas pasadas y el perfume marchito de los recuerdos, yacían dos cuerpos inmóviles. La señora Davies, una dama que aparentaba estar en sus sesenta años, tenía una profunda herida en su cabeza que contaba una historia de violencia súbita, mientras que sus manos, ahora desprovistas de todos sus dedos, ofrecían un macabro testimonio de un tormento aún mayor. Su esposo, el señor Davies, tenía en su estómago la cruel daga del destino, que había drenado lentamente la vida de su cuerpo. Era la escena de una tragedia casi teatral, una estampa de dolor y misterio que solo el silencio podía narrar.

Los Davies vivían en la casa de la esquina de un pequeño vecindario. Desde hacía varios años, habitaban solos, disfrutando de una compañía mutua que muchos envidiaban. Su hogar, con sus paredes cubiertas de hiedra y su jardín floreciente, era un refugio de paz en un mundo a menudo caótico. Ellos eran muy queridos. Siempre tenían una sonrisa y una palabra amable para quienes pasaban por su puerta. La noticia de su trágico final se propagó como un incendio, llenando cada rincón del barrio con un aire de desconcierto y tristeza. Todos hablaban de lo sucedido. Las conversaciones eran un murmullo constante de conjeturas. Nadie podía imaginar qué terrible fuerza había roto la tranquila armonía de los Davies. La pregunta en cada mente era la misma: ¿qué oscuro secreto se había ocultado tras las cortinas de esa idílica casa?

El equipo forense se movía con precisión meticulosa, cada uno sabiendo exactamente su rol en esta escena del crimen. La señora Davies yacía en el suelo de la sala, con una mancha de sangre seca alrededor de su cabeza herida. El patrón de salpicaduras indicaba un golpe contundente, probablemente con un objeto pesado. El análisis preliminar del entorno sugería que el ataque había sido repentino y devastador, sin signos evidentes de lucha previa. El cuerpo del señor Davies se encontraba en la cocina, el cuchillo aún incrustado en su abdomen. La posición del arma, la profundidad de la herida y la dirección del corte proporcionaban valiosas pistas sobre la mecánica de la muerte. Los detectives intercambiaron miradas significativas, reconociendo los indicios de una posible lucha desesperada, una resistencia final ante lo inevitable. La cantidad de sangre derramada indicaba que había tardado en morir, lo cual añadía un matiz aún más sombrío a la escena. Realizaron la típica rutina de inspección. Tomaron fotografías desde ángulos diversos, capturando la tragedia en su totalidad. Examinaron minuciosamente cada rincón del hogar, desde las

perillas de las puertas hasta la encimera de la cocina, e incluso los vasos y cubiertos abandonados en la mesa. Buscaban con fervor huellas dactilares, fibras o cualquier pista que, en su sutilidad, pudiera haber escapado al ojo no entrenado.

Los vecinos no se atrevían a acercarse demasiado, pero se sentían irresistiblemente magnetizados por el enigma que envolvía la casa de los Davies. Las teorías comenzaban a surgir en susurros. Los detectives sabían que la verdad rara vez es simple. Cada evidencia debía ser cuidadosamente examinada, cada testimonio cruzado y corroborado. Pero había algo en la casa, una atmósfera palpable de amor perdido y sueños rotos, que les decía que esta historia era más compleja de lo que parecía. Y aunque la investigación apenas había comenzado, el peso del misterio se cernía sobre ellos con la gravedad de una verdad aún no revelada.

Los resultados no fueron más que una sinfonía de decepción: nada en las muestras sugería la presencia de un tercero en la escena del crimen. La sangre pertenecía exclusivamente a los desafortunados Davies, complicando aún más el enigma que envolvía su muerte. Las entrevistas a los vecinos comenzaron casi de inmediato. Uno por uno, los residentes del barrio desfilaron por la comisaría, sus testimonios impregnados de asombro y pesar. Todos coincidían en la misma narrativa, en que los Davies eran una pareja amable, querida por todos, sin enemigos aparentes. Nadie había visto ni oído nada sospechoso la noche del crimen. Las preguntas de los detectives, precisas y a veces insidiosas, no lograron arrancar ninguna pista reveladora de los entrevistados.

En paralelo, el análisis de las huellas dactilares levantadas de la escena fue exhaustivo, de modo que los investigadores se centraron en este material. Cada impresión fue comparada meticulosamente con las bases de datos criminales y, más importante aún, con las huellas de aquellos que tenían acceso regular a la casa. Los vecinos que solían visitar a los Davies fueron todos interrogados y sus huellas fueron cotejadas. Sin embargo, cada una de las huellas encontradas correspondía a personas que fueron rápidamente descartadas como sospechosas, todas con coartadas sólidas y sin motivos para cometer tal atrocidad. Las cámaras de seguridad en la calle no ofrecían mayor esperanza. Los vídeos revisados no mostraban nada inusual, ninguna figura sospechosa entrando o saliendo de la casa de los Davies en el período crítico.

Parecía que el asesino había desafiado todas las probabilidades, había cometido un crimen perfecto, uno que desafiaba

la lógica y la experiencia de los investigadores. Había una precisión casi quirúrgica en la ejecución del crimen, una planificación que sugería un conocimiento profundo de cómo evitar dejar rastros detectables. El único dato que consideraron valioso fue el testimonio de un vecino que relató que los Davies tenían una hija, cuyas visitas eran tan esporádicas como las lluvias en un verano, que había hecho su aparición en el vecindario solo en contadas ocasiones, hace más de cinco años no la habían vuelto a ver y que de hecho, ellos ni siquiera sabían cuál era su nombre.

Los investigadores, movidos por la determinación de aquellos que buscan lo inalcanzable, recurrieron a las vastas y enigmáticas bases de datos genéticas, para encontrar información que les condujera a contactar a la hija de los Davies. Sin embargo, esto también era un desafío, primero porque solo contaban con las huellas del señor Davies, y segundo, porque entre los múltiples impedimentos que obstruían el camino de los detectives, uno de los más irónicos y desalentadores era la pérdida de la base de datos genética global ocurrida hace un par de años, una consecuencia ineludible del apagón eléctrico a raíz de un desabastecimiento energético que, en una sombra global, había sumido al mundo en un oscuro letargo tecnológico. Esta catástrofe había arrastrado consigo un vasto tesoro de información genética, dejando a los detectives en una situación de inquietante desamparo. Desde entonces, se habían embarcado en una tarea monumental para reconstruir esta invaluable red de datos, un esfuerzo que, aunque arduo, había avanzado con una pasión casi heroica durante el último año.

En un giro que podría considerarse casi providencial en medio de esta penumbra, la necesidad de rehacer la base de datos coincidió con el surgimiento de un nuevo proyecto en el Laboratorio de Dactiloscopia y Genética, donde un grupo de científicos habían logrado lo que parecía un milagro moderno: la capacidad de unir huellas dactilares a perfiles genéticos con una precisión que bordeaba lo prodigioso.

Así, en lugar de sucumbir a la desesperanza de una investigación aparentemente sin salida, los detectives se lanzaron con renovado fervor a una meticulosa tarea de recopilación de huellas dactilares de toda alma que pudiera estar relacionada con los Davies. Cada impresión capturada fue analizada con el fervor de quien busca una aguja en un pajar. Además de cotejar las huellas contra las bases de datos tradicionales, las enviaron también a este nuevo y prometedor proyecto. Por primera vez en la historia de la criminología, un crimen aún bajo investigación y lejos de ser resuelto sería objeto de estudio en el marco del nuevo proyecto del laboratorio. La esperanza de que esta nueva técnica pudiera ofrecer un destello de claridad en medio del caos los impulsó a proceder con una combinación de pragmatismo y optimismo.

En términos resumidos, el estudio había demostrado que, aunque se sabe que cada huella dactilar es única en su individualidad, el patrón del dedo pulgar poseía una característica geométrica singular que permitía identificar a los familiares de primer grado. El proceso de identificación se centraba en el análisis meticuloso de las distancias entre el núcleo del patrón dactilar y cada una de las bifurcaciones presentes en la hue-

lla, sin importar si el tipo de huella es arco, presilla interna, presilla externa o verticilo.



Figura 1: Estructura de la huella y tipos de minucias^a.

^aSánchez, R. (2002). Verificación automática de personas mediante huella dactilar. Revista de Ciberseguridad, Seguridad de la Información y Privacidad. Vol. 30.

Para ello, se toma la huella del dedo pulgar representada en un sistema de coordenadas cartesianas. En este sistema, se identifican el núcleo del patrón (centro de la huella) y las bifurcaciones del patrón que emergen desde dicho núcleo. Para cada bifurcación B_i (donde i denota la i -ésima bifurcación), se calculan las distancias d_i entre el núcleo y B_i . Esto se formaliza como:

$$d_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2},$$

siendo (x_0, y_0) las coordenadas del núcleo y (x_i, y_i) las coordenadas de la bifurcación B_i .

Se continúa organizando las distancias d_i en orden ascendente $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, donde d_n es la n -ésima distancia en orden creciente.

Finalmente, se procede a calcular los ratios entre cada par consecutivo de distancias d_{i+1} y d_i :

$$r_i = \frac{d_{i+1}}{d_i}.$$

Al calcular las distancias y los ratios para las huellas del dedo pulgar de cada miembro de la misma familia, los ratios pares deben coincidir con los ratios pares de la madre y los impares, con los del padre, con un porcentaje de error menor o igual al 1%. Esto demuestra que cada familiar de primer grado comparte no solo el lazo sanguíneo, sino también una firma numérica común, un rasgo distintivo que los une más allá de la mera biología. Un código numérico que define su identidad intrínseca de manera inconfundible. Como la firma de una familia en el gran lienzo de la existencia.



Figura 2: Huella del pulgar derecho del señor Davies (izquierda) y de su hija (derecha)^a.

^aTomado de <https://es.vecteezy.com/miembros/victoriaartwork>.

Tras analizar millones de huellas, hubo una huella en particular que al ser comparada meticulosamente con la huella del señor Davies, exhibía una serie numérica que cumplía con la propiedad previamente descrita. Las primeras cinco distancias de las huellas del señor Davies y su hija eran:

Distancia	Señor Davies	Hija Davies
d_1	0,154 mm	0,153 mm
d_2	0,272 mm	0,271 mm
d_3	0,378 mm	0,379 mm
d_4	0,451 mm	0,450 mm
d_5	0,598 mm	0,599 mm

Con estos números, las ratios para el señor Davies fueron $r_1 \approx 1,766, r_2 \approx 1,390, r_3 \approx 1,193, r_4 \approx 1,326$, y las ratios para la hija fueron $r_1 \approx 1,772, r_2 \approx 1,400, r_3 \approx 1,187, r_4 \approx 1,331$; con un porcentaje de error promedio entre ambas secuencias de aproximadamente 0,42 %.

Armados con esta confirmación, los detectives se dispusieron a contactar a la dueña de esta huella, la señorita Arabella Davies, la hija distante y equidistante del señor y la señora Davies. La conversación, como un delicado baile de palabras y emociones, comenzó con la pesada revelación de la desgarradora noticia. Arabella, cuyo rostro reflejaba una mezcla de asombro y dolor, escuchó en silencio la cruda verdad del destino que había alcanzado a sus padres.

La señorita Davies, conmovida por la devastadora noticia, escuchó atentamente mientras los detectives le explicaban el método y la significancia de la coincidencia en las huellas dactilares. Aunque sus recuerdos sobre la vida de sus padres en los últimos años eran vagos debido a la pérdida de contacto, accedió a proporcionar cualquier información que pudiera ayudar en la resolución del caso. Relató los últimos intercambios que tuvo con sus padres y ofreció detalles sobre las personas que podrían haber estado en contacto con ellos.

Al final de la conversación, y con un tono de voz que delataba una incomodidad latente, Arabella confió un detalle oscuro que había estado oculto bajo el manto de la distancia familiar. - Mis padres, como ya les he dicho, - comenzó Arabella con un tono melancólico, - no eran simplemente dos seres queridos en la tranquilidad de su hogar. Había otro hijo, un

hijo que, a pesar de vivir en la misma ciudad, se mantenía en las sombras de nuestra existencia familiar -. Su voz titubeaba entre el dolor y la resolución. - Su nombre es Edmund. No sé si ustedes han hablado con él, pero les aseguro que tiene una presencia que habla por sí sola -.

Los detectives intercambiaron miradas incrédulas, el rostro de uno de ellos palideció levemente. La revelación era una grieta en el tejido meticulosamente tejido de su investigación. - Edmund Davies, - repitió uno de ellos en su cabeza mientras pensaba, - en nuestros registros de genética y huellas dactilares, no encontramos rastro alguno que lo vinculara a los Davies. ¿Cómo es posible? -.

Arabella, con una mezcla de angustia y resignación, continuó, - Mis padres y Edmund compartían un vínculo que rozaba la crueldad disfrazada de afecto. Él se caracterizaba por ser una persona de una agresividad perturbadora, sabía cómo manipular sus corazones para que no vieran la realidad de su comportamiento, y eso le permitió usar su habilidad para lograr que mis padres vivieran en una burbuja de ilusiones doradas; -. Añadió, - no puedo evitar sospechar que su presencia, su conocimiento y su innegable influencia, podrían estar relacionados con esta tragedia -.

Los detectives se sumieron en un profundo silencio, meditando sobre la complejidad de la revelación. Arabella, con la mirada distante y el tono cansado, proporcionó a los detectives toda la información que poseía sobre este sujeto. Les habló de su nombre completo, su dirección, su historial y lo último que supo de él. Los detectives, ahora armados con un arsenal de datos sobre Edmund, se pusieron a la tarea de buscar en la vasta base de datos de huellas dactilares. La búsqueda reveló que la huella de Edmund estaba efectivamente registrada, una coincidencia inquietante en el mar de información, porque esa base de datos ya había sido analizada. Sin embargo, al comparar la huella de Edmund con la del Señor Davies, la confusión se instaló como una niebla espesa. Las ratios de las huellas, esos números que debían revelar la verdad, presentaban un enorme porcentaje de error promedio del 7.62 %, pues las ratios de Edmund eran $r_1 \approx 1,633, r_2 \approx 1,471, r_3 \approx 1,285, r_4 \approx 1,254, \dots$

Los detectives se miraron unos a otros con un desconcierto palpable. La huella de Edmund no solo no coincidía con la del Señor Davies, sino que sus ratios eran abrumadoramente diferentes. Las huellas dactilares, que se suponían eran un rastro infalible hacia la verdad, en este caso, parecían más un laberinto que una guía.

La posibilidad de que Arabella pudiera haber fabricado una historia para desviar la atención de los investigadores comenzó a emerger en sus mentes. ¿Podría ser que la distancia entre ella y sus padres no era un simple distanciamiento familiar, sino un pretexto para ocultar sus propias acciones? La falta de testigos en el vecindario sobre su vida y la aparente desintegración de su relación con sus padres empezaron a despertar sospechas. Los detectives, inmersos en la sombra de la duda, se preguntaron si Arabella no estaba construyendo una narrativa en la que ella misma era la víctima, escondiendo una verdad aún más siniestra.

Fue así como Arabella, fue arrestada bajo la sospecha de ser la instigadora del horror en la casa de los Davies. A pesar de sus protestas de inocencia y de su insistencia en la veracidad de su historia sobre Edmund, los oficiales no podían ignorar el torbellino de sospechas que se había desencadenado. Arabella, mientras tanto, fue confinada en una celda fría y austera, donde el trato que recibió fue tan cruel como la misma tragedia que la rodeaba.

Sin embargo, en medio del desmoronamiento de las certezas y del tedio de la investigación, uno de los peritos forenses que había estado presente en la escena del crimen recordó un detalle inquietante. La señora Davies había sido encontrada sin dedos en sus manos, una aberración que había sido notada pero que había sido olvidada. Este perito, impulsado por una mezcla de intuición y una mente aguda, propuso una teoría inquietante. Tal vez, el motivo detrás de la mutilación de los dedos de la señora Davies no era solo un acto de crueldad gratuito. Sugirió que la ausencia de los dedos podía haber sido una estrategia de Edmund Davies, el hermano del que Arabella había hablado, para evitar que las huellas de la víctima pudieran ser asociadas con él.

El razonamiento era perturbador en su simplicidad, pues al mutilar los dedos de su madre, Edmund habría impedido que las huellas dactilares pudieran ser utilizadas para conectar el crimen con él. Era como si él hubiera orquestado una danza macabra en la que las huellas de la señora Davies se convirtieran en un enigma sin solución, borrando así cualquier rastro que lo pudiera incriminar. Pero se le pasó un detalle por alto, (o tal vez no había terminado su plan), y era que su hermana aún seguía viva.

Un giro aún más oscuro se avecinaba.

Procedieron a capturar a Edmund. Se presentó ante ellos con una fachada de sorprendente calma y una sonrisa que parecía destinada a iluminar las sombras de la desdicha. Le informaron sobre la trágica muerte de sus padres. - No sé de qué me hablan - exclamó con una voz que parecía cargada de genuina incredulidad. - Yo no conozco a esos señores -. Sin embargo, su actitud era de una teatralidad tan calculada que casi parecía un monólogo de tragedia griega.

Los detectives, no obstante, no se dejaron engañar por la apariencia de ingenuidad de Edmund. Procedieron con una serie de interrogatorios, empleando técnicas de presión. Las preguntas se lanzaron como dardos, cada una diseñada para desentrañar alguna grieta en su historia. Se le preguntó sobre su paradero en el momento del crimen, sobre sus relaciones con los padres, y sobre cualquier detalle que pudiera arrojar luz sobre su posible implicación. A medida que las preguntas se volvían más incisivas, Edmund mantenía una postura de firmeza, pero sus respuestas, cuidadosamente formuladas, no lograban disipar la sospecha que pesaba sobre él.

El avance en la investigación llegó cuando los detectives volvieron a analizar la huella dactilar de Edmund. En su búsqueda dentro de la vasta base de datos, encontraron una huella que no había sido relacionada previamente con ninguna otra, y que presentaba unas ratios pares muy similares a los de Edmund y Arabella. Esta huella pertenecía a una mujer de se-

venta y tres años, cuyos datos biométricos coincidían con los de la señora Davies, pero el problema persistía: los dedos mutilados de la señora Davies habían dificultado la confirmación definitiva. Al comparar las ratios pares entre la huella encontrada en la base de datos ($r_1 \approx 1,643$, $r_2 \approx 1,493$, $r_3 \approx 1,274$, $r_4 \approx 1,254$, ...), la huella de Arabella y la de Edmund, pudieron corroborar que sus porcentajes de error eran del 0.85 % para la huella de Arabella y 0.73 % para la huella de Edmund, lo que confirmaba cada vez más la teoría del perito.



Figura 3: Huella del pulgar derecho de Edmund Davies.

Desesperados por pruebas concluyentes, los detectives regresaron a la escena del crimen. Allí, tomaron muestras de huellas de otras superficies, buscando cualquier rastro que pudiera haber sido pasado por alto. Su perseverancia fue recompensada cuando las huellas encontradas en varios objetos de la casa coincidieron con la huella sin identificar de la base de datos. Así, confirmaron que la mujer de la huella no identificada era, en efecto, la señora Davies.

Pero el descubrimiento más sorprendente estaba aún por llegar. Como ya tenían las ratios de la huella de Edmund, encontraron en la base de datos una que coincidía muy bien con las ratios impares de una huella que estaba vinculada a un convicto conocido, un hombre que había sido encarcelado por robo con violencia y que, a juzgar por su edad, daba indicaciones de que podría ser el verdadero padre de Edmund, y no el señor Davies. Este hallazgo estaba comenzado a revelar una red de relaciones y secretos ocultos.

Con estas pruebas irrefutables, Edmund se vio acorralado. Ya no había margen para la actuación ni para las negaciones teatrales. Ante la montaña de evidencias que se levantaba en su contra, Edmund no tuvo otra opción que confesar su crimen. Aceptó cooperar con la esperanza de que su sentencia fuera más llevadera. Sin embargo, nunca reveló las motivaciones oscuras que lo llevaron a asesinar a los señores Davies, dejando a todos con una sensación de incompletitud y un interrogante que seguiría acechando las mentes de aquellos que alguna vez sufrieron o contemplaron la oscuridad de su alma.

Leidy Catherine Sánchez Ascanio

leidyc.sancheza@konradlorenz.edu.co

Acerca de la autora: Leidy es ingeniera industrial y matemática. Es una amante de las novelas policíacas y del mundo profesional del crimen. Actualmente se encuentra trabajando como Model Validation Manager en ScotiaGBS del grupo Scotiabank.

PASKÍN-CHALLENGE

CONCURSO PARA ESTUDIANTES DE COLEGIO

Un recorrido óptimo por el centro de Bogotá

Una turista visita Bogotá con el objetivo de conocer el centro de la ciudad. Después de leer en internet sobre la ciudad, creó la siguiente lista de lugares que quería conocer, e incluyó el tiempo que deseaba permanecer en cada uno:

- La Plaza de Bolívar (45 minutos).
- El Museo del Oro (6 horas).
- La terraza de la Torre Colpatria (30 minutos).
- La plaza de la Perseverancia (2 horas).
- La exposición del Museo Botero (6 horas).
- La Biblioteca Luis Ángel Arango (7 horas).
- El cerro de Monserrate (5 horas).
- El Museo Nacional (6 horas).
- El Museo de Arte Moderno (150 minutos).

La turista se hospedará en el Hotel Tequendama, ubicado en la Carrera 10 # 26-21. Estando ahí, planea iniciar su recorrido a los lugares de interés a las 8:00 a.m. Después, almorzará todos los días entre las 12:00 y la 1:00 p.m., continuará su recorrido y regresará al hotel máximo a las 5:00 p.m. Dado que la turista realizará todos los recorridos caminando, consideraremos que se desplazará a una velocidad constante de 4.5 km/hora.

Con el objetivo de conocer todos lugares en el menor tiempo posible, ¿qué lugares deberá conocer cada día y en qué orden?

Para resolver el problema tenga en cuenta la siguiente información:

- El objetivo consiste en diseñar un cronograma detallado que minimice lo más posible el tiempo que la turista está por fuera del hotel.

- Para los recorridos podrá utilizar cualquier camino entre la carrera décima (sobre la que está ubicado el hotel) y la carrera segunda este (sobre la que está ubicada la entrada al cerro de Monserrate), así como entre las calles 31 (sobre la que está ubicada la Plaza de la Perseverancia) y la calle 11 (sobre la que está ubicada el inicio de la Plaza de Bolívar).

- Utilice la aplicación Google Maps para diseñar el mapa que la turista utilizará.

- No se deben considerar tiempos de desplazamiento para almorzar ni buscar restaurantes, ya que la turista almorzará siempre en alguna de las atracciones turísticas. Almorzar se puede hacer antes, durante o después de una visita. En cualquier caso, esa hora de almuerzo no se debe incluir como el tiempo de visita a un sitio.

- La turista puede regresar al hotel en cualquier momento del día, pero nunca después de las 5 pm. Por eso, el cronograma detallado de su visita debe también considerar los tiempos que toman los desplazamientos.

- Los tiempos de cada desplazamiento se deben redondear hacia abajo. Por ejemplo, si ir del punto A al punto B toma 3 minutos y 45 segundos, entonces se considera que el tiempo del desplazamiento es de 3 minutos.

- Cada lugar debe visitarse en un solo día y de manera continua. Por ejemplo, si la visita al sitio A es de 5 horas, la turista no puede pasar 3 horas un día y luego 2 horas otro día. El almuerzo, sin embargo, puede interrumpir la visita y es el único caso en el cual la visita a un sitio no es continua.

Bases del Concurso:

Elegibilidad:

Estudiantes menores de 18 años, de cualquier nacionalidad y pertenecientes a un colegio colombiano.

Duración:

El concurso finaliza un año después de la publicación del Paskín que presenta el problema, o hasta que haya una persona ganadora.

Documento Solución:

La solución debe presentarse de manera individual en un documento formal, escrito en español, en el que se explique de manera detallada la solución al problema planteado.

La primera página del documento debe contener por lo menos los siguientes seis elementos:

- (1) El nombre completo de la persona participante.
- (2) El curso de la persona participante.
- (3) La edad de la persona participante.
- (4) El nombre completo del colegio de la persona.
- (5) Municipio o ciudad de residencia.
- (6) Teléfono y correo electrónico de contacto.

El cuerpo del documento, que sigue a esta primera página, puede tener cualquier extensión para informar sobre la solución.

Los y las participantes pueden usar libros, blogs, computadores, internet, programas computacionales, pero no pueden consultar o interactuar con ninguna otra persona durante la solución. Ninguna contribución puede ser hecha por otra persona que no sea la persona que envía la solución.

Aunque los problemas estarán destinados a un análisis teórico, los participantes pueden realizar experimentos relevantes y presentar los datos resultantes en su trabajo si lo desean.

En caso de que se utilicen, cada solución debe incluir una lista de todas las referencias.

Las soluciones pueden usar algoritmos y herramientas computacionales existentes (que incluyen no solo herramientas disponibles gratuitamente, sino también herramientas dentro de sistemas como Matlab o Mathematica), siempre que se mencionen y citen correctamente y los métodos se expliquen claramente en la solución del problema. Cualquier código de programación, si se escribió uno, debe incluirse como un apéndice de la solución. Sin embargo, todos los algoritmos, métodos y resultados deben explicarse en el texto principal del documento para recibir consideración durante la evaluación.

Las soluciones enviadas pueden incluir ecuaciones, gráficos, figuras y tablas. Cada solución debe incluir como mínimo:

- (1) Una corta introducción del problema, tal como lo interpretó la persona participante.
- (2) Una explicación de todas las suposiciones y aproximaciones realizadas.
- (3) Justificación de todo el trabajo realizado.
- (4) Una breve discusión de las fortalezas y debilidades del enfoque adoptado.

Envío de la solución:

Las soluciones pueden enviarse como archivos .pdf, .odf, .doc o docx. Cada participante debe enviar su solución por correo electrónico a paskin@konradlorenz.edu.co y los documentos deben recibirse antes de que finalice el concurso. Si la solución no se recibe por correo electrónico durante la duración del concurso, la solución no será considerada. El documento completo debe incluirse como un archivo adjunto al correo electrónico. No envíe un enlace al documento en un servicio en la nube como Google Docs, Dropbox, etc. Una vez recibida la solución se le notificará la recepción en un plazo menor a cinco días hábiles. Si Ud. no recibe confirmación, comuníquese con el editor de la revista.

Resultados:

Toda solución recibida se irá evaluando en orden de llegada hasta la finalización del concurso. Cuando una solución sea correcta, la o el participante será invitada o invitado a exponer y justificar de manera verbal su solución de manera remota sincrónica utilizando alguna plataforma virtual como Teams, Zoom o Google Meets.

Premiación:

- La primera solución correcta será publicada en una siguiente edición del Paskín. Será una versión simplificada de la solución realizada en colaboración con el comité editorial, que incluirá una corta reseña de la persona ganadora.
- Certificado. Cada persona que participe y presente una solución correcta recibirá un certificado. El certificado se enviará por correo electrónico a la dirección utilizada para el envío de la solución. Espere varias semanas después de enviar su solución para recibir su certificado.
- La persona que envíe la primera solución correcta recibirá un bono virtual de regalo por un valor de **500.000 COP** (quinientos mil pesos colombianos). La persona ganadora puede escoger el establecimiento comercial que desee, siempre y cuando ofrezca bonos electrónicos y el comité editorial pueda adquirirlos.

Política Editorial

El Paskín Matemático es una producción del Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Está abierto a todos y todas. Si tienes interés en escribir un artículo con cualquier tipo de contenido matemático, reseñar a un personaje, comentar un problema o tienes comentarios sobre nuestra publicación, envía un mensaje a paskin@konradlorenz.edu.co

$$H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

El Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz fue creado en 1998. Conoce más acerca de nuestro programa en nuestra página institucional

<https://www.konradlorenz.edu.co/programas/matematicas/>

Bogotá, Colombia. 2024

PASKÍN MATEMÁTICO

Volumen 6, No. 2, 2024

Contenido

- Juan Pablo Hernández Rodas
La trascendentalidad de π 1
- Juan Camilo Buitrago Cruz y Gonzalo Medina
Homomorfismos entre cuádruplas indescomponibles-Caso preinyectivo
..... 8
- Adolfo Margain y Abimael Bengochea
Órbitas periódicas en problemas de n -cuerpos 17
- Jeisson Cruz Amaya, Andersson Hincapié Amaya y Alberto Arias Guzmán
Dinámica de competencia entre sistemas operativos: un enfoque Lotka-
Volterra 22
- Leidy Catherine Sánchez
MateKuento..... 30
- John A. Arredondo y Alejandro Cárdenas
Paskín Challenge 34

*La esencia de las matemáticas reside en el estudio
exacto de los bordes de la negación.*

Fernando Zalamea

