



e-ISSN
2665-2471

PAS XIN MATEMÁTICO

 **KONRAD
LORENZ**
FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

Vol. 6
No. 1

$\sin \frac{3}{4}$

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$V + E + F = 2$$

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

$$\frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^2 - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)2x^2}}{2}$$

$$f(x) \sim \frac{\alpha \pi}{2}$$

$$(x) = \frac{d}{3}$$

$$m \cdot S/2$$

$$\frac{x_A + x_C}{2}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot [\text{Adj}(A)]^t$$

$$n! = \prod_{k=1}^n k$$

$$\sqrt{x^2 - x} - x^2$$

$$\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$y^3$$

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$(x) = d$$

$$\sum_{n=1}$$

$$\sqrt[3]{a^4}$$

$$m=S$$

PASKÍN MATEMÁTICO

<https://editorial.konradlorenz.edu.co/paskin-matematico.html>

e-mail: paskin@konradlorenz.edu.co

Editor

John A. Arredondo

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co

Comité Editorial

Ruth Alejandra Torres

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
rutha.torresr@konradlorenz.edu.co

Julián Jiménez Cárdenas

Universidad de los Andes
jo.jimenezc1@uniandes.edu.co

Camilo Ramírez Maluendas

Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales
camramirezma@unal.edu.co

Andrés Mauricio Rivera

Pontificia Universidad Javeriana
Sede Cali
amrivera@javerianacali.edu.co

Leidy Catherine Sánchez

ScotiaGBS del grupo Scotiabank
leidy.sanchez@scotiabank.com

Jesús Muciño

Centro de Ciencias Matemáticas UNAM-Morelia
muciray@matmor.unam.mx

Esta publicación puede ser difundida y reproducida con fines académicos y científicos por todos aquellos que tengan a bien hacer un correcto uso de su contenido.

ISSN 2665-2471

Fundación Universitaria Konrad Lorenz: Tel: (57 1) 347 23 11, Carrera 9 Bis No. 62- 43 Bogotá – Colombia, email: info@konradlorenz.edu.co. **Carácter académico:** Institución Universitaria. Personería Jurídica por Resolución 18537 del 4 de noviembre de 1981 del Ministerio de Educación Nacional. Institución de Educación Superior sujeta a inspección y vigilancia por el Ministerio de Educación Nacional (Art. 2.5.3.2.10.2, Decreto 1075 de 2015).

MATEMÁTICA

EN ESTE NÚMERO

*

- Juan Camilo Buitrago Cruz y Gonzalo Medina
- Espacios de homomorfismos entre cuádruplas - pág. 1
- Daniel Arias Mutis
- Introducción a los origamis matemáticos y el paso de un origami plano a un origami en papel esférico - pág. 11
- Samuel Alberto Luna A.
- Curvas que rellenan el espacio y su uso en el análisis de imágenes digitales - pág. 25
- Liliana González
- Azar: algunas huellas de su constitución histórico-cultural - pág. 34
- Leidy Catherinne Sánchez Ascanio
- MateKuento - pág. 45
- John A. Arredondo y Alejandro Cárdenas
Paskín Challenge - pág. 48

ESPACIOS DE HOMOMORFISMOS ENTRE CUÁDRUPLAS INDESCOMPONIBLES

Juan Camilo Buitrago Cruz y Gonzalo Medina*
jbuitragocr@unal.edu.co, gmedinaar@unal.edu.co

Resumen

En este trabajo utilizamos una útil relación entre la categoría de representaciones de la tetrada y la categoría de representaciones de un cierto carcaj asociado, que nos permite aplicar técnicas de álgebra lineal en la obtención explícita de los espacios de homomorfismos entre los tipos de representaciones indecomponibles correspondientes a la componente postproyectiva del carcaj de Auslander-Reiten asociado al problema de los cuatro subespacios.

1. Introducción

El clásico Problema de los Cuatro Subespacios consiste en obtener la clasificación completa, salvo isomorfismo, de cuatro subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo. El problema fue planteado, e inicialmente resuelto por Gelfand y Ponomarev, en [GP70]. Otras soluciones fueron dadas en [Naz67, Naz75], [Bre67, Bre74a], [MZ04] y [For08]. En [Med23] se encuentra una descripción detallada del problema y de su importancia. Además de clasificar las colecciones de cuatro subespacios, es también importante clasificar los morfismos entre estas colecciones. En [Bre67, Bre74a, MZ04] se presenta la clasificación de las álgebras de endomorfismos asociadas a las colecciones indecomponibles y en [For08, Sim92] se obtienen los espacios de homomorfismos entre ciertas colecciones usando técnicas de la teoría de Auslander-Reiten.

Nuestro trabajo involucra las componentes postproyectiva y preinyectiva del carcaj de Auslander-Reiten asociado al problema de los cuatro subespacios; en estas componentes existe un único, salvo isomorfismo, objeto indecomponible por cada vector de dimensión y un único morfismo irreducible entre los objetos. Vamos a considerar aquí la componente postproyectiva y, aplicando técnicas de álgebra lineal, obtendremos explícitamente los espacios de homomorfismos entre los diferentes pares de tipos de representaciones indecomponibles para los cuales existe un único morfismo irreducible.

La estructura del presente artículo es la siguiente: en la sección ?? presentamos las definiciones, notaciones y resultados fundamentales de las dos categorías principales que vamos a considerar. En la sección 3 calculamos explícitamente

la forma que tienen los espacios de homomorfismos entre los objetos indecomponibles correspondientes a la componente postproyectiva del carcaj de Auslander-Reiten asociado a la tetrada.

2. El problema de los cuatro subespacios y su carcaj asociado

En esta sección presentamos las nociones básicas sobre las cuádruplas indecomponibles, la categoría de carcajes y el carcaj de Auslander-Reiten asociado a una categoría; adicionalmente, establecemos la relación entre las cuádruplas y las representaciones indecomponibles de su carcaj asociado.

2.1. El problema de los cuatro subespacios

Definición 2.1. Dado un campo k , una colección $U = (U_0, U_1, \dots, U_4)$, en donde U_0 es un espacio vectorial de dimensión finita sobre k y $U_1, \dots, U_4$ son cuatro subespacios de U_0 se denomina **cuádrupla de subespacios**. Un **morfismo** $\phi: U \rightarrow V$ entre dos cuádruplas $U = (U_0, U_1, \dots, U_4)$ y $V = (V_0, V_1, \dots, V_4)$ es una transformación lineal $\phi: U_0 \rightarrow V_0$ tal que $\phi(U_i) \subseteq V_i$, para todo $i \in \{1, \dots, 4\}$. El conjunto

$$\text{Hom}(U, V) = \{f \mid f: U \rightarrow V \text{ es morfismo}\}$$

tiene estructura natural de k -espacio vectorial con la suma y el producto por escalar usuales; $\text{Hom}(U, V)$ se denomina el **espacio de homomorfismos de U en V** .

Dos cuádruplas U y V se denominan **isomorfas** si existe un isomorfismo lineal $\phi: U_0 \rightarrow V_0$ tal que $\phi(U_i) = V_i$, para todo $i \in \{1, \dots, 4\}$; en este caso, escribimos $U \simeq V$. La **suma directa** de dos cuádruplas $U = (U_0, U_1, \dots, U_4)$ y $V = (V_0, V_1, \dots, V_4)$ es la cuádrupla $U \oplus V$ dada por

$$U \oplus V = (U_0 \oplus V_0, U_1 \oplus V_1, \dots, U_4 \oplus V_4).$$

Una cuádrupla U se dice **indecomponible** si $U \simeq V \oplus W$ implica $V = 0$ o $W = 0$ (aquí, 0 denota la cuádrupla nula en la que todos los espacios vectoriales son el espacio trivial 0). La **dimensión** de una cuádrupla $U = (U_0, U_1, \dots, U_4)$ es el vector $d = \dim U = (d_0, d_1, \dots, d_4)$, en donde $d_i = \dim_k U_i$, para todo $i \in \{0, \dots, 4\}$.

*Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales

Tomando entonces las cuádruplas como objetos y los morfismos entre cuádruplas como morfismos, obtenemos una categoría que denotaremos $\text{rep}(\mathcal{T}, k)$. Esta categoría es una categoría de Krull-Schmidt (ver, por ejemplo, [Med23, capítulo 2]).

Ya que estamos considerando espacios vectoriales de dimensión finita, podemos hacer uso del lenguaje matricial:

Definición 2.2. Si se escogen una base para U_0 y bases para cada uno de los subespacios $U_i \subseteq U_0$, entonces una cuádrupla U admite una **presentación matricial** M_U , que es una matriz por bloques

$$M = M_U = \begin{bmatrix} M_1 & \dots & M_4 \end{bmatrix},$$

en donde el número de filas de M es igual a d_0 y, para todo $i \in \{1, \dots, 4\}$, el número de columnas del bloque M_i es igual a d_i ; las columnas de cada bloque M_i son las coordenadas de los vectores de la base escogida para U_i , con respecto a la base principal de U_0 (si $U_i = 0$, entonces el bloque correspondiente se deja vacío).

Teniendo en cuenta los posibles cambios de bases para los espacios, es claro que dos cuádruplas U y V son isomorfas si y solo si dos de sus presentaciones matriciales asociadas M_U y M_V son **equivalentes** en el sentido de que una de ellas puede convertirse en la otra utilizando un número finito de las siguientes transformaciones admitidas:

- TA1 operaciones elementales por filas de toda la matriz M .
- TA2 operaciones elementales por columnas dentro de cada bloque M_i .

El problema de los cuatro subespacios consiste en obtener la clasificación completa, salvo isomorfismo, de todas las cuádruplas indescomponibles. Para el objetivo de nuestro trabajo, resulta particularmente útil la forma matricial en que está presentada la solución al problema de los cuatro subespacios (ver [MZ04, apéndice, págs. 22 y 23]).

Nota 1. En un contexto más general, las definiciones que hemos dado (cuádrupla, vector de dimensión, morfismo entre cuádruplas, isomorfismo entre cuádruplas, suma directa, cuádrupla indescomponible, presentación matricial) pueden extenderse a colecciones de subespacios de un k -espacio vectorial, sujetas a ciertas condiciones y asociadas a un conjunto parcialmente ordenado finito arbitrario $(\mathcal{P}, \leq)$ y, dado un campo k , podemos formar la categoría de representaciones de $\mathcal{P}$ sobre k . En este contexto, las cuádruplas no son otra cosa que las representaciones del conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 4\}$, que llamaremos **tetrada**, formado por cuatro puntos incomparables entre sí; los morfismos entre cuádruplas corresponden entonces a morfismos entre representaciones de la tetrada. Es esta la razón por la que usamos la notación $\text{rep}(\mathcal{T}, k)$ para la categoría que definimos antes.

2.2. La categoría de representaciones de un carcaj

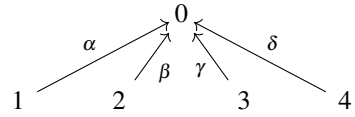
Definición 2.3. Un **carcaj** es un objeto $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, s, t)$ formado por un conjunto de vértices $\mathcal{Q}_0$, un conjunto de fle-

chas $\mathcal{Q}_1$, una función $s: \mathcal{Q}_0 \rightarrow \mathcal{Q}_0$, que asigna a cada flecha su punto inicial y una función $t: \mathcal{Q}_1 \rightarrow \mathcal{Q}_0$, que asigna a cada flecha su punto final. Si tanto $\mathcal{Q}_0$ como $\mathcal{Q}_1$ son conjuntos finitos, decimos que el carcaj $\mathcal{Q}$ es **finito**. En este caso, es usual que cada elemento de $\mathcal{Q}_0$ se represente como un punto en un plano y cada $\alpha \in \mathcal{Q}_1$ se represente como una flecha que va de su vértice inicial $s(\alpha)$ a su su vértice final $t(\alpha)$.

Ejemplo 1. Para nuestro trabajo va a ser de especial interés el carcaj $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, s, t)$ dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= \{0, 1, 2, 3, 4\}, & \mathcal{C}_1 &= \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, \\ s(\alpha) &= 1 & s(\beta) &= 2 & s(\gamma) &= 3 & s(\delta) &= 4, \\ t(\alpha) &= 0 & t(\beta) &= 0 & t(\gamma) &= 0 & t(\delta) &= 0. \end{aligned}$$

Podemos representar $\mathcal{C}$ mediante el siguiente grafo dirigido:



Definición 2.4. Dados un carcaj $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, s, t)$ y un campo k , una **representación de $\mathcal{Q}$ sobre k** es una colección $M = (M_i, \phi_\alpha)_{i \in \mathcal{Q}_0, \alpha \in \mathcal{Q}_1}$, en donde M_i es un k -espacio vectorial, uno por cada vértice $i \in \mathcal{Q}_0$, y una colección de k -transformaciones lineales $\phi_\alpha: M_{s(\alpha)} \rightarrow M_{t(\alpha)}$, una por cada flecha $\alpha \in \mathcal{Q}_1$. Si todos los k -espacios M_i son finito-dimensionales, decimos que la representación M es de **dimensión finita**. Nosotros vamos a considerar únicamente representaciones de dimensión finita para carcajes finitos. El **vector de dimensión** de una representación $M = (M_i, \phi_\alpha)_{i \in \mathcal{Q}_0, \alpha \in \mathcal{Q}_1}$ es el vector $\underline{\dim} M$ dado por

$$\underline{\dim} M = (d_i)_{i \in \mathcal{Q}_0}, \text{ en donde } d_i = \dim_k M_i.$$

Dados un carcaj $\mathcal{Q}$ y dos representaciones $M = (M_i, \phi_\alpha)$ y $M' = (M'_i, \phi'_\alpha)$ de $\mathcal{Q}$ sobre k , un **morfismo** $f: M \rightarrow M'$ es una colección $(f_i)_{i \in \mathcal{Q}_0}$ de transformaciones k -lineales $f_i: M_i \rightarrow M'_i$ tales que, para cada flecha $i \xrightarrow{\alpha} j$ en $\mathcal{Q}_1$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\phi_\alpha} & M_j \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_j \\ M'_i & \xrightarrow{\phi'_\alpha} & M'_j \end{array}$$

conmuta, esto es

$$(f_j \circ \phi_\alpha)(m) = (\phi'_\alpha \circ f_i)(m), \text{ para todo } m \in M_i.$$

Si además todas las f_i son isomorfismos lineales, decimos que f es un **isomorfismo** y escribimos $M \simeq M'$.

El conjunto de todos los morfismos de M a M' se denota $\text{Hom}(M, M')$. Este conjunto tiene estructura natural de k -espacio vectorial, con la suma y el producto por escalar usuales.

Definición 2.5. Si $M = (M_i, \phi_\alpha)$ y $M' = (M'_i, \phi'_\alpha)$ son representaciones de un carcaj $\mathcal{Q}$ sobre un campo k , entonces

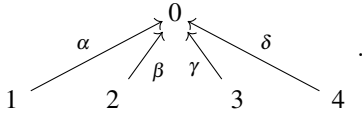
$$M \oplus M' = (M_i \oplus M'_i, \phi_\alpha \oplus \phi'_\alpha)_{i \in \mathcal{Q}_0, \alpha \in \mathcal{Q}_1}$$

es una representación de $\mathcal{Q}$ llamada la **suma directa de M y M'** . Una representación no nula M de $\mathcal{Q}$ se dice **indescomponible** si $M \simeq N \oplus L$, con N, L representaciones de $\mathcal{Q}$, implica que $N = 0$ o $L = 0$, en donde 0 denota la **representación nula**, en que tanto los espacios vectoriales como las transformaciones son nulos.

Dados un campo k y un carcaj $\mathcal{Q}$, tomando las representaciones de $\mathcal{Q}$ sobre k como objetos y los morfismos entre representaciones como morfismos, tenemos la **categoría de representaciones de $\mathcal{Q}$ sobre k** , que denotaremos $\text{rep}(\mathcal{Q}, k)$. Esta categoría es una categoría abeliana (ver, por ejemplo, [Sch14, pág. 15]).

2.3. La relación entre las dos categorías

A la tetrada $\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 4\}$ le podemos hacer corresponder el carcaj $\mathcal{C}$:



Esta correspondencia nos permitirá definir un funtor

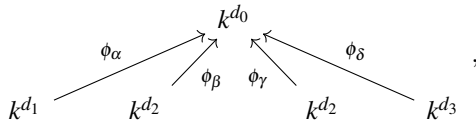
$$F: \text{rep}(\mathcal{T}, k) \rightarrow \text{rep}(\mathcal{C}, k)$$

para estudiar la relación precisa entre esas dos categorías. En lo que sigue, si $\phi: U \rightarrow V$ es una transformación lineal entre k -espacios vectoriales de dimensión finita, denotamos mediante $[\phi]$ a la matriz del operador ϕ con respecto a un par de bases ordenadas fijas para U_0 y V_0 .

Veamos entonces cómo definir el funtor F : a una cuádrupla $U = (U_0, U_1, \dots, U_4)$ de $\mathcal{T}$, con dimensión $(d_0, d_1, d_2, d_3, d_4)$ y presentación matricial

$$M = M_U = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{bmatrix},$$

le hacemos corresponder la siguiente representación $F(U)$ de $\mathcal{C}$:



en donde

$$[\phi_\alpha] = M_1, \quad [\phi_\beta] = M_2, \quad [\phi_\gamma] = M_3 \quad \text{y} \quad [\phi_\delta] = M_4.$$

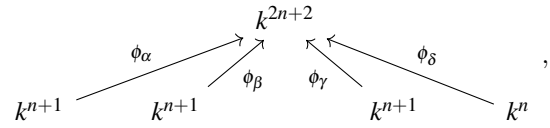
Aquí, las matrices se forman con respecto a las bases que se escogieron para obtener la presentación M_U . De ahora en adelante, usaremos 0 para representar un bloque matricial nulo; si es necesario especificar las dimensiones, usaremos $0_{r \times s}$ (0_r , respectivamente) para denotar el bloque nulo de tamaño $r \times s$ ($r \times r$, respectivamente).

Ejemplo 2. A una representación indescomponible de tipo IV (ver cuadro 1):

I_{n+1}	0	I_{n+1}	$I_n^\uparrow$
0	I_{n+1}	I_{n+1}	$I_n^\downarrow$

con $n \geq 0$,

le corresponde la siguiente representación del carcaj $\mathcal{C}$:



en donde

$$\begin{aligned} [\phi_\alpha] &= \begin{bmatrix} I_{n+1} \\ 0_{n+1} \end{bmatrix}, & [\phi_\beta] &= \begin{bmatrix} 0_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix}, \\ [\phi_\gamma] &= \begin{bmatrix} I_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} & \text{y} & [\phi_\delta] = \begin{bmatrix} I_n^\uparrow \\ I_n^\downarrow \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Continuando con la definición del funtor F , si $f: U \rightarrow U'$ es un morfismo entre las cuádruplas $U = (U_0, U_1, \dots, U_4)$ y $U' = (U'_0, U'_1, \dots, U'_4)$, con presentaciones matriciales

$$\begin{aligned} M &= M_U = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{bmatrix} \\ M' &= M_{U'} = \begin{bmatrix} M'_1 & M'_2 & M'_3 & M'_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y con dimensiones $\dim U = (d_0, d_1, \dots, d_4)$ y $\dim U' = (d'_0, d'_1, \dots, d'_4)$, entonces $F(f): F(U) \rightarrow F(U')$ es el morfismo en $\text{rep}(\mathcal{C}, k)$ dado por $F(f) = (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$, en donde

$$f_i: k^{d_i} \rightarrow k^{d'_i}, \quad \text{para } i \in \{0, 1, \dots, 4\},$$

son las transformaciones lineales definidas por

$$f_i = \begin{cases} p'_0 \circ f \circ p_0^{-1}, & \text{si } i = 0, \\ p'_0 \circ f|_{U_i} \circ p_0^{-1}, & \text{si } i \in \{1, \dots, 4\}, \end{cases}$$

en donde, para todo $i \in \{0, 1, \dots, 4\}$,

$$p_i: U_i \rightarrow k^{d_i} \quad \text{y} \quad p'_i: U'_i \rightarrow k^{d'_i}$$

son los isomorfismos determinados por las bases escogidas para formar las presentaciones matriciales M_U y $M_{U'}$.

La verificación de que, con las definiciones que hemos dado, efectivamente $F: \text{rep}(\mathcal{T}, k) \rightarrow \text{rep}(\mathcal{C}, k)$ es un funtor aditivo es sencilla. Este funtor nos permite estudiar los espacios de homomorfismos asociados a cuádruplas indescomponibles por medio de los correspondientes espacios de homomorfismos asociados al carcaj $\mathcal{C}$, gracias a que F es fiel y pleno. Sin embargo, las categorías $\text{rep}(\mathcal{T}, k)$ y $\text{rep}(\mathcal{C}, k)$ no son equivalentes. Los siguientes resultados muestran la relación precisa entre estas dos categorías.

Proposición 2.6. *El funtor $F: \text{rep}(\mathcal{T}, k) \rightarrow \text{rep}(\mathcal{C}, k)$ establece una equivalencia entre $\text{rep}(\mathcal{T}, k)$ y la subcategoría plena de $\text{rep}(\mathcal{C}, k)$ formada por aquellos objetos cuyo zócalo es proyectivo.*

Demostración. Para la prueba, en un contexto más general, ver [Sim92, lema 5.1(c), págs. 52–54]. $\square$

Corolario 2.7. *Si U y V son cuádruplas indescomponibles de tipos III, IV o V (ver cuadro 1), entonces*

$$\text{Hom}_{\text{rep}(\mathcal{T}, k)}(U, V) \simeq \text{Hom}_{\text{rep}(\mathcal{C}, k)}(F(U), F(V)).$$

Demostración. Las cuádruplas de los tipos III, IV o V tienen imágenes bajo F con zócalo proyectivo (ver [Sim92, lema 5.1, págs. 52–54]). $\square$

Teniendo en cuenta el corolario 2.7, para hallar los espacios de homomorfismos podemos entonces calcular los espacios correspondientes en la categoría $\text{rep}(\mathcal{C}, k)$. Precisamente esto es lo que haremos en la sección 3.

Nota 2. Las categorías $\text{rep}(\mathcal{T}, k)$ y $\text{rep}(\mathcal{C}, k)$ no son equivalentes. En efecto, como ya dijimos, $\text{rep}(\mathcal{C}, k)$ es una categoría abeliana, pero $\text{rep}(\mathcal{T}, k)$ no lo es, como mostramos a continuación. Consideremos las cuádruplas $U = (k, 0, 0, 0)$ y $V = (k, k, 0, 0)$; la identidad en k , $1_k: k \rightarrow k$ es un morfismo de U en V que es monomorfismo y epimorfismo: si tomamos morfismos $g, h: W \rightarrow U$ tales que $1_k \circ g = 1_k \circ h$, obtenemos inmediatamente que $g = h$ (análogamente se prueba que 1_k es también un epimorfismo). Pero 1_k no es isomorfismo en $\text{rep}(\mathcal{T}, k)$, pues

$$1_k(U_1) = 1_k(0) = 0 \neq k = V_1.$$

Hemos probado así que $\text{rep}(\mathcal{T}, k)$ no es una categoría balanceada y, por lo tanto, no es abeliana (ver [Par70, lema 2(c), pág. 165]); como corolario inmediato, obtenemos que $\text{rep}(\mathcal{C}, k)$ y $\text{rep}(\mathcal{T}, k)$ no son categorías equivalentes (ver [Sch72, proposición 16.2.4, pág. 169]).

2.4. El carcaj de Auslander-Reiten

El carcaj de Auslander-Reiten y las técnicas de la teoría homónima, creada por Auslander y Reiten en los años 70 (ver [ARS95] para la presentación clásica) son unas de las principales herramientas que permiten obtener la descripción de las álgebras de dimensión finita. Esta teoría brinda información sobre los módulos asociados, así como sobre los morfismos entre ellos. A continuación, damos las definiciones relevantes (para detalles adicionales ver, por ejemplo, [Sim92, ASS06, Sch14]).

Definición 2.8. Dada una categoría $\mathcal{A}$, un homomorfismo $f: X \rightarrow Y$ entre módulos indescomponibles se denomina **morfismo irreducible** si f no es sección ni retracción y, para toda factorización

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g & \nearrow h \\ & Z & \end{array}$$

de f a través de un objeto Z de $\mathcal{A}$, se tiene que, o bien g es una sección o bien h es una retracción.

El **carcaj de Auslander-Reiten** de $\mathcal{A}$, que denotaremos $\Gamma(\mathcal{A})$, es un grafo dirigido cuyos vértices son las clases de isomorfismo $[X]$ de los objetos X en $\mathcal{A}$ y cuyas aristas $[X] \rightarrow [Y]$ corresponden a los morfismos irreducibles $X \rightarrow Y$ en $\mathcal{A}$.

Un subcarcaj $\mathcal{C}$ de $\Gamma(\mathcal{A})$ se denomina una **componente de Auslander-Reiten** si $\mathcal{C}$ es no vacío, conexo y dado $[X] \rightarrow [Y]$ en $\Gamma(\mathcal{A})$ se tiene que $[X]$ pertenece a $\mathcal{C}$ si y solo si $[Y]$ pertenece a $\mathcal{C}$. Una componente del carcaj $\Gamma(\mathcal{A})$ se denomina **postproyectiva** si todos sus módulos son postproyectivos; es decir, si todos los módulos M de la componente son indescomponibles y $M \simeq \tau^{-1}(P)$, para algún módulo proyectivo P . Aquí, τ^{-1} es el trasladado inverso de Auslander-Reiten (ver, por ejemplo, [Sch14, definición 2.9, págs. 61–62]).

3. Espacios de homomorfismos: El caso postproyectivo

En esta sección vamos a obtener los espacios de homomorfismos entre cuádruplas indescomponibles entre las que hay un morfismo irreducible en la componente postproyectiva del carcaj de Auslander-Reiten asociado a $\mathcal{C}$. Nuestro procedimiento va a ser el siguiente: vamos a calcular explícitamente los espacios de homomorfismos entre las imágenes mediante el funtor F de las cuádruplas mencionadas y el isomorfismo del corolario 2.7 nos dará los espacios buscados.

Nota 3. En el cuadro 1, para un entero positivo n , las matrices $I_n^\uparrow$ ($I_n^\downarrow$, respectivamente) son matrices de tamaños $(n+1) \times n$ obtenidas al agregar una fila de ceros por encima (por debajo, respectivamente) a la matriz identidad I_n ; explícitamente, tenemos lo siguiente:

$$I_n^\uparrow = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_n^\downarrow = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Si $n = 0$, las matrices $I_0^\uparrow$ e $I_0^\downarrow$ son iguales; son matrices «formales» con una fila y cero columnas, que representan el operador lineal $0 \rightarrow k$.

Para un entero $n \geq 1$, denotamos mediante $J_n^+(0)$ al bloque de Jordan de orden n con valor propio 0 y entradas 1 en la diagonal por encima de la diagonal principal.

Si $n = 0$, todos los bloques de la matriz de tipo V son bloques vacíos; se trata de una matriz «formal» con una fila y cero columnas, que corresponde a la cuádrupla $(k, 0, 0, 0)$.

En la figura 1 presentamos la componente postproyectiva del carcaj de Auslander-Reiten asociado a $\mathcal{C}$. En esta componente únicamente aparecen cuádruplas indescomponibles de los tipos III, IV o V (el tipo al que pertenece cada una de las cuádruplas aparece en la parte inferior de la figura). En el cuadro 1 presentamos los tipos III, IV y V en su forma matricial (tomada de [MZ04]), junto con sus correspondientes vectores

de dimensión d . Estas presentaciones matriciales son las que usaremos en la demostración de nuestro resultado principal en el teorema 3.1.

Cuadro 1: **cuádruplas indescomponibles, junto con sus vectores de dimensión, correspondientes a la componente postproyectiva del carcaj de Auslander-Reiten asociado al carcaj $\mathcal{C}$.**

III

$$d = (2n+1, n+1, n, n, n)$$

I_{n+1}	$\mathbf{0}$	$I_n^\uparrow$	$I_n^\downarrow$
$\mathbf{0}$	I_n	I_n	I_n

$$n \geq 0$$

IV

$$d = (2n+2, n+1, n+1, n+1, n+1)$$

I_{n+1}	$\mathbf{0}$	I_{n+1}	$I_n^\uparrow$
$\mathbf{0}$	I_{n+1}	I_{n+1}	$I_n^\downarrow$

$$n \geq 0$$

V

$$d = (2n+1, n, n, n, n)$$

I_n	$\mathbf{0}$	$J_n^+(0)$	I_n
$\mathbf{0}$	I_n	I_n	$J_n^+(0)$
$00\dots 0$	$00\dots 0$	$10\dots 0$	$10\dots 0$

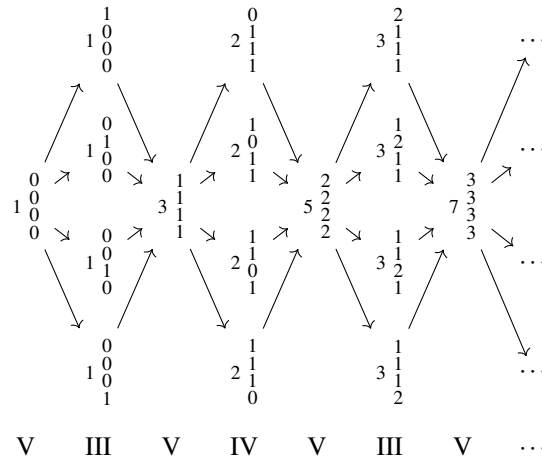
$$n \geq 0$$

Nota 4. Tal como se ve en la figura 1, para la componente postproyectiva del carcaj de Auslander-Reiten asociado a $\mathcal{C}$, se tiene que los casos en los que existe un morfismo irreducible entre indescomponibles son los siguientes:

1. De tipo V, con dimensión de la forma $n = 2t$, a tipo III, con dimensión de la forma $n = t$, en donde $t \geq 0$ es un entero.
2. De tipo III, con dimensión de la forma $n = t$, a tipo V, con dimensión de la forma $n = 2t+1$, en donde $t \geq 0$ es un entero.
3. De tipo V, con dimensión de la forma $n = 2t+1$, a tipo IV, con dimensión de la forma $n = t$, en donde $t \geq 0$ es un entero.
4. De tipo IV, con dimensión de la forma $n = t$, a tipo V, con dimensión de la forma $n = 2t+2$, en donde $t \geq 0$ es un entero.

En el teorema 3.1, utilizaremos la siguiente notación: para un entero no negativo s , una cuádrupla indescomponible de tipo T (en donde T es uno de los tipos III, IV, o V del cuadro 1) con vector de dimensión $n = s$, se denotará T_s .

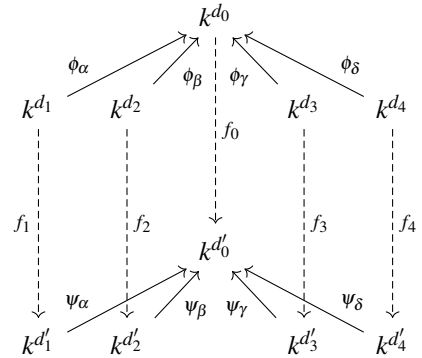
Figura 1: **componente postproyectiva del carcaj de Auslander-Reiten correspondiente al carcaj $\mathcal{C}$ asociado a la tetrada.**



Teorema 3.1. Dado un campo k , los espacios de homomorfismos correspondientes a las representaciones indescomponibles en la componente postproyectiva del carcaj de Auslander-Reiten asociado a $\mathcal{C}$, para los cuales hay al menos un morfismo irreducible, están dados por

- 1) $\text{Hom}(V_{2t}, III_t) \simeq k$.
- 2) $\text{Hom}(III_t, V_{2t+1}) \simeq k$.
- 3) $\text{Hom}(V_{2t+1}, IV_t) \simeq k$.
- 4) $\text{Hom}(IV_t, V_{2t+2}) \simeq k$.

Demostración. En los cuatro casos a considerar tenemos que examinar morfismos entre pares de representaciones del carcaj $\mathcal{C}$. Esquemáticamente, debemos examinar colecciones $(f_0, f_1, \dots, f_4)$ de cinco transformaciones lineales que hagan conmutar diagramas que tienen la forma siguiente:



Es decir, debemos encontrar todas las transformaciones lineales

$$f_i: k^{d_i} \rightarrow k^{d'_i}, \quad \text{para } i \in \{0, 1, \dots, 4\}$$

tales que

$$\begin{aligned} f_0 \circ \phi_\alpha &= \psi_\alpha \circ f_1, & f_0 \circ \phi_\beta &= \psi_\beta \circ f_2, \\ f_0 \circ \phi_\gamma &= \psi_\gamma \circ f_3, & f_0 \circ \phi_\delta &= \psi_\delta \circ f_4. \end{aligned} \quad (1)$$

Ya que vamos a trabajar matricialmente, usaremos la convención siguiente:

$$[f_0] = A, \quad [f_1] = B, \quad [f_2] = C, \quad [f_3] = D \quad \text{y} \quad [f_4] = E.$$

Teniendo esto en cuenta, la conmutatividad del diagrama anterior corresponde a que se cumplan las siguientes cuatro igualdades matriciales (que corresponden a las igualdades entre composiciones dadas en (1)):

$$\begin{aligned} A[\phi_\alpha] &= [\psi_\alpha]B, & A[\phi_\beta] &= [\psi_\beta]C, \\ A[\phi_\gamma] &= [\psi_\gamma]D, & A[\phi_\delta] &= [\psi_\delta]E. \end{aligned} \quad (2)$$

1) Veamos que $\text{Hom}(V_{2t}, \text{III}_t) \simeq k$, para todo entero $t \geq 0$. En este caso, debemos encontrar todas las quintuplas $(f_0, f_1, \dots, f_4)$ de transformaciones lineales que hagan conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & k^{4t+1} & & \\ & \nearrow \phi_\alpha & & \nwarrow \phi_\delta & \\ k^{2t} & & k^{2t} & & k^{2t} \\ & \nwarrow \phi_\beta & & \nearrow \phi_\gamma & \\ & & k^{2t+1} & & \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ k^{t+1} & & k^t & & k^t \\ & \nwarrow \psi_\alpha & & \nearrow \psi_\beta & \\ & & k^t & & k^t \\ & \nwarrow \psi_\gamma & & \nearrow \psi_\delta & \\ & & k^t & & k^t \end{array}$$

Matricialmente (ver cuadro 1), tenemos que

$$\begin{aligned} [\phi_\alpha] &= \begin{bmatrix} I_{2t} \\ \mathbf{0}_{2t} \\ 00\dots 0 \end{bmatrix}, & [\phi_\beta] &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2t} \\ I_{2t} \\ 00\dots 0 \end{bmatrix}, & [\phi_\gamma] &= \begin{bmatrix} J_{2t}^+(0) \\ I_{2t} \\ 10\dots 0 \end{bmatrix}, \\ [\phi_\delta] &= \begin{bmatrix} I_{2t} \\ J_{2t}^+(0) \\ 10\dots 0 \end{bmatrix}, & [\psi_\alpha] &= \begin{bmatrix} I_{t+1} \\ \mathbf{0}_{t \times (t+1)} \end{bmatrix}, & [\psi_\beta] &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(t+1) \times t} \\ I_t \end{bmatrix}, \\ [\psi_\gamma] &= \begin{bmatrix} I_t^\uparrow \\ I_t \end{bmatrix}, & [\psi_\delta] &= \begin{bmatrix} I_t^\downarrow \\ I_t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y debemos encontrar todas las matrices A, B, C, D y E , con entradas en el campo k y de tamaños $(2t+1) \times (4t+1)$, $(t+1) \times 2t$, $t \times 2t$, $t \times 2t$ y $t \times 2t$, respectivamente, que satisfagan las igualdades (2). A partir de la igualdad

$$\begin{aligned} A[\phi_\alpha] &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,4t+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2t+1,1} & \cdots & a_{2t+1,4t+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2t} \\ \mathbf{0}_{2t} \\ 00\dots 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{t+1} \\ \mathbf{0}_{t \times (t+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,2t} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{t+1,1} & \cdots & b_{t+1,2t} \end{bmatrix} \\ &= [\psi_\alpha]B \end{aligned}$$

se obtiene que

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,2t} & a_{1,2t+1} & \cdots & a_{1,4t+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t+1,1} & \cdots & a_{t+1,2t} & a_{t+1,2t+1} & \cdots & a_{t+1,4t+1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{t+2,2t+1} & \cdots & a_{t+2,4t+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2t+1,2t+1} & \cdots & a_{2t+1,4t+1} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,2t} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{t+1,1} & \cdots & a_{t+1,2t} \end{bmatrix}.$$

Usando ahora este valor para A en la igualdad $A[\phi_\beta] = [\psi_\beta]C$, obtenemos

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,2t} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,4t+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{t+1,1} & \cdots & a_{t+1,2t} & 0 & \cdots & 0 & a_{t+1,4t+1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{t+2,2t+1} & \cdots & a_{t+2,4t} & a_{t+2,4t+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2t+1,2t+1} & \cdots & a_{2t+1,4t} & a_{2t+1,4t+1} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{t+2,2t+1} & \cdots & a_{t+2,4t} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2t+1,2t+1} & \cdots & a_{2t+1,4t} \end{bmatrix}.$$

Con este nuevo valor de A , usamos la igualdad $A[\phi_\gamma] = [\psi_\gamma]D$ para obtener

$$A = \begin{bmatrix} B & \mathbf{0}_{(t+1) \times 2t} & \begin{smallmatrix} 0 \\ a_{2,4t+1} \\ \vdots \\ a_{2t+1,4t+1} \end{smallmatrix} \\ \mathbf{0}_{(t+1) \times 2t} & C & \begin{smallmatrix} 0 \\ a_{2,4t+1} \\ \vdots \\ a_{2t+1,4t+1} \end{smallmatrix} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,2t} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,2t-1} & a_{2,2t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{t+1,1} & \cdots & a_{t+1,2t-1} & a_{t+1,2t} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{t+2,2t+1} & \cdots & a_{t+2,4t} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2t+1,2t+1} & \cdots & a_{2t+1,4t} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{2,4t+1} & a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,2t-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t+1,4t+1} & a_{t+1,1} & a_{t+1,2} & \cdots & a_{t+1,2t-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{t+2,2t+1} + a_{t+2,4t+1} & a_{t+2,2t+2} & \cdots & a_{t+2,4t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2t+1,2t+1} + a_{2t+1,4t+1} & a_{2t+1,2t+2} & \cdots & a_{2t+1,4t} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, al usar los valores que obtuvimos antes en la igualdad $A[\phi_\delta] = [\psi_\delta]E$, resulta

$$A = \begin{bmatrix} B & \mathbf{0}_{(t+1) \times 2t} & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{t+1,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \mathbf{0}_{(t+1) \times 2t} & C & \begin{smallmatrix} a_{t+1,1} \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{t+1,1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{t+1,1} & -a_{t+1,1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{t+1,1} & -a_{t+1,1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -a_{t+1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

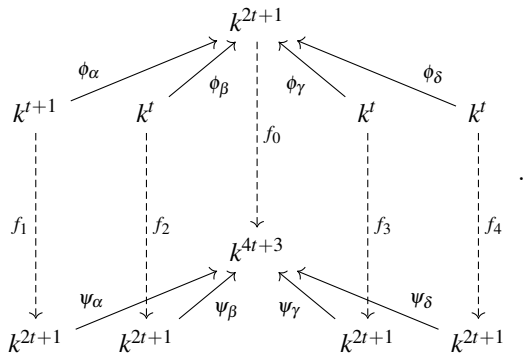
$C = D$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{t+1,1} & -a_{t+1,1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{t+1,1} & -a_{t+1,1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{t+1,1} & -a_{t+1,1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{t+1,1} & -a_{t+1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{t+1,1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{t+1,1} & -a_{t+1,1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{t+1,1} & -a_{t+1,1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En particular, todas las matrices resultan dependiendo escalarmente de un único elemento $a_{t+1,1}$ del campo k y esto inmediatamente implica que $\text{Hom}(V_{2t}, \text{III}_t) \simeq k$.

2) Veamos que $\text{Hom}(\text{III}_t, V_{2t+1}) \simeq k$, para todo entero $t \geq 0$. En este caso, debemos encontrar todas las quintuplas $(f_0, f_1, \dots, f_4)$ de transformaciones lineales que hagan conmutar el siguiente diagrama:



Matricialmente (ver cuadro 1), tenemos que

$$[\phi_\alpha] = \begin{bmatrix} I_{t+1} \\ \mathbf{0}_{t \times (t+1)} \end{bmatrix}, \quad [\phi_\beta] = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(t+1) \times t} \\ I_t \end{bmatrix}, \quad [\phi_\gamma] = \begin{bmatrix} I_t^\uparrow \\ I_t \end{bmatrix},$$

$$[\phi_\delta] = \begin{bmatrix} I_t^\downarrow \\ I_t \end{bmatrix}, \quad [\psi_\alpha] = \begin{bmatrix} I_{2t+1} \\ \mathbf{0}_{2t+1} \\ 00 \dots 0 \end{bmatrix}, \quad [\psi_\beta] = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2t+1} \\ I_{2t+1} \\ 00 \dots 0 \end{bmatrix},$$

$$[\psi_\gamma] = \begin{bmatrix} J_{2t+1}^+(0) \\ I_{2t+1} \\ 10 \dots 0 \end{bmatrix}, \quad [\psi_\delta] = \begin{bmatrix} I_{2t+1} \\ J_{2t+1}^+(0) \\ 10 \dots 0 \end{bmatrix}$$

y debemos encontrar todas las matrices A, B, C, D y E , con entradas en el campo k y de tamaños $(4t+3) \times (2t+1)$, $(2t+1) \times (t+1)$, $(2t+1) \times t$, $(2t+1) \times t$ y $(2t+1) \times t$, respectivamente, que satisfagan las igualdades (2). A partir de la igualdad

$$A[\phi_\alpha] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,2t+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{4t+3,1} & \cdots & a_{4t+3,2t+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{t+1} \\ \mathbf{0}_{t \times (t+1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{2t+1} \\ \mathbf{0}_{2t+1} \\ 00 \dots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,t+1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{2t+1,1} & \cdots & b_{2t+1,t+1} \end{bmatrix}$$

$$= [\psi_\alpha]B$$

se obtiene que

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,t+1} & a_{1,t+2} & \cdots & a_{1,2t+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2t+1,1} & \cdots & a_{2t+1,t+1} & a_{2t+1,t+2} & \cdots & a_{2t+1,2t+1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2t+2,t+2} & \cdots & a_{2t+2,2t+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{4t+3,t+2} & \cdots & a_{4t+3,2t+1} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,t+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2t+1,1} & \cdots & a_{2t+1,t+1} \end{bmatrix}.$$

Usando ahora este valor para A en la igualdad $A[\phi_\beta] = [\psi_\beta]C$, obtenemos

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,t+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2t+1,1} & \cdots & a_{2t+1,t+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2t+2,t+2} & \cdots & a_{2t+2,2t+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{4t+2,t+2} & \cdots & a_{4t+2,2t+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{2t+2,t+2} & \cdots & a_{2t+2,2t+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{4t+2,t+2} & \cdots & a_{4t+2,2t+1} \end{bmatrix}.$$

Con este nuevo valor de A usamos la igualdad $A[\phi_\gamma] = [\psi_\gamma]D$ para obtener

$$A = \begin{bmatrix} B & \vdots & \mathbf{0}_{(2t+1) \times (t+1)} \\ \mathbf{0}_{(2t+1) \times (t+1)} & \vdots & C \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,t+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2t,1} & a_{2t,2} & \cdots & a_{2t,t+1} \\ a_{2t+1,1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,t+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2t,2} & a_{2t,3} & \cdots & a_{2t,t+1} \end{bmatrix},$$

en donde la última franja horizontal de A es una fila nula. Finalmente, al usar los valores que obtuvimos antes en la igualdad $A[\phi_\delta] = [\psi_\delta]E$, resulta

$$A = \begin{bmatrix} B & \vdots & \mathbf{0}_{(2t+1) \times (t+1)} \\ \mathbf{0}_{(2t+1) \times (t+1)} & \vdots & C \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,t+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{1,t+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1,t+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,t+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{1,t+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1,t+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,t+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{1,t+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1,t+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En particular, todas las matrices resultan dependiendo escalarmente de un único elemento $a_{1,t+1}$ del campo k y esto inmediatamente implica que $\text{Hom}(\text{III}_t, \text{V}_{2t+1}) \simeq k$.

3) Veamos que $\text{Hom}(\text{V}_{2t+1}, \text{IV}_t) \simeq k$, para todo entero $t \geq 0$. En este caso, debemos encontrar todas las quintuplas $(f_0, f_1, \dots, f_4)$ de transformaciones lineales que hagan conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & k^{4t+3} & & \\
 & \nearrow \phi_\alpha & & \nwarrow \phi_\delta & \\
 k^{2t+1} & & k^{2t+1} & & k^{2t+1} \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\
 & \nearrow \psi_\alpha & k^{2t+2} & \nwarrow \psi_\delta & \\
 k^{t+1} & & k^{t+1} & & k^t
 \end{array}$$

Matricialmente (ver cuadro 1), tenemos que

$$\begin{aligned}
 [\phi_\alpha] &= \begin{bmatrix} I_{2t+1} \\ \mathbf{0}_{2t+1} \\ 00 \dots 0 \end{bmatrix}, & [\phi_\beta] &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2t+1} \\ I_{2t+1} \\ 00 \dots 0 \end{bmatrix}, & [\phi_\gamma] &= \begin{bmatrix} J_{2t+1}^+(0) \\ I_{2t+1} \\ 10 \dots 0 \end{bmatrix}, \\
 [\phi_\delta] &= \begin{bmatrix} I_{2t+1} \\ J_{2t+1}^+(0) \\ 10 \dots 0 \end{bmatrix}, & [\psi_\alpha] &= \begin{bmatrix} I_{t+1} \\ \mathbf{0}_{t+1} \end{bmatrix}, & [\psi_\beta] &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{t+1} \\ I_{t+1} \end{bmatrix}, \\
 [\psi_\gamma] &= \begin{bmatrix} I_{t+1} \\ I_{t+1} \end{bmatrix}, & [\psi_\delta] &= \begin{bmatrix} I_t^\uparrow \\ I_t^\downarrow \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

y debemos encontrar todas las matrices A, B, C, D y E , con entradas en el campo k y de tamaños $(2t+2) \times (4t+3)$, $(t+1) \times (2t+1)$, $(t+1) \times (2t+1)$, $(t+1) \times (2t+1)$ y $t \times (2t+1)$,

respectivamente, que satisfagan las igualdades (2). A partir de la igualdad

$$\begin{aligned}
 A[\phi_\alpha] &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,4t+3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2t+2,1} & \cdots & a_{2t+2,4t+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2t+1} \\ \mathbf{0}_{2t+1} \\ 00 \dots 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} I_{t+1} \\ \mathbf{0}_{t+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,2t+1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{t+1,1} & \cdots & b_{t+1,2t+1} \end{bmatrix} \\
 &= [\psi_\alpha]B
 \end{aligned}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,2t+1} & a_{1,2t+2} & \cdots & a_{1,4t+3} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t+1,1} & \cdots & a_{t+1,2t+1} & a_{t+1,2t+2} & \cdots & a_{t+1,4t+3} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{t+2,2t+2} & \cdots & a_{t+2,4t+3} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2t+2,2t+2} & \cdots & a_{2t+2,4t+3} \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,2t+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{t+1,1} & \cdots & a_{t+1,2t+1} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Usando ahora este valor para A en la igualdad $A[\phi_\beta] = [\psi_\beta]C$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,2t+1} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,4t+3} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{t+1,1} & \cdots & a_{t+1,2t+1} & 0 & \cdots & 0 & a_{t+1,4t+3} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{t+2,2t+2} & \cdots & a_{t+2,4t+2} & a_{t+2,4t+3} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2t+2,2t+2} & \cdots & a_{2t+2,4t+2} & a_{2t+2,4t+3} \end{bmatrix}, \\
 C &= \begin{bmatrix} a_{t+2,2t+2} & \cdots & a_{t+2,4t+2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2t+2,2t+2} & \cdots & a_{2t+2,4t+2} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Con este nuevo valor de A usamos la igualdad $A[\phi_\gamma] = [\psi_\gamma]D$ para obtener

$$\begin{aligned}
 A &= \left[\begin{array}{c|c|c} B & \mathbf{0}_{(t+1) \times (2t+1)} & \begin{smallmatrix} a_{1,4t+3} \\ \vdots \\ a_{2t+2,4t+3} \end{smallmatrix} \\ \hline \mathbf{0}_{(t+1) \times (2t+1)} & C & \end{array} \right], \\
 D &= \begin{bmatrix} a_{1,4t+3} & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t+1,4t+3} & a_{t+1,1} & a_{t+1,2} & \cdots & a_{t+1,2t} \\ a_{t+2,2t+2} + a_{t+2,4t+3} & a_{t+2,2t+2} & \cdots & a_{t+2,4t+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2t+2,2t+2} + a_{2t+2,4t+3} & a_{2t+2,2t+2} & \cdots & a_{2t+2,4t+2} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, al usar estos valores en la igualdad $A[\phi_\delta] = [\psi_\delta]E$, obtenemos

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} B & \mathbf{0}_{(t+1) \times (2t+1)} & \begin{smallmatrix} -a_{1,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline \mathbf{0}_{(t+1) \times (2t+1)} & C & \end{array} \right],$$

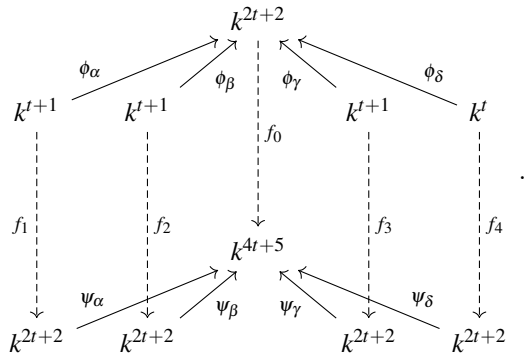
$$B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_{1,1} & a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_{1,1} & a_{1,1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{1,1} & a_{1,1} \end{bmatrix},$$

$$C = D = \begin{bmatrix} -a_{1,1} & a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{1,1} & a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{1,1} & a_{1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{1,1} \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & -a_{1,1} & a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_{1,1} & a_{1,1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{1,1} & a_{1,1} \end{bmatrix}.$$

En particular, todas las matrices resultan dependiendo escalarmente de un único elemento $a_{1,1}$ del campo k y esto inmediatamente implica que $\text{Hom}(V_{2t+1}, IV_t) \simeq k$.

4) Veamos finalmente que $\text{Hom}(IV_t, V_{2t+2}) \simeq k$, para todo entero $t \geq 0$. En este caso, debemos encontrar todas las quintuplas $(f_0, f_1, \dots, f_4)$ de transformaciones lineales que hagan conmutar el siguiente diagrama:



Matricialmente (ver cuadro 1), tenemos que

$$[\phi_\alpha] = \begin{bmatrix} I_{t+1} \\ \mathbf{0}_{t+1} \end{bmatrix}, \quad [\phi_\beta] = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{t+1} \\ I_{t+1} \end{bmatrix}, \quad [\phi_\gamma] = \begin{bmatrix} I_{t+1} \\ I_{t+1} \end{bmatrix},$$

$$[\phi_\delta] = \begin{bmatrix} I_t^\uparrow \\ I_t^\downarrow \end{bmatrix}, \quad [\psi_\alpha] = \begin{bmatrix} I_{2t+2} \\ \mathbf{0}_{2t+2} \\ 00 \dots 0 \end{bmatrix}, \quad [\psi_\beta] = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2t+2} \\ I_{2t+2} \\ 00 \dots 0 \end{bmatrix},$$

$$[\psi_\gamma] = \begin{bmatrix} J_{2t+2}^+(0) \\ I_{2t+2} \\ 10 \dots 0 \end{bmatrix}, \quad [\psi_\delta] = \begin{bmatrix} I_{2t+2} \\ J_{2t+2}^-(0) \\ 10 \dots 0 \end{bmatrix}$$

y debemos encontrar todas las matrices A, B, C, D y E , con entradas en el campo k y de tamaños $(4t+5) \times (2t+2)$, $(2t+2) \times (t+1)$, $(2t+2) \times (t+1)$, $(2t+2) \times (t+1)$ y $(2t+2) \times t$, respectivamente, que satisfagan las igualdades (2). A partir de la igualdad

$$A[\phi_\alpha] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,2t+2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{4t+5,1} & \cdots & a_{4t+5,2t+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{t+1} \\ \mathbf{0}_{t+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{2t+2} \\ \mathbf{0}_{2t+2} \\ 00 \dots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,t+1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{2t+2,1} & \cdots & b_{2t+2,t+1} \end{bmatrix}$$

$$= [\psi_\alpha]B$$

se obtiene que

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,t+1} & a_{1,t+2} & \cdots & a_{1,2t+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2t+2,1} & \cdots & a_{2t+2,t+1} & a_{2t+2,t+2} & \cdots & a_{2t+2,2t+2} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2t+3,t+2} & \cdots & a_{2t+3,2t+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{4t+5,t+2} & \cdots & a_{4t+5,2t+2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,t+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2t+2,1} & \cdots & a_{2t+2,t+1} \end{bmatrix}.$$

Usando ahora este valor para A en la igualdad $A[\phi_\beta] = [\psi_\beta]C$, obtenemos

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,t+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2t+2,1} & \cdots & a_{2t+2,t+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2t+3,t+2} & \cdots & a_{2t+3,2t+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{4t+4,t+2} & \cdots & a_{4t+4,2t+2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{2t+3,t+2} & \cdots & a_{2t+3,2t+2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{4t+4,t+2} & \cdots & a_{4t+4,2t+2} \end{bmatrix}.$$

Con este nuevo valor de A usamos la igualdad $A[\phi_\gamma] = [\psi_\gamma]D$ para obtener

$$A = \begin{bmatrix} B & \vdots & \mathbf{0}_{(2t+2) \times (t+1)} \\ \hline \mathbf{0}_{(2t+2) \times (t+1)} & \vdots & C \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,t+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2t+1,1} & \cdots & a_{2t+1,t+1} \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = D = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,1} & \cdots & a_{1,t+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2t+1,1} & \cdots & a_{2t+1,t+1} \end{bmatrix},$$

en donde la última franja horizontal de A es una fila nula. Finalmente, al usar estos valores en la igualdad $A[\phi_\delta] = [\psi_\delta]E$,

obtenemos

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B & \mathbf{0}_{(2r+2) \times (r+1)} \\ \hline \mathbf{0}_{(2r+2) \times (r+1)} & C \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right],$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{1,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{1,1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{1,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{1,1} \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{1,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{1,1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

En particular, todas las matrices resultan dependiendo escalarmente de un único elemento $a_{1,1}$ del campo k y esto inmediatamente implica que $\text{Hom}(\text{IV}_t, \text{V}_{2t+2}) \simeq k$.

En los cuatro casos considerados hemos probado que el espacio de homomorfismos correspondiente es isomorfo al campo base. Concluye así nuestra demostración. $\square$

En un próximo artículo, los autores presentarán la obtención explícita de los espacios de homomorfismos para el caso de la componente preinyectiva del carcaj de Auslander-Reiten asociado a la tetraedra.

Agradecimientos

Los autores agradecen al semillero interseeds REAL por crear un ambiente propicio para la investigación en álgebra.

Referencias.

- [ASS06] I. Assem, D. Simson, and A. Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 1, Cambridge Univ. Press., 2006.
- [ARS95] M. Auslander, I. Reiten, and S.O. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge Studies in Adv. Math., Cambridge Univ. Press., 1995.
- [Arn00] D.M. Arnold, *Abelian groups and representations of finite partially ordered sets*, Vol. 2, CMS Books in Mathematics, Canada, 2000.
- [Bre67] S. Brenner, *Endomorphism algebras of vector spaces with distinguished sets of subspaces*, J. Algebra **6** (1967), 100–114.
- [Bre74a] ———, *On four subspaces of a vector space*, J. Algebra **29** (1974), 587–599.
- [Bre74b] ———, *Decomposition properties of some small diagrams of modules*, 1974.
- [Dro80] Ju. A. Drozd, *Tame and wild matrix problems*, in Representation Theory II (Vlastimil Dlab and Gabriel, ed.), Springer, Berlin, Heidelberg, 1980.
- [For08] T.A. Forbregd, *The 4 Subspace Problem: Advisor: Sverre Smalø*, Master's Thesis, Norwegian University of Science and Technology, 2008., t. 1y/28hz.
- [Jor70] C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris, 1870.
- [GP70] I.M. Gelfand and V.A. Ponomarev, *Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite dimensional vector space*, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, Hilbert space operators, 1970, pp. 163–237.
- [Kro90] L. Kronecker, *Algebraische Reduktion der Scharen bilinearer Formen*, Sitzungsber. Akad. Berlin (1890), 763–776.
- [Med20] G. Medina, *Introducción a la teoría de representaciones de conjuntos parcialmente ordinarios*, Notas de clase, Departamento de Matemáticas, 2020.
- [Med23] ———, *Sobre el Problema de los Cuatro Subespacios*, Paskin Matemático **5** (2023), no. 1, 9–18.
- [MZ04] G. Medina and A.G. Zavatskij, *The four subspace problem: An elementary solution*, Linear Algebra and its Applications **392** (2004), 11–23.
- [Naz67] L.A. Nazarova, *Representations of a tetrad*, Izv. Akad. Nauk. SSSR **31** (1967), 1361–1377. Traducción al inglés en Math. USSR Izv. 1, 1967.
- [Naz75] ———, *Partially ordered sets of infinite type*, Izv. Akad. Nauk. SSSR **39** (1975), 963–991. Traducción al inglés en Math. USSR Izv. 9, 1975.
- [Par70] Bodo Pareigis, *Categories and Functors*, Pure and applied mathematics : a series of monographs and textbooks, Academic Press, 1970.
- [Sch14] Ralph Schiffler, *Quiver Representations*, CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag, 2014.
- [Sch72] Horst Schubert, *Categories*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1972.
- [Sim92] D. Simson, *Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories*, Gordon and Breach Science Publishers, 1992.
- [Wei68] K. Weierstrass, *Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen*, Monatsber. Akad. Wiss. (1868), 311–338.
- [Zav07] A.G. Zavatskij, *On the Kronecker Problem and related problems of Linear Algebra*, Linear Algebra and its Applications **425** (2007), no. 1, 26–62, DOI <https://doi.org/10.1016/j.laa.2007.03.011>.
- [Zav08] ———, *A matrix problem over a central quadratic skew field extension*, Linear Algebra and its Applications **428** (2008), 393–399.

Acerca de los autores: Juan Camilo es estudiante de 6.º semestre del Programa Curricular de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales y es integrante del semillero interseeds REAL.

Gonzalo es profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales; su área de trabajo es la teoría de representaciones de estructuras algebraicas. Es el coordinador del semillero interseeds REAL.

INTRODUCCIÓN A LOS ORIGAMIS MATEMÁTICOS Y EL PASO DE UN ORIGAMI PLANO A UN ORIGAMI EN PAPEL ESFÉRICO

Daniel Arias Mutis ^{*}
d.ariasm@konradlorenz.edu.co

"No prometo nada completo, puesto que cualquier cosa humana que presuma de completa es, por esa razón misma, forzosamente defectuosa."

Herman Melville
Moby Dick

1. Introducción

Con esta corta narración matemática presentaremos los origamis junto a algunas de sus propiedades y desarrollaremos la construcción de un objeto matemático, un origami que antes de encontrarse plegado yace sobre un papel esférico. Es un ejemplo y una invitación a la exploración de este lenguaje-ciencia que es la matemática.

Iniciaremos con los axiomas del origami plano y realizaremos pequeños ejercicios que nos permiten construir números racionales y raíces cuadradas, los cuales también se logran con regla y compás ¹; sin embargo veremos que los pliegues nos permiten ir mas allá [Alp99]. Gauss, en uno de sus mas famosos resultados, había sentenciado que las raíces primitivas de la unidad $\sqrt[n]{1}$ que pueden ser expresadas con operaciones aritméticas en los números complejos, son aquellas que permiten la construcción con regla y compás del polígono regular de n lados. Con el origami seremos capaces de construir el heptágono -imposible con regla y compás- con el cual habremos ampliado la lista dada por Gauss [Gle88], un resultado sorprendente!.

Estudiaremos el pliegue de una tira de estampillas [JEK68, Leg13], un problema famoso que podemos ver como un origami de una sola tira con pliegues longitudinales, haciendo uso de la combinatoria para establecer algunas de sus propiedades.

Caracterizaremos el comportamiento de un origami plano ignorado el movimiento de las caras del papel en el espacio mientras alcanza su posición final [Lan18]. Aprovecharemos el patrón de pliegues de Miura-Ori (compuesto de vértices con 4 pliegues) y su relación con los grafos de 3 colores, para demostrar que el problema de decidir si un patrón de pliegues es físicamente posible es $\mathcal{NP}$ -completo² [GH14].

^{*}Egresado Departamento de Matemática, Fundación Universitaria Konrad Lorenz.

¹Los números construibles con la geometría clásica.

²Separar el conjunto de los problemas que terminan en tiempo polinomial

Saldremos de los origamis planos para ocuparnos del plegado en $\mathbb{R}^3$ como un ejercicio de transformaciones lineales afines [BH02]. Enriqueceremos nuestra perspectiva mostrando como los pliegues cambian la curvatura extrínseca, pero mantienen constante la intrínseca [Huf76, CZ18]; Es decir, si iniciamos sobre un papel plano, la curvatura intrínseca del origami se mantiene plana.

Llegaremos entonces a construir el origami sobre una superficie esférica, primero transformando un patrón de pliegues plegable sobre un papel a un disco, para luego aplicar la proyección estereográfica. Con esto habremos alcanzado el patrón de pliegues plegable sobre un papel esférico: el origami esférico anunciado.

Solo me queda señalar que el estudio del origami acá expuesto no se desarrollo en absoluto con la linealidad expuesta, algunas partes corresponden al desarrollo realizado para mi tesis de grado, otras surgieron a partir de un proyecto personal, y aún otras tienen orígenes mas difusos. La linealidad es solo un artificio necesario para la transmisión adecuada de las ideas. Sin mas que decir, iniciemos.

2. Los axiomas del origami y los números de origami

Iniciando con una lamina cuadrada de papel (usualmente asociada a $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$), las operaciones básicas del origami -sus axiomas-, son aquellas que se alcanzan realizando un solo pliegue a la vez (asumiremos que los pliegues son líneas rectas) [Hul21]. Su estudio fue avanzado especialmente por Humiaki Huzita y Jacques Justin durante las décadas de 1980 y 1990 [Hul21, Alp99]. Dependiendo del autor se tienen de 6 a 8 axiomas, en nuestro caso trabajaremos con la lista de 8 axiomas expuestas por Hull [Hul21]:

1. Dados dos puntos p_1 y p_2 sobre el papel, es posible realizar un pliegue -una línea- que los conecte.
2. Dados dos pliegues -líneas- l_1, l_2 sobre el papel, es posible ubicar su punto de intersección, si existe.
3. Dados dos puntos p_1 y p_2 sobre el papel, es posible doblar p_1 sobre p_2 (encontrar el pliegue equidistante a ambos puntos).

P de los $\mathcal{NP}$ -completos es uno de los problemas del milenio.

4. Dados dos pliegues l_1 y l_2 sobre el papel, es posible doblar l_1 sobre l_2 (el pliegue que divide el sector angular entre l_1 y l_2 en partes iguales, si son paralelos, establece una línea paralela entre los dos).
5. Dados un punto p y un pliegue l sobre el papel, es posible realizar un pliegue perpendicular a l que pasa por p .
6. Dados dos puntos p_1 y p_2 , y un pliegue l , sobre el papel, es posible realizar un pliegue que coloca p_1 sobre l y pasa a través del punto p_2 .
7. Dados dos puntos p_1 y p_2 , y dos líneas l_1 y l_2 , sobre el papel, es posible realizar un pliegue que coloca p_1 sobre l_1 y p_2 sobre l_2 (Axioma de Beloch).
8. Dado un punto p y dos líneas l_1 y l_2 , es posible realizar un pliegue perpendicular a l_2 que coloque p sobre l_1 .

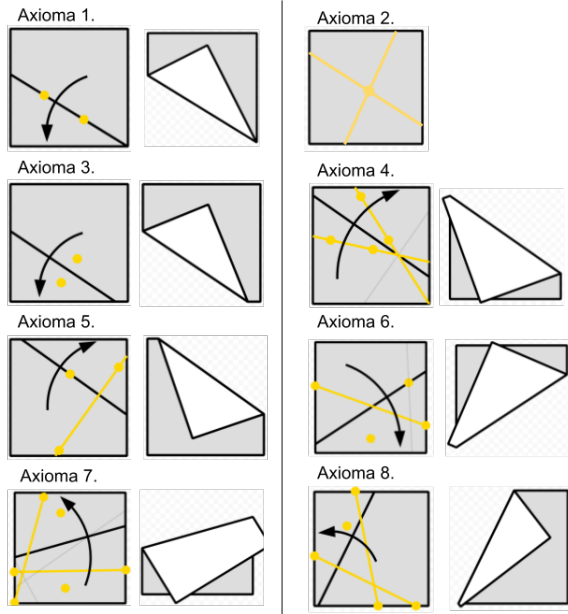


Figura 1: Axiomas del Origami, en negro se marca el pliegue de cada axioma [Hul21]. Tomado de [KHO23]

Utilizando los primeros 5 axiomas se construyen los números racionales y aquellos radicales con la forma $\sqrt{r}$, resultados equivalentes a los de la geometría clásica. Al incluir los axiomas 7 y 8, el origami sobrepasa las posibilidades de las construcciones con regla y compás pues permite trisecar el ángulo [Hul21]. Gracias a esto se puede construir el heptágono, que como veremos permite extender un famoso resultado de Gauss. A partir de los axiomas realizaremos un par de ejercicios que nos permiten ver (pero no demostrar) el alcance de los números construibles con este grupo de Axiomas: los números de Origami (un subconjunto de los números complejos, ver [Alp99] para la formalización completa).

2.1. Construcciones básicas del origami, racionales y $\sqrt{x}$

Para construir los números racionales $\mathbb{Q}$, particularmente para alcanzar las divisiones de la forma $\frac{1}{n}$, donde $n \in \mathbb{N}$, nos conviene asociar el cuadrado de papel a $[0, 1] \times [0, 1]$. Vamos ahora a seguir el método propuesto por [Hul13], este consiste en plegar la identidad $y = x$ (la diagonal entre las puntas opuestas), para luego realizar pliegues horizontales y diagonales que nos permitan encontrar la fracción deseada de manera recursiva. Expondremos el método general señalando la construcción de $\frac{1}{3}$ (en la figura 2 se expone desde $\frac{1}{2}$ hasta $\frac{1}{3}$):

1. Plegamos la diagonal $y = x$ uniendo $(0,0)$ con $(1,1)$ (Axioma 1).
2. Buscamos la división $\frac{1}{n-1}$ (en principio se trata de un proceso recursivo, por lo que asumimos que $\frac{1}{n-1}$ ya fue construido); en nuestro ejemplo, para $\frac{1}{3}$, dividimos el papel en dos partes iguales $\frac{1}{2}$ (Axioma 3).
3. Se pliega la diagonal del punto $(0, 1)$ al punto $(\frac{1}{n-1}, 0)$, es decir $y = -nx + 1$ (Axioma 1); para $\frac{1}{3}$ construimos el pliegue entre el punto $(0,1)$ y punto $(\frac{1}{2}, 0)$, note que esta equivale a $y = -2x + 1$.
4. Ubicamos la intersección entre $y = x$ y $y = -nx + 1$ (Axioma 2), que corresponde al punto $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1})$ y se pliega la línea perpendicular al borde inferior $x = \frac{1}{n+1}$ (Axioma 5). En la construcción de $\frac{1}{3}$ ubicamos la intersección de $y = x$ y $y = -2x + 1$, es decir el punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y plegamos $x = \frac{1}{3}$.

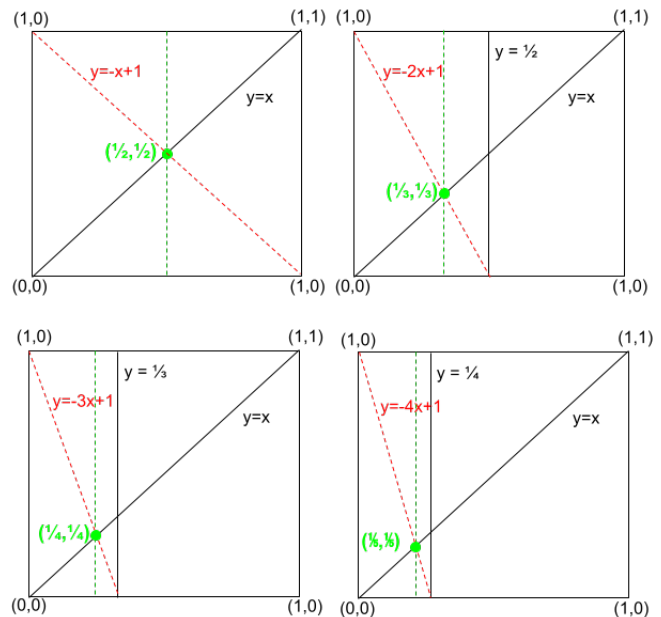


Figura 2: Construcción recursiva de $\frac{1}{n}$.

Notemos que la construcción nos permite sustraer $y = x$ de $y = -nx + 1$, por lo que tenemos $0 = -(n+1)x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{n+1}$ que es lo que buscamos (la clave está en la intersección con la identidad). Podemos extender el método para $n \notin \mathbb{N}$, pero es preciso primero encontrar pliegues que representen números irracionales. Debe ser claro que con la construcción de los números racionales es posible solucionar ecuaciones polinomiales de grado 1, es decir: $0 = ax + b$ si $x, m, b \in \mathbb{Q}$.

Vamos ahora por la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a, b, c \in \mathbb{Q}$. La construcción de la parábola mediante pliegues se puede realizar de forma análoga a la construcción geométrica que utiliza un punto focal y su directriz. Siguiendo a Hull [Hul13], veremos que se trata de aplicar el axioma 3 recursivamente (figura 3.a, y 3.b):

1. Sobre el papel marcamos un punto p al interior y tomamos el borde inferior como la línea l .
2. Seleccionamos un punto $p' \in l$ y plegamos p sobre p' (Axioma 3). En la figura 3.a. el pliegue corresponde a la línea negra punteada.
3. Repetimos el paso anterior cambiando el punto p' . En la figura 3.b cada pliegue se encuentra marcado en línea punteada gris excepto el último.

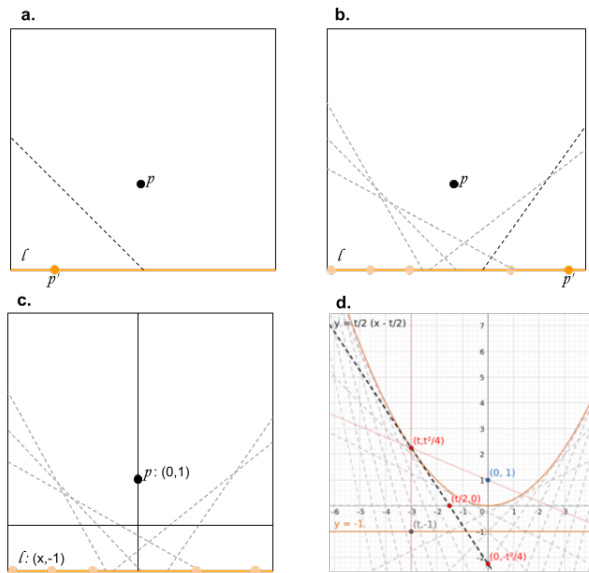


Figura 3: Construcción de la parábola

Si asignamos al punto $p := (0, 1)$, a $l : y = -1$ y seleccionamos un punto $t \in l$ (figura 3.c), tenemos que el pliegue resultante de aplicar el axioma 3 corresponde a la línea $y = \frac{t}{2}x - \frac{t}{2}$ (figura 3.d en línea negra punteada). Ahora realicemos un pliegue perpendicular a l que inicia sobre t (Axioma 5) y ubiquemos su intersección con $y = \frac{t}{2}x - \frac{t}{2}$ (Axioma 2), el punto $(t, \frac{t^2}{4})$ (en la figura 3.d ver la línea rojo punteada perpendicular a l^3). No es difícil notar que si $(x, y) = (t, \frac{t^2}{4})$ hemos

³En la figura 3.d también en rojo punteado la línea del punto $(t, \frac{t^2}{4})$ al

construido la parábola $y = (\frac{x}{2})^2$. Ahora que contamos con la parábola es claro que alcanzamos cualquier número de la forma $\sqrt{x}$. Las construcciones hasta acá realizadas, equivalen a las alcanzadas por la geometría clásica con regla y compás.

2.2. Nuevos alcances: la trisección de un ángulo y la construcción del heptágono

Hisashi Abe propuso un método bastante simple para trisecar un ángulo (figura 4):

1. Marquemos el ángulo θ en la parte inferior del cuadrado (figura 4 paso 1).
2. Hagamos un doblez paralelo al borde inferior (marcado l_1) y luego hagamos un pliegue colocando l_1 en el borde inferior (Axioma 3). El nuevo pliegue es l_2 (figura 4 paso 2).
3. Marquemos el origen con p_1 y la intersección de l_1 con el borde lateral izquierdo como el punto p_2 (ver figura 4 paso 3).
4. Realicemos un pliegue colocando p_1 sobre l_1 y p_2 sobre l_2 (Axioma 7: Beloch; ver figura 4 paso 3 y 4).
5. Notaremos que una parte de l_1 se ve reflejada en el pliegue. Extendamos el pliegue por l_1 el cual se marca como l_3 . (Si marcamos el punto sobre el papel, hacemos ahora un pliegue del origen a este punto aplicando el Axioma 1. Figura 4 paso 4).
6. Coloque l_3 sobre el borde inferior del cuadrado (Axioma 4), obteniendo la trisección del ángulo θ (figura 4 paso 5 y 6).

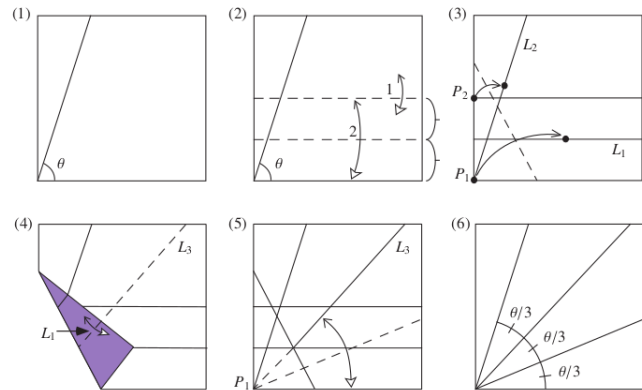


Figura 4: Trisección del ángulo siguiendo la construcción de Hisashi Abe. Tomado de [Hul13].

A pesar de la simplicidad del pliegue, este método nos permite trisecar cualquier ángulo, un problema que la geometría

punto $p := (0, 1)$ para resaltar la equivalencia con la construcción clásica a partir del foco y la directriz

de regla y compás no resuelve. De acuerdo a Hull [Hul11] el Axioma 7 (o pliegue de Beloch) es equivalente a encontrar una línea tangente a dos parábolas. Como vimos en la sección anterior, si tomamos un punto sobre un pliegue y lo colocamos sobre un punto exterior utilizando el axioma 3, obtenemos un pliegue tangente a la parábola; así que al organizar la operación utilizando dos puntos sobre dos pliegues diferentes y ubicarlos sobre dos puntos externos diferentes, tenemos un pliegue tangente a dos parábolas⁴ (ver figura 4). De acuerdo a Hull:

“Específicamente, en el plano proyectivo, encontrar tangentes comunes a dos parábolas es el problema doble de encontrar las intersecciones de funciones cónicas, lo cual permite encontrar la solución general de funciones cúbicas.”[Hul11]

Gracias al axioma 7, podemos ahora construir el heptágono (figura 5, paso 3; para el resto de la construcción se utilizan los axiomas 1 al 6, el lector interesado puede descifrarlo) y así alcanzar un hito: Gauss había demostrado que una raíz primitiva de de la unidad $\sqrt[n]{1}$ (en los números complejos) puede ser expresada utilizando las operaciones aritméticas y raíces cuadradas $\sqrt{a}$ si y solo si, es posible la construcción con regla y compás del polígono regular de n lados [GBGL08]. Esta construcción es posible si y solo si n es una potencia de dos o el producto de una potencia de dos multiplicada por números primos de Fermat diferentes, estos son n de la forma $2^t p_1 p_2 \cdots p_k$ [GBGL08].

Los números de Fermat tienen la forma $F_n = 2^{2^n} + 1$, donde $n \in \mathbb{N}$. Los primeros primos de Fermat son 3, 5 y 17 (notemos la ausencia de los primos 7, 11 y 13). No todos los números de esta forma son primos, Euler demostró que F_5 no es primo. Es más, hasta la fecha $F_4 = 65537$ es el último número primo de Fermat encontrado, por lo que desde 1844, Eisenstein planteó la pregunta si existen infinitos números de Fermat [GBGL08].

De acuerdo a Gleason [Gle88], Gauss al demostrar este resultado, afirmó -pero no demostró- que no existía ningún otro polígono regular construible. Sin embargo, al realizar la trisección de un ángulo, nuevos polígonos regulares aparecen, entre ellos el heptágono. Así pues se ha ampliado la lista original a $2^t 3^u p_1 p_2 \cdots p_k$ [Gle88]. No todos los días se llega a resultados más allá de los establecidos por Gauss.

Después de este resultado, es natural preguntarse por la construcción de otros polígonos p -regulares, con p primo que no se encuentran entre los primos de Fermat, como el 11 y el 13; pues nos podrían conducir a ampliar la lista de raíces construibles de la unidad. Sin embargo, ambos polígonos dependen de la trisección de un ángulo, es decir, se pueden plegar con los axiomas del origami⁵ ¿Cierra esto el listado de raíces de la unidad construibles con pliegues de origami?

⁴Es importante anotar que al aplicar el axioma 7 podemos obtener hasta tres pliegues tangentes a dos parábolas.

⁵Existe una definición formal para los números de Origami, sin embargo esta va más allá del alcance de este escrito; el lector interesado puede dirigirse a [Alp99].

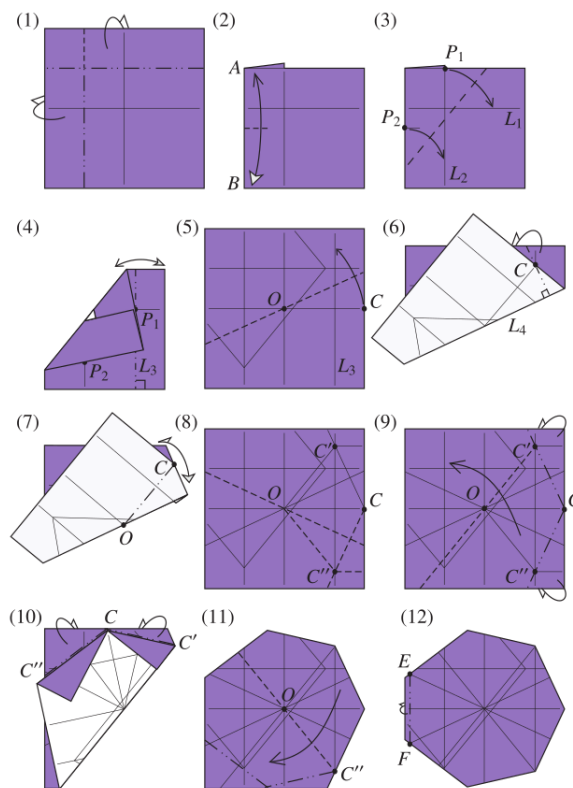


Figura 5: Construcción del heptágono regular [Hul21].

3. El pliegue de una tira de estampillas

Vamos ahora a estudiar la teselación más simple para un origami, una tira de pliegues longitudinales que doblados forman una pila. El problema fue propuesto en 1891 por Emile Lemoine [Leg13]. Teniendo una tira de estampillas del mismo tamaño y plegando solo en sus bordes ¿cuántas configuraciones de pilas de estampillas plegadas existen? [JEK68, Leg13]. Al enumerar las estampillas, osea las caras del origami, el problema consiste en determinar la cantidad de configuraciones posibles en que las estampillas forman una pila válida; las inválidas son aquellas en las que el orden implica atravesar alguna estampilla (con las definiciones expuestas mas adelante -sección 4.5- veremos que se trata de un patrón (C, P) compuesto por pliegues longitudinales -MV- que en su forma plegada tendrán valores de π o $-\pi$. Esto lo cataloga como un origami plano).

Invito al lector a tomar una tira de papel e intentar el ejercicio -con al menos 4 caras- fijando la primera cara y plegando la siguiente arriba o abajo de esta; continúe con la siguiente cara, plegándola y agregándola a la pila en todas aquellas posiciones posibles arriba y abajo, contando cuantas pilas encuentre -hasta el agotamiento o la iluminación-. Mientras se debe preguntar si la cantidad de pilas corresponde a asignar arriba o abajo -MV- en cada pliegue (2^n pliegues); a permutar la posición de las caras en la pila de estampillas ($n!$ pliegues) o algo diferente. Las configuraciones posibles para una tira de 4 estampillas se encuentran en la figura 6.

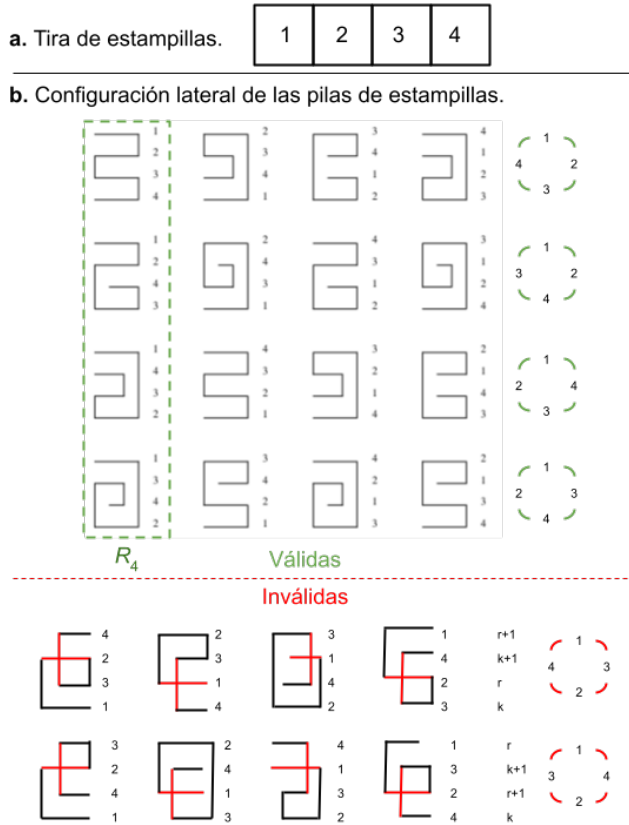


Figura 6: Configuraciones de una tira de 4 estampillas. Al final de cada fila se encuentra la configuración cíclica característica de los pliegues, vera que en ellos puede identificar el lema 1 de Koehler. La primera columna (separada en verde) son los representantes de los ciclos, en este caso $\mathcal{R}_4$. Modificado a partir de [Leg13].

Para descifrar el problema hemos de tomar prestados de la combinatoria y el álgebra abstracta algunos conceptos: una permutación S_n de la tira de estampillas ordenada $(1, 2, \dots, n)$ es un cambio en el orden de las estampillas en donde cada elemento aparece solo una vez. La cantidad de permutaciones de una lista de longitud n es $n!$. Una permutación cíclica es un subconjunto de las permutaciones S_n en el cual la posición de un elemento se mueve cíclicamente. Sean k, r la posición de la estampilla en la tira de estampillas (figura 6.a.); y $p(k), p(r)$ la posición de las estampillas k, r en la pila de estampillas (figura 6.a.). La cantidad de ciclos de longitud n es equivalente a fijar la primera posición y permutar el resto, es decir intercambiar p_k por p_r , por lo que hay $(n-1)!$ permutaciones cíclicas; cada una con un ciclo de longitud n .

Tomemos como ejemplo la tira con $n = 4$ (figura 6.a). El bloque de 16 configuraciones validas se encuentra arriba; abajo, las 8 invalidas (figura 6.b). Tenemos que las permutaciones de las 4 caras son $4! = 24$, representadas por $(4-1)! = 3! = 6$ permutaciones cíclicas (esquema al extremo izquierdo de cada fila en la Figura 6.b). De estas hay 4 ciclos validos (16 configuraciones) y 2 ciclos inválidos (8 configuraciones, figura 6.b.). Compare el ciclo $(1, 3, 4, 2)$ con el $(1, 3, 2, 4)$ (filas 4

y 5 en la figura 6.b.).

Vamos a estudiar las posiciones de las estampillas y sus sucesores. Koehler nota que la pila es invalida cuando existe entre un par k y su sucesor $k+1$, la estampilla r , pero no su sucesora $r+1$ [JEK68]. Para nuestra tira de 4 estampillas estudiemos los pares de estampillas $k = 1, k+1 = 2$; y $r = 3, r+1 = 4$. En el ciclo $(1, 3, 4, 2)$, tenemos que la pareja $p(1) = 1, p(2) = 4$ forman los extremos de la pila de estampillas, por lo que $p(3) = 2$ y $p(4) = 3$ se encuentran al interior (figura 6.b. fila 4). Por el contrario en el ciclo $(1, 3, 2, 4)$, la pareja $p(1) = 1, p(2) = 3$ tiene en su interior a $p(3) = 2$, y en su exterior $p(4) = 4$ por lo que la pila es invalida (figura 6.b. fila 5). Dado que se trata de permutaciones cíclicas, debemos tener en cuenta que la posición al interior de cada pareja es intercambiable, a esto le llaman el orden circular. Koehler caracteriza el patrón que origina las permutaciones cíclicas validas en el siguiente lema [JEK68, Leg13]:

Lemma 1. Una n -permutación p es un pliegue de la tira de estampillas, si y solo si el orden circular

$$p(k) < p(r) < p(k+1) < p(r+1), \quad (1)$$

no ocurre cuando k, r son ambos pares o ambos impares. El orden circular quiere decir cualquier permutación circular de la desigualdad.

Por confuso que parezca, el lector no debe perder de vista que se trata de evaluar en parejas las posiciones de una estampilla y su sucesora.

Las permutaciones cíclicas de longitud n generan una partición de S_n cuyos representante son los ciclos con la estampilla 1 en la primera posición. El conjunto de los representante de las permutaciones cíclicas válidas es $\mathcal{R}_n$, y su complemento $S_n - \mathcal{R}_n$. Tenemos entonces que el conjunto de las configuraciones válidas para una tira de estampillas numerada es $\mathcal{T}_n$ y su cantidad esta dada por [JEK68, Leg13]:

$$\mathcal{T}(n) = n \cdot \mathcal{R}(n)$$

El conjunto $\mathcal{R}_n$ puede construirse inductivamente como un árbol de profundidad n . Para construirlo, fijamos la estampilla 1 y en cada nivel se agrega una estampilla al final de la tira $-(n+1)-$ ubicándola en cada posición valida posible de la pila (figura 7). De acuerdo con Legendre [Leg13], el algoritmo diseñado por Lunnon genera el árbol recursivamente mediante una búsqueda explícita en cada pila. Este proceso ha sido calculado hasta un $n = 45$ y se encuentra en la secuencia A000136 de la enciclopedia de secuencias [23]. Note que el proceso genera un árbol cuya cantidad de ramas no es constante.

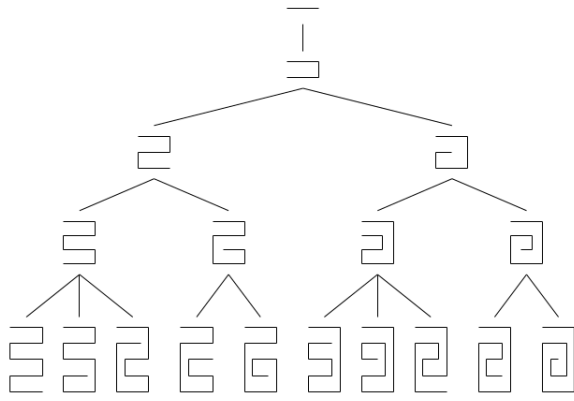


Figura 7: Árbol que describe el conjunto $\mathcal{R}_n$ para $n = 1, \dots, 5$; siguiendo el algoritmo de Lunnon. Tomado de [Leg13].

El estudio de la tira de estampillas se puede generalizar al calcular la cantidad de pilas de estampillas no marcadas. Esta última ha mostrado tener relación con estudios en geometría diferencial, particularmente con el estudio de los meandros [Leg13]. El calculo de la cantidad de pliegues y meandros se relaciona con el de $\mathcal{T}_n$, y este último con $\mathcal{R}_n$. En la tabla 1 se reportan valores calculados para $\mathcal{R}_n$ y $\mathcal{T}_n$ (el lector interesado puede estudiar el trabajo de Stéphane Legendre [Leg13]). Podemos ver como a medida que S_n aumenta, la diferencia con $\mathcal{T}_n$ se profundiza rápidamente.

n	3	4	6	10	20
$\mathcal{R}(n)$	2	4	24	1406	102,511,418
$\mathcal{T}(n)$	6	16	144	114060	2,050,228,360
$S(n) = n!$	6	24	720	3,628,800	$\approx 2,4329 \times 10^{18}$

Cuadro 1: Cantidad de pliegues de una tira de estampillas numerada. Tomada de la enciclopedia en linea de secuencias de números enteros OEIS, secuencia A000136: *Number of ways of folding a strip of n labeled stamps* <http://oeis.org/A000136>.

Hasta ahora, las expresiones obtenidas para $\mathcal{T}_n$ son recursivas, debido a esto su calculo no es una tarea computacionalmente trivial, no termina en tiempo polinomial (como las sumas y multiplicaciones); pero tampoco requiere un tiempos exponencial para terminar (como encontrar la factorización prima de un número). Es precisamente este estado entre los dos grupos el que nos señala un resultado importante demostrado por [BH96]: determinar si un patrón de pliegues (cualquiera, no la tira de estampillas) es globalmente plegable es un problema NP-completo. Vale la pena recordar que decidir si las clases de complejidad P y NP se encuentran completamente contenidas una en la otra, es uno de los problemas del milenio.

4. El origami como superficie

Hasta ahora no nos hemos preocupado por la forma que puede tomar el papel en el pliegue. Para ampliar nuestra perspectiva y rastrear el comportamiento del papel en el espacio necesitamos incluir nuevas herramientas.

Robert Lang [Lan18] encuentra dos características utilizadas ampliamente en las diferentes definiciones matemáticas del origami:

- La forma plegada es una deformación en 3D de una superficie plana que no se estira ni comprime en alguna dirección, es decir es una isometría.

Definición 4.1. (Isometría) Sean X, Y espacios métricos donde $f : X \rightarrow Y$, $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(f(x), f(y))$.

- Las caras del origami no se pueden atravesar una a la otra durante el pliegue; propiedad que se captura con la inyectividad.

Definición 4.2. (Inyectividad) Para cualesquier $a, b \in X$ tal que $f(a) = f(b)$, se cumple que $a = b$.

Note que cuando existe un cruce del papel, los elementos de esta intersección se originan en dos o más caras. Vamos a aprovechar la inyectividad para definir una inmersión [Mor98].

Definición 4.3. (Inmersión) Sean X, Y espacios topológicos diferenciables, una inmersión es una función diferenciable $f : X \rightarrow Y$ si para todo punto $x \in X$ el diferencial

$$D_x f : T_x X \rightarrow T_x Y,$$

entre el espacio tangencial de X , T_x en x , y el espacio tangencial T_y en $f(x)$ es una inyección (uno a uno).

Dado que las caras del origami son rígidas, el gradiente sobre estas es lineal pero discontinuo sobre los pliegues (ver Figura 8). Estas discontinuidades en el gradiente son las que permiten dar forma al papel plegado. A pesar de estas discontinuidades el plegado del papel es continuo y suave (tiene derivadas continuas hasta un grado definido) a trozos⁶: el pliegue de un origami es un mapa rígido a trozos [DMP10]. En la figura 8, tenemos el papel $[0, 1] \times [0, 1]$, sobre el cual aplicamos un mapa rígido a la izquierda, y un mapa no rígido a la derecha [DMP10].

⁶No es suave sobre los pliegues

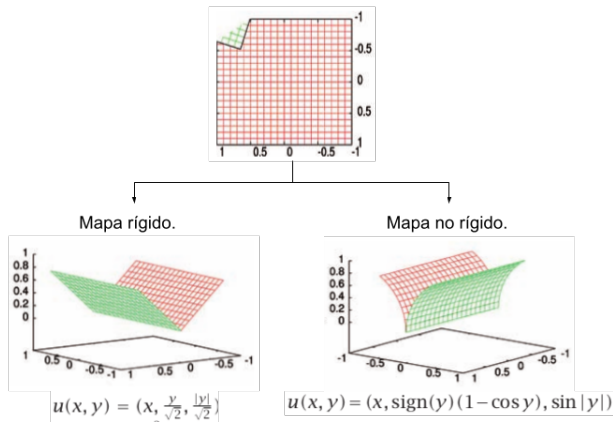


Figura 8: Mapa rígido y mapa no-rígido. Modificado de [DMP10].

Ahora si estamos preparados para definir el origami. Matemáticamente Dacorogna *et al* [DMP10] asociaron la hoja de papel a un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (usualmente $[0, 1] \times [0, 1]$, aunque puede tomar cualquier forma que encierre un área), sobre el cual se realizan pliegues rígidos, obteniendo una estructura en $\mathbb{R}^3$ (figura 9). Lo que les permitió definir la acción de plegar el papel como la función diferenciable a trozos u :

Definición 4.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Un **origami** es una inmersión adecuada de Ω en $\mathbb{R}^3$ identificada por el mapa:

$$u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (2)$$

Donde u es un mapa rígido de Ω en $\mathbb{R}^3$.

Las marcas de los pliegues sobre el papel antes de ser plegado caracterizan el patrón de pliegues (C, P) ⁷. De acuerdo a la orientación del pliegue, en azul se marcan los pliegues Valle -V- y en rojo Montaña -M-; el negro marca los bordes del papel Ω . Los puntos en los que se cruzan los pliegues corresponden a los vértices v ; y las regiones delimitadas por estos, las caras (figura 9). El mapa rígido $u(\Omega)$ esta pues caracterizado por el patrón de pliegues (C, P) [CHHW20]:

Definición 4.5. (Patrón de pliegues (C, P)) El patrón de pliegues de un origami (C, P) , es una inmersión de líneas rectas de un grafo plano $C = (V(C), E(C))$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, donde $V(C)$ es el conjunto de vértices y $E(C)$ el conjunto de pliegues -que se identifican con las aristas del grafo-. Al asignar una cara superior a Ω , le corresponde a cada pliegue una asignación montaña-valle -MV-, operación definida por la función $\mu : E(C) \rightarrow [-\pi, \pi]$, donde $\mu(c) > 0$ es un pliegue valle y $\mu(c) < 0$ uno montaña.⁸

⁷Origami Crease Pattern, por eso (C, P)

⁸La definición original de [CHHW20] establece que $\mu : E(C) \rightarrow \{-1, 1\}$, donde $\mu(c) = 1$ es un pliegue valle y $\mu(c) = -1$ uno montaña, pues se utiliza para origamis planos. Nuestra intención es que funcione para cualquier tipo de pliegue.

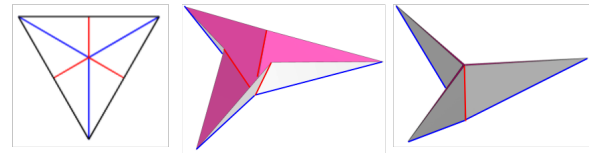


Figura 9: Izquierda: Patrón de pliegues (C, P) de una unidad de la teselación triangular de Resch. Centro y derecha, pliegue del origami: $u(\Omega)$.

Para continuar nuestro estudio, conviene clasificar los origamis de acuerdo al ángulo formado entre caras -ángulo diédrico- en su forma plegada [Lan18].

Definición 4.6. De acuerdo al ángulo diédrico que tiene un origami en su forma plegada, tenemos:

- (Origamis planos) Las caras son planas y coplanares; los pliegues Montaña-Valle tienen ángulos diédricos $\phi = \pm\pi$ únicamente.
- (Origamis poliédricos) Las caras son planas, los pliegues son líneas rectas, pero los ángulos diédricos $\phi \in [-\pi, \pi]$.

4.1. El plegado de un origami plano

Debido a que su forma plegada se encuentra contenida en $\mathbb{R}^2$, en el estudio de los origamis planos es común ignorar el transito de las caras durante el proceso de pliegue lo que simplifica la función $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Para establecer si un vértice del patrón (C, P) es plegable en un origami plano, es suficiente con verificar los siguientes 3 teoremas, denominados en conjunto como las condiciones de pliegue local para un origami plano [Lan18, CHHW20]:

Theorem 1. (Kawasaki-Justin). Sea v un vértice en el interior de un patrón de pliegues de origami, y sean $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ los sectores angulares consecutivos alrededor del vértice (n debe ser par). El vértice es plegable si y solo si:

$$\begin{aligned} \theta_1 - \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \dots - \theta_n &= 0, \\ \sum_{i \text{ impar}}^n \theta_i &= \sum_{i \text{ par}}^n \theta_i. \end{aligned} \quad (3)$$

En la figura 10 a la izquierda tenemos un vértice plano con los pliegues asignados MV. Note que fijando si fijamos un pliegue y cruzamos uno a uno los demás, recorreremos una circunferencia; es decir la suma de los sectores angulares es $\sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi$. Al plegar el vértice, figura 10 derecha, vemos que en una cara se encuentran los sectores angulares impares, en la opuesta se encuentran los pares, esto es consecuencia del teorema de Kawasaki-Justin.

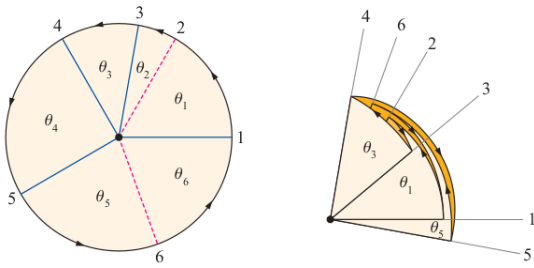


Figura 10: Teorema de Kawasaki Justin. Izquierda, vértice plano con los pliegues MV asignados. Derecha, el pliegue en su forma doblada. Imagen tomada de [Lan18].

Theorem 2. (*Ángulos grande-pequeño-grande -BLB-*). En cualquier vértice, los pliegues en los lados opuestos al sector angular más pequeño al de sus vecinos debe tener asignación MV opuesta.

Sean A, B, C , sectores angulares contiguos en un vértice plano, con el sector angular mas pequeño ubicado en el medio -angulo B -, la asignación MV de los pliegues debe ser opuesta⁹ (figura 11 arriba y en el medios); cuando los pliegues tienen la misma asignación sus caras se intersectan antes de alcanzar el pliegue plano (figura 11 abajo).

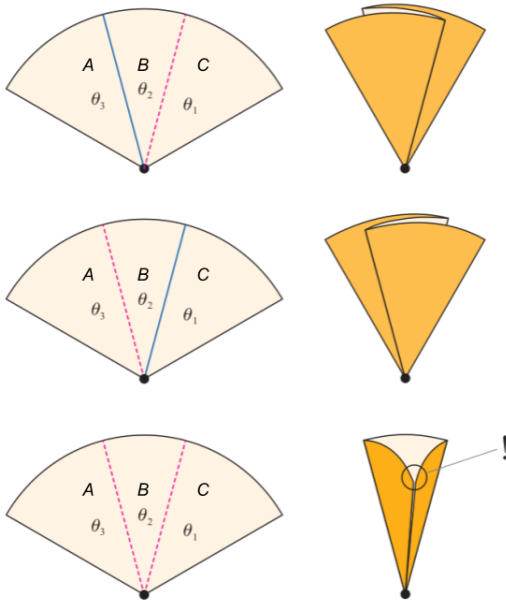


Figura 11: Teorema del ángulo Grande-Pequeño-Grande (Big-Little-Big). Tomado de [Lan18].

Theorem 3. (*Maekawa-Justin MJT*). Para cualquier vértice plegable, sea M el número de pliegues montaña de un origami y V el número de pliegues valle de un origami. Se tiene que

$$M - V = \pm 2. \quad (4)$$

⁹A la asignación opuesta de pliegues se le denomina anto

No se nos debe escapar la similitud del teorema de Maekawa-Justin con el numero característico de Euler $V - E + F = \pm 2$ pues es esta precisamente la que se utiliza para demostrarlo; el lector interesado puede referirse a [Lan18].

Gracias al teorema de Kawasaki-Justin sabemos que el numero de pliegues en cada vértice debe ser par. Cuando $n = 2$ tenemos la tira de estampillas (sección 3), pasemos entonces a $n = 4$. La teselacion de vértices planos de este tipo mas conocida es el patrón de Miura-Ori. En el extremo izquierdo de la figura 12 tenemos su patrón (C, P) . En el resto de la figura vemos el plegado $u(\Omega)$, hasta alcanzar la forma totalmente plegada, que corresponde a una región en $\mathbb{R}^2$ (figura 12 extremo derecho).

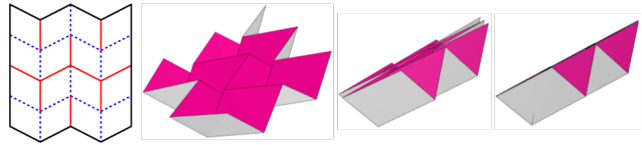


Figura 12: Origami plano de Miura-Ori..

Es momento que abordemos el problema de la complejidad computacional que tiene decidir si un patrón (C, P) es globalmente plegable. El patrón de la figura 13 esta compuesto por vértices que satisfacen las condiciones de pliegue local; sin embargo el pliegue es imposible [GH14]. La rigidez de las caras no permite el pliegue, quien lo intente en papel vera que es la flexibilidad del mismo permite iniciar el doblez, aunque no podrá llevarlo a su forma final, pues esta viola la inyectividad.

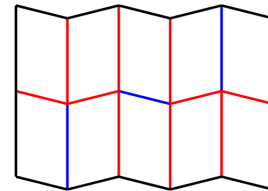


Figura 13: Patrón (C, P) de un pliegue de Miura-Ori compuesto de vértices localmente plegables, pero globalmente imposible [GH14].

Determinar si un patrón de pliegues de Miura-Ori es globalmente plegable a mostrado ser un problema equivalente a colorear con 3 colores un grafo cuadrulado del mismo tamaño, estableciendo una biyección entre los dos objetos [GH14]:

Theorem 4. La cantidad de grafos cuadrulados T coloreados con 3 colores de $m \times n$ y la cantidad de configuraciones localmente plegables de un patrón M de Miura-Ori de $m \times n$ son iguales para todo $m, n \geq 1$, es decir: $T(m, n) = M(m, n)$.

Ahora, no existe una fórmula para calcular la cantidad de grafos cuadrulados coloreados con 3 colores; es más, el problema a demostrado ser $\mathcal{NP}$ -complejo, por lo que la asigna-

ción MV para un pliegue de Miura-Ori que sea localmente plegable también es $\mathcal{NP}$ -complejo [GH14].

4.2. El plegado de un origami: transformaciones lineales, un mundo familiar

Vamos a dejar los origamis planos para ocuparnos de plegar cualquier tipo de vértice y además de rastrear el comportamiento de las caras del origami en el espacio. Afortunadamente la isometría del origami nos permite caracterizar el plegado como una transformaciones lineal junto a una traslación, $x \rightarrow Ax + b$, entre espacios vectoriales en $\mathbb{R}^3$, es decir como una transformación lineal afín [BH02].

No es difícil ver que el cambio en la orientación de un plano en $\mathbb{R}^3$ se puede descomponer en la rotación sobre dos planos ortogonales: θ en el plano xy y ϕ en zy [BH02]. Para utilizar estas ideas en esta formalización, se realiza una pequeña modificación a la definición de origami introduciendo Ω en $\mathbb{R}^3$:

$$u := \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (5)$$

$$(x, y) \rightarrow (x, y, 0) \rightarrow u(x, y, z).$$

Intuitivamente ubicamos el papel Ω sobre el plano xy para utilizar las matrices ortogonales de rotación $R_{xy}(\theta)$ y $R_{yz}(\phi)$ realizando un solo pliegue cada vez. En la figura 14 presentamos dos ejemplos de pliegues poliédricos. En ambos casos tenemos a la extrema izquierda el patrón de pliegues (C, P) del origami; el resto de cada secuencia, muestra la acción de $u(\Omega)$ que puede caracterizarse por la acción de transformaciones lineales afines. Debo realizar una advertencia, esta sección se encuentra cargada de fórmulas, pero el lector no debe desfallecer, solo debe recordar que se trata de aplicar transformaciones lineales sucesivamente. Es probablemente uno de los mundos mas familiares en el estudio de las matemáticas.

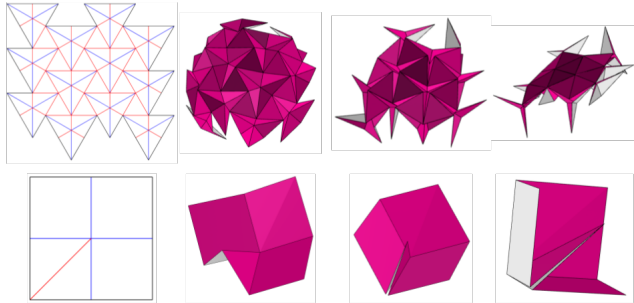


Figura 14: Patrones de pliegues poliédricos. Arriba, la teselación de la triangulación de Resch. Abajo, un vértice de cinco pliegues. $u(l_i) = u(x, y, 0)$,

$$= \begin{cases} L_1 = X_1(x, y, 0), & \text{para } (x, y) \text{ sobre la cara 1.} \\ L_2 = X_1 \times X_2 \times X_1^{-1}(x, y, 0), & \text{para } (x, y) \text{ sobre la cara 2.} \\ L_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3 (X_2^{-1} \times X_1^{-1})(x, y, 0), & \text{para } (x, y) \text{ sobre la cara 3.} \\ \dots, & \dots \\ L_{n-1} = (X_1 \times \dots \times X_{n-2}) X_{n-1} (X_{n-2}^{-1} \times \dots \times X_1^{-1})(x, y, 0), & \text{para } (x, y) \text{ sobre la cara } n-2. \\ L_n = I(x, y, 0). \end{cases} \quad (7)$$

Iniciando con el papel Ω y su patrón de pliegues (C, P) , con vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_s\} \in V(C)$, pliegues $\{e_1, e_2, \dots, e_m\} \in E(C)$, hacemos corresponder el origen $\mathbb{R}^3$ con un vértice de Ω y se establece el sector angular entre los pliegues $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, enumerados en sentido contrario a las manecillas del reloj (note que gracias a la definición de (C, P) conocemos θ entre

cada pliegue). Al doblar el origami, se van formando ángulos entre las caras adyacentes -diédricos- los cuales se numeran a partir del primer pliegue $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ (estos se van desarrollando conforme se pliega el origami); un pliegue montaña (rojo en (C, P)) se encuentra entre $0 \geq \phi \geq -\pi$; mientras que un valle (azul en (C, P)) esta entre $0 \leq \phi \leq \pi$ (figura 14).

Por simplicidad estudiemos primero el doblez de un pliegue de un vértice interno v_i cuando el papel no ha sido deformado. Al cruzar el primer pliegue $e_{(i,1)}$ hacemos que este coincida con el eje x (se aplica $R_{xy}(\theta_1)^{-1}$), se rota la cara sobre el pliegue e_1 aplicando $R_{yz}(\phi_1)^{-1}$ y luego se regresa el pliegue a su nueva posición (aplicando $R_{xy}(\theta_1)$). La transformación lineal para el pliegue $e_{(i,1)}$ es:

$$X_1 = R_{xy}(\theta_1) \times R_{yz}(\phi_1) \times R_{xy}(\theta_1)^{-1},$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_1) & -\sin(\phi_1) \\ 0 & \sin(\phi_1) & \cos(\phi_1) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & 0 \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(6)

Tenemos entonces que el resultado del primer pliegue $L_1 = X_1$. Dado que conocemos únicamente los sectores angulares entre los pliegues del vértice v_i , para realizar el segundo pliegue en $e_{(i,2)}$, es preciso primero deshacer el primer pliegue X_1^{-1} , luego realizar el segundo pliegue X_2 y finalmente rehacer X_1 , osea $L_2 = X_1 \times X_2 \times X_1^{-1}$; podemos ver que se trata de un proceso recursivo:

La última línea del proceso descrito (ecuación 7), apunta a un importante teorema:

Theorem 5. *Dado un patrón de pliegues de un vértice localmente plegable, se tiene $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = I$.*

Sin embargo su recíproco no se mantiene [BH02].

El ejercicio de plegado del origami completo corresponde a repetir este proceso en cada uno de los vértices del origami. Para generar el mapa $u(\Omega)$ nos movemos alrededor del patrón de pliegues (C, P) por un camino cerrado γ que evita los vértices y cruza todas las caras del origami. El proceso de plegado es similar al descrito para un vértice, pero se debe tener en cuenta que: en cada pliegue se debe trasladar el vértice en cuestión al origen (B_k^{-1} , que es una matriz de 4×4^{10}), desdoblar el papel ($X_{(i,j)}^{-1}$), rotar sobre el vértice que se está cruzando ($C_{(i,j)}$), plegarlo de nuevo ($X_{(i,j)}$) y trasladar de nuevo el papel a su posición original (B_k). Así que para el pliegue $e_{i,j}$ del vértice v_i , se tiene:

$$X_{((i,j),k)} = B_k(X_{i,j})C_{i,j}(X_{i,j}^{-1})B_k^{-1}. \quad (8)$$

Realizando el proceso sobre todos los pliegues del camino cerrado γ se tiene que el proceso de plegado es:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x, y, 0, 1) \\ &= X_{((i_1, j_1), k_1)} \times X_{((i_2, j_2), k_2)} \times \dots \times X_{((i_p, j_p), k_p)}(x, y, 0, 1). \end{aligned} \quad (9)$$

Tenemos entonces que para el caso general existe un teorema análogo al teorema 5:

Theorem 6. *Dado un patrón de pliegues globalmente plegable de varios vértices. Dado γ un camino cerrado que no intersecta ningún vértice y que inicia y termina en la cara $F_{i_p, j_p}, \dots$. Sean $e_{(i_1, j_1)}, e_{(i_2, j_2)}, \dots, e_{(i_n, j_n)}$ los pliegues en el orden en que γ las cruza, y sea $X_{((i_t, j_t), k_t)}$ la transformación que representa el pliegue indicado por $e_{(i_t, j_t)}$ después de aplicar la traslación; Tenemos que:*

$$X_{((i_1, j_1), k_1)} \times X_{((i_2, j_2), k_2)} \times \dots \times X_{((i_n, j_n), k_n)} = I.$$

Al igual que en la caso local, el recíproco tampoco se mantiene [BH02]. En general el proceso de plegado utilizando transformaciones afines garantiza la isometría pero no considera la inyectividad, por lo que no existe un mecanismo sencillo que permita identificar cuando esta se viola, incluso para vértices, como el de la figura 15, el cual viola la inyectividad.

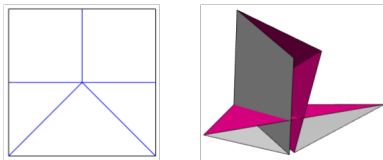


Figura 15: Patrón de pliegues poliédrico imposible [BH02].

¹⁰Las traslaciones en $\mathbb{R}^3$ se realizan con una matriz de 3×4 para incluir el desplazamiento en cualquier dirección en $\mathbb{R}^3$.

5. Curvatura de un Origami

Los métodos hasta acá descritos nos permiten realizar pliegues de origamis planos y diédricos. Sin embargo el estudio geométrico de un pliegue de origami se enriquece con el estudio de su curvatura. La curvatura de una superficie tiene dos perspectivas fundamentales, una extrínseca y una intrínseca [CZ18].

5.1. Breve introducción a la curvatura de una superficie

Sea $I = [0, t] \subset \mathbb{R}$ un intervalo, definimos una curva como el mapa $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ con γ diferenciable. El diferencial $d\gamma$ está dado por el cambio de los vectores tangentes a la curva. Si $X \subset I$ es un vector unitario, tenemos $T = d\gamma(X)$ es un vector unitario tangente a la curva γ (figura 16.a.). El cambio en los vectores unitarios, T tangente a la curva, N , llamado la *normal principal* y B binormal; definen el comportamiento de la curva γ (figura 16.b.). El cambio de T , se puede expresar por el cambio en la dirección del vector unitario N , llamado la *normal principal*; y el cambio en su magnitud $\kappa \subset \mathbb{R}$ llamada la *curvatura* [CdGDS13]:

$$dT = -\kappa N.$$

El cambio en N implica una curva que cambia de dirección; mientras que el cambio en κ es una curva que estira o encoje. En el punto $p \in \gamma$, el círculo osculador S es el que mejor se aproxima a γ , es decir tiene la misma dirección tangente y vector de curvatura κN (figura 16.c, el círculo sombreado es S ; los círculos punteados son tangentes pero con diferente vector de curvatura). Así pues, tenemos que la curvatura $\kappa = 1/r$, donde r es el radio del círculo osculador S [CdGDS13]. El lector interesado en profundizar puede consultar [CdGDS13],

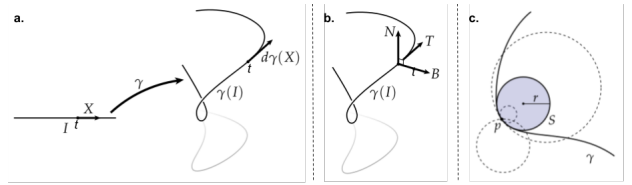


Figura 16: Curvatura de una curva [CdGDS13].

En cualquier punto sobre una superficie las curvaturas principales κ_1 y κ_2 corresponden a los valores máximos y mínimos de todas las *curvas normales* que cruzan el punto. Estas nos permiten definir la *curvatura media*:

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2), \quad (10)$$

y la *curvatura Gaussiana*:

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2. \quad (11)$$

Cuando una superficies cambia su curvatura media, pero no la Gaussiana decimos que se *flexiona*¹¹; es decir la curvatura Gaussiana es invariante a las flexiones. Para cambiar la curvatura Gaussiana es preciso cambiar la métrica de la superficie. En la figura 17 tenemos la misma superficie flexionada. El color representa, a la izquierda, la curvatura media H y su cambio con la flexión de la superficie; a la derecha, la curvatura Gaussiana K la cual permanece invariante a las flexiones.

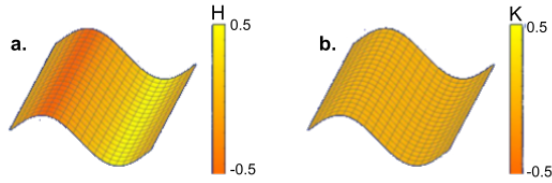


Figura 17: Curvatura de una superficie. Tomado de [CZ18].

Para un observador externo, la superficie de la figura 17.a, se encuentra deformada, es decir puede apreciar el cambio en la curvatura media H de la flexión, por esto la curvatura media representa la *curvatura extrínseca*. Por otro lado, un observador sobre la superficie no percibe este cambio (figura 17.b.), la *curvatura intrínseca* esta representada por la curvatura Gaussiana K que no se ve afectada [CdGDS13, CZ18].

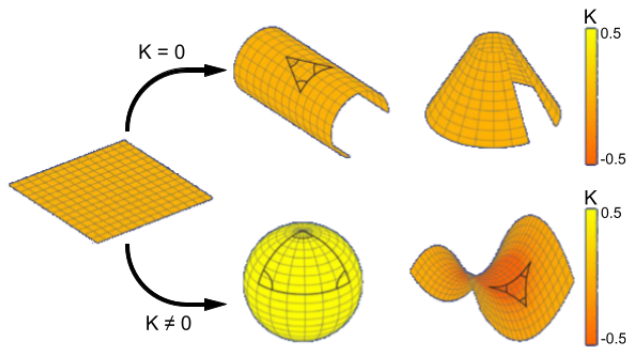


Figura 18: Efecto de las deformaciones sobre un plano. Tomado de [CZ18].

Iniciando con una superficie plana, en donde los ángulos del triángulo suman 180, podemos aplicar cualquier deformación isométrica sin alterar el valor de K , la geometría intrínseca no cambia. Esto lo podemos apreciar en el triángulo sobre el cilindro, el cual mantiene las propiedades del plano (figura 18, arriba). Si por el contrario aplicamos deformaciones no isométricas, modificamos la geometría de la superficie obteniendo superficies esféricas $K > 0$ o hiperbólicas $K < 0$ (figura 18); en la primera la suma de los ángulos de un triángulo son > 180 , para la segunda estos son < 180 [CZ18]. Los origamis, como vimos son isometrías (sección 4.1) por lo que el proceso de plegado solo afecta a H .

5.2. Representación esférica de la curvatura y los origamis

Un patrón de origami (C, P) es plegable rígidamente si la transición del plano a su forma plegada cambia continuamente doblando únicamente sobre los pliegues sin deformar las caras [Huf76, CZ18]; precisamente las condiciones establecidas en nuestra definición de origami (definición 4.4). Para estudiar la curvatura del origami sin embargo H no es una herramienta práctica, pues sobre las caras del origami esta permanece $H = 0$ y sobre los pliegues no se puede definir. Debemos entonces echar mano de la representación esférica de la curvatura de Gauss [Huf76, CZ18].

Consideremos entonces un contorno cerrado y orientado Γ sobre la superficie alrededor de un punto P . Asociamos entonces un vector unitario normal orientado hacia afuera sobre cada punto de Γ , y trasladamos este conjunto de vectores unitarios al centro de la esfera unitaria conservando su dirección. Este conjunto marca un contorno orientado Γ' sobre la superficie de la esfera de Gauss (figura 19.a). La proporción K entre el área F encerrada por el contorno Γ en la superficie; y el área G encerrada por el contorno Γ' sobre la esfera tiende en su límite a la curvatura Gaussiana K [Huf76, CZ18] (figura 19):

$$K = \lim_{\Gamma \rightarrow P} \frac{G}{F} \quad (12)$$

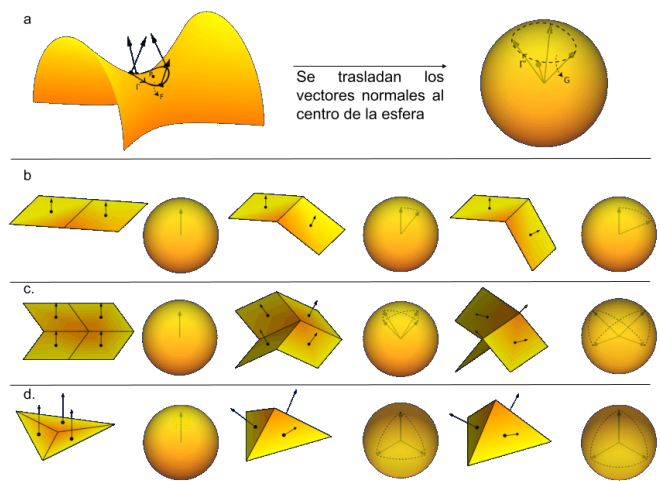


Figura 19: Representación esférica de la curvatura de Gauss. a. Construcción de la representación esférica Gauss. b. Representación del pliegue de una tira de estampillas $n = 2$. c. Vértice de un pliegue de Miura-Ori. d. Un vértice conformado por 3 pliegues, este no puede ser plegado rígidamente. Tomado de [CZ18].

Si bien sabemos que $K = 0$ en los origamis, la aproximación esférica se utiliza para demostrar si un patrón (C, P) es plegable rígidamente. Para evaluarlo se toman los vectores normales a cada cara del origami, se trasladan a la esfera y se conectan replicando el movimiento del pliegue (ver figura

¹¹Bending en ingles

19.b. a 19.c). El contorno encierra un área $0m^2$ cuando el pliegue traza una línea sobre la superficie de la esfera (como en el caso de la tira de estampillas, sección 3, ver figura 19.b.); o cuando el contorno este compuesto por secciones cerradas conectadas cuya suma de áreas sea $0m^2$ [Huf76] (ver figura 19.c. que representa un vértice de Miura-Ori, ver sección 4.1). Esta aproximación fue aprovechada por Huffman para establecer un esquema general para evaluar vértices y teselaciones [Huf76]. Además de haber sido utilizada por Miura para demostrar la imposibilidad de plegar rígidamente varias configuraciones de vértices, entre ellas un vértice compuesto por tres pliegues; estos forman un contorno triangular cuya área es $> 0m^2$, por lo que este vértice no puede ser plegado rígidamente. Así mismo los vértices compuesto por 4 pliegues con la misma asignación forman un contorno con área es $> 0m^2$, por lo que tampoco pueden ser plegados. Este tipo de pliegues puede ser alcanzado si se relaja la condición de rigidez del pliegue, por este motivo estos pliegues pueden ser realizados sobre el papel pues este no es rígido [CZ18].

6. Ejemplo: de un Origami sobre el plano a uno sobre la esfera

Para cerrar, expondré un ejemplo en el cual cambiaremos la geometría intrínseca del origami de una superficie plana $K = 0$ a un origami sobre la superficie esférica $K = 1/r^2$; en términos de nuestra definición 4.4 tendríamos:

$$u : \Omega \subset \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (13)$$

La estrategia utilizada para transformar el patrón de pliegues del plano a la esfera consta de tres pasos: definir el patrón, transformarlo en un disco y finalmente aplicar la proyección estereográfica para obtener el patrón de pliegues (C, P) sobre la superficie esférica.

Vamos entonces a trabajar con la triangulación de Resch cuya forma plegada corresponde a un origami diédrico que expone una superficie plana de menor área (ver figura 20). El patrón se construye a partir de un triángulo equilátero cuyas puntas tocan las mediatrices de los triángulos equiláteros vecinos. Note que las columnas del patrón se organizan con la base del primer triángulo, colocando el siguiente sobre su punta; mientras que tocando la mediatriz lateral de este triángulo base, se ubica un nuevo triángulo que sera la base de la columna siguiente (triángulos resaltados en naranja en la figura 20.a.). Esta serie de dos columnas se repiten longitudinalmente y es la base de esta construcción. Sin embargo la unidad básica de su simetría es el triángulo rectángulo formado unido al triángulo equilátero que se señala en morado hacia el centro de la figura 20.a. Note que sobre el patrón se ha trazado una cuadrícula, longitudinal que atraviesa las bases, mediatrices y puntas de los triángulos del pliegue (líneas solidas, figura 20.a.); y unas verticales que atraviesan las esquinas y el centro de los (líneas punteadas, figura 20.a.), estas serán importantes en la transformación al disco.

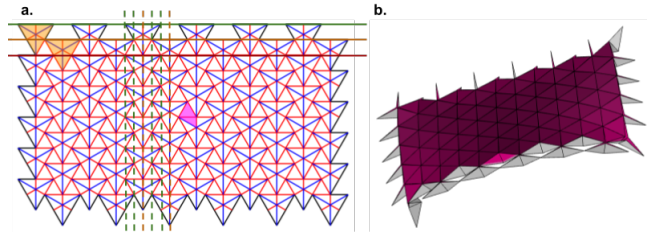


Figura 20: Triangulación de Resch. Izquierda, patrón (C, P) con 6 filas y 12 columnas. Derecha patrón plegado

Para transformar el patrón en un disco manteniendo el número de elementos (los triángulos); transformamos las líneas verticales (punteadas) en radios separados por un ángulo θ , que depende de la cantidad de columnas n que tiene el pliegue: $(1 + \frac{1}{3}) \cdot n$. Para transformar las líneas longitudinales en círculos concéntricos, debemos tener en cuenta la disminución del tamaño del radio dada por: $d = 2r^2(1 - \cos(\theta))$. La cantidad de círculos concéntricos depende del número de filas m que tiene el pliegue: $2m + 1$. Con esto es suficiente para construir el disco.

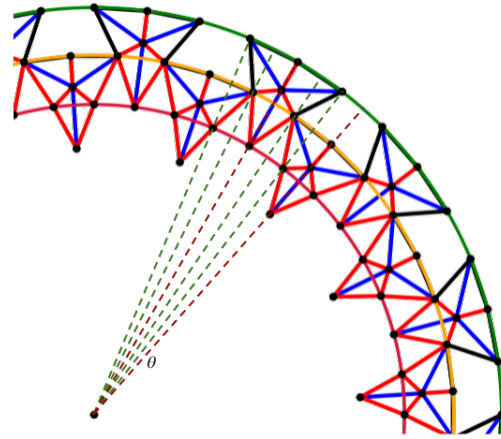


Figura 21: Esquema de la transformación del patrón de Resch en un disco.

En el patrón de pliegues sobre el disco, el tamaño de los triángulos cambia al movernos hacia o desde el interior; es decir se ha modificado la geometría intrínseca del origami, cada círculo concéntrico cambia la curvatura $K = 1/r^2$ pues disminuye el radio. Este fenómeno se observa intuitivamente en las espirales que se forman entre las bisectrices del patrón de pliegues (siga los pliegues valle en la figura 22.a.). Si queremos plegar el disco es necesario relajar la condición de rigidez impuesta. Al plegarlo forma una cubierta esférica, paso de $K = 0$ a $K > 0$ (figura 22.b.).

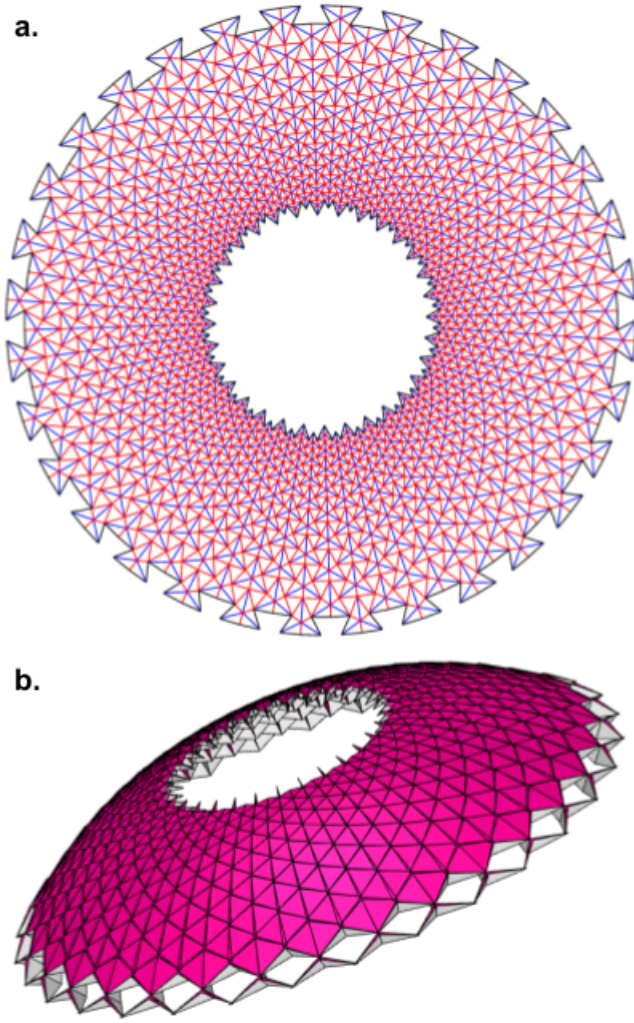


Figura 22: a. Patrón de pliegues de la triangulación de Resch en un disco. b. disco plegado.

Pero si queremos mantener la isometría del origami, es preciso que la forma extendida y la forma plegada tengan la misma curvatura intrínseca. Para esto aplicamos la proyección estereográfica sobre el disco para ajustar el patrón de pliegues (figura 23):

$$\begin{aligned}
 (x, y) &\rightarrow (x', y', z'), \\
 x' &= \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \\
 y' &= \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \\
 z' &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

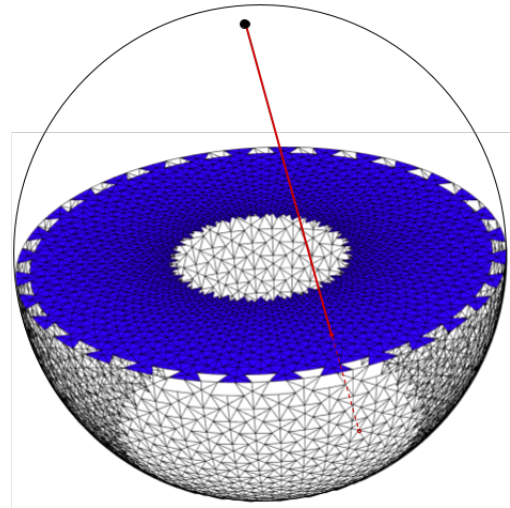


Figura 23: Proyección estereográfica del disco a la superficie esférica.

Con esto hemos creado un patrón de pliegues (C, P) con curvatura $K = c$ con c constante, que es precisamente lo que buscamos. Al plegar el origami, vemos como este mantiene su curvatura.

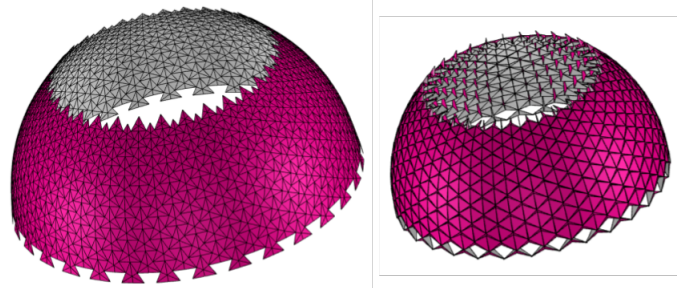


Figura 24: Origami Esférico.

Con esto podemos definir el origami esférico como:

Definición 6.1. Sea $\Phi \subset \mathbb{S}^2$. Un **origami esférico** es una inmersión adecuada de Φ en $\mathbb{R}^3$ identificada por el mapa:

$$v : \Phi \subset \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3. \tag{15}$$

Donde v es un mapa rígido de Φ en $\mathbb{R}^3$.

7. Perspectivas

Hemos dado un rápido tour sobre las matemáticas desarrolladas alrededor de los Origamis. Su estudio como objeto matemático, muestra una gran flexibilidad pues las herramientas acá expuestas pasan por varios campos, desde la axiomatización misma de los origamis, a la combinatoria, la geometría e incluso hemos tocado conceptos topológicos. Considero que la profundización de sus propiedades desde la teoría de grafos y el estudio de las simetrías del patrón de pliegues (es

decir desde el álgebra abstracta) pueden enriquecer el campo. Finalmente debo resaltar acá dos grandes propiedades de los origamis que señalan su potencial, por un lado la construcción de los números de origami [Gle88, Alp99]; y por otro, haber establecido que el problema de definir si un patrón de pliegues (C, P) es plegable, pertenece a la clase de complejidad computacional NP -completa.

7.1. Nota

La mayoría de imágenes fueron creadas con las librerías Rabbit Ear [KHO23] y Origami simulator [Gha23]; ambas iniciativas de código abierto. La mayoría de los códigos acá utilizados los pueden encontrar en mi `gitHub`: https://github.com/dan131/origami_curvatura.

Referencias.

- [23] A000136: Number of ways of folding a strip of n labeled stamps (2023). <http://oeis.org/A000136>.
- [Alp99] Roger Alperin, *A mathematical theory of origami constructions and numbers*, arXiv (1999), available at math/9912039.
- [BH02] Sarah-Marie Belcastro and Thomas C. Hull, *Modelling the folding of paper into three dimensions using affine transformations*, Linear Algebra and its Applications **348** (2002), no. 1, 273-282.
- [BH96] Marshall Bern and Barry Hayes, *The complexity of flat origami*, ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, United States, 1996. <https://www.osti.gov/biblio/416799>.
- [CZ18] Sebastien J.P. Callens and Amir A. Zadpoor, *From flat sheets to curved geometries: Origami and Kirigami approaches*, Materials today **21** (2018), no. 3.
- [CHHW20] Alvin Chiu, William Hoganson, Thomas C. Hull, and Sylvia Wu, *Counting flat-foldable origami configurations via 3-coloring graphs*, Graphs and Combinatorics (2020).
- [DMP10] Bernard Dacorogna, Paolo Marcellini, and Emanuele Paolini, *Origami and Partial Differential Equations*, Notices of the AMS (2010).
- [GH14] Jessica Ginepro and Thomas C. Hull, *Counting Miura-ori Foldings*, J. Integer Seq. **17** (2014), 14.10.8.
- [Gle88] Andrew M. Gleason, *Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon*, The American Mathematical Monthly **95** (1988), no. 3, 185-194. <https://doi.org/10.1080/00029890.1988.11971989>.
- [GBGL08] Timothy Gowers, June Barrow-Green, and Imre Leader, *The Princeton companion to Mathematics*, Princeton university press, USA, 2008.
- [Huf76] David A. Huffman, *Curvature and creases: Aprimer on paper*, IEEE Transactions on computers **25** (1976), no. 10.
- [Hul11] Thomas Hull, *Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill*, The Mathematical Association of America (2011).
- [Hul13] ———, *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics, Second Edition*, A K Peters/CRC Press, 2013. <https://doi.org/10.1201/b14320>.
- [Hul21] ———, *Origametry: Mathematical methods in paper folding*, Cambridge, 2021.
- [CdGDS13] Keenan Crane, Fernando de Goes, Matheiu Desbrun, and Peter Schröder, *Discrete Differential Geometry: An applied Introduction*, ACM, 2013.
- [JEK68] John E. Koehler, *Folding a strip of stamps*, Journal of Combinatorial Theory **5** (1968), no. 2, 135-152, DOI [https://doi.org/10.1016/S0021-9800\(68\)80048-1](https://doi.org/10.1016/S0021-9800(68)80048-1).
- [Gha23] Amanda Ghassaei, *Origami Simulator* (2023). <https://origamisimulator.org/>.
- [KHO23] Robby Kraft, Martin Hunt, and Origamimagiro, *Rabbit Ear Book* (2023). <https://rabbitear.org/book/>.
- [Lan96] Robert J Lang, *Origami and Geometric Constructions* (1996). https://www.langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf.
- [Lan18] Robert J. Lang, *Twist, tilings and tessellations. Mathematical methods for Geometric origami*, CRC Press, England, 2018.
- [Leg13] Stéphane Legendre, *Foldings and Meanders*, posted on 2013, DOI 10.48550/ARXIV.1302.2025. <https://arxiv.org/abs/1302.2025>.
- [Mor98] Shigeyuki Morita, *Geometry of differential forms.*, American Mathematical Society, 1998.
- [Wei23] Eric W. Weisstein, *Smooth Function. From MathWorld—A Wolfram Web Resource.* (2023). <https://mathworld.wolfram.com/SmoothFunction.html>.

Acerca del autor: Mientras construía este artículo me encontraba leyendo Moby Dick. Biólogo UNAL y Matemático de la Konrad. Interesado en los productos de la imaginación.

CURVAS QUE RELLENAN EL ESPACIO Y SU USO EN EL ANÁLISIS DE IMÁGENES DIGITALES

Samuel Alberto Luna A. *

samuela.lunaa@konradlorenz.edu.co

1. ¿Sobre qué estamos hablando?

En este momento, antes de empezar cualquier explicación teórica o monótona, invitamos al lector a realizar un ejercicio mental o práctico, si así lo desea. Primero hay que tomar un cuadrado de dimensión $n \times n$ y dividirlo en cuatro partes iguales formando una cruz en el centro. Ahora nos podemos preguntar ¿de qué forma puedo unir el centro de cada uno de los cuatro subcuadrados formados utilizando una línea continua? Bueno, seguramente existe más de una forma pero no son demasiadas, entonces ¿qué pasa si ahora a cada subcuadrado lo volvemos a dividir de la misma manera? Claramente las posibilidades aumentaron considerablemente y el lector habrá podido crear patrones llamativos que se pueden dibujar múltiples veces conforme se repite el proceso de división de manera indefinida.

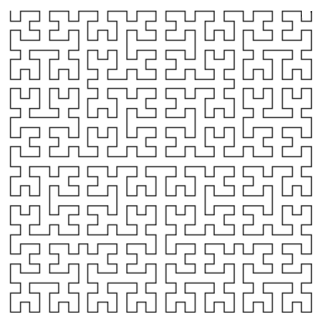


Figura 1: Curva de Hilbert en su quinta iteración. Imagen generada mediante Python.

Lo que se está creando con el anterior ejercicio es una correspondencia, y en consecuencia una función ϕ sobreyectiva, entre espacios de diferentes dimensiones, particularmente entre el intervalo unitario $[0, 1]$ y el cuadrado unitario $[0, 1]^2$. Realmente esta es una correspondencia demostrada por el reconocido matemático G. Cantor en 1878, de donde se desprendieron múltiples investigaciones para definir lo que hoy conocemos como *Curvas que rellenan el espacio*. Un año después, E. Netto demostró que dicha función ϕ no puede ser continua ya que implicaría una "desconexión" dentro de $[0, 1]^2$; y así, surgió el problema de buscar dicha función ϕ sobreyectiva y continua entre el segmento unitario y el

cuadrado unitario, o como el lector puede intuir, también para el cubo unitario $[0, 1]^3$ (Sagan, [Han91]).

A finales del siglo XIX, G. Peano definió la primera curva que rellena el espacio de la siguiente manera

$$f(0 \cdot 3 t_1 t_2 \dots) = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 t_1 (k^{t_2} t_3) (k^{t_2+t_4} t_5) \dots \\ 0 \cdot 3 (k^{t_1} t_2) (k^{t_1+t_3} t_4) \dots \end{pmatrix},$$

siendo $kt_j = 2 - t_j$, con $t_j = 0, 1, 2$, y demostrando que es una función continua y sobreyectiva ¹ de $[0, 1]$ en $[0, 1]^2$. Tomando como base la idea de Peano, un año después, David Hilbert definió su propia curva que rellena el espacio mediante una construcción iterativa y geométrica, que a su vez permitiría mejorar el resultado de Peano y de muchos otros grandes matemáticos de la época. De esta manera, y similar a la construcción de un cadáver exquisito, la teoría sobre las curvas que rellenan el espacio se fue creando mediante pequeños o grandes aportes que solo hasta la actualidad, o al menos a finales del siglo pasado, fueron organizados, comprendidos y utilizados para más que solo matemáticas (Sagan, [Han94]).

2. La curva de Hilbert

Las curvas que rellenan el espacio muestran la relación entre un espacio unidimensional y otro n-dimensional, para el caso de dos dimensiones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, la curva más estudiada es la de Hilbert. Esta curva, como muchas otras, se basa en el proceso iterativo de aplicar una o varias transformaciones específicas sobre un "estado" inicial. La idea principal de Hilbert es la siguiente: para la primera iteración dividiremos el intervalo $\mathcal{I} = [0, 1]$ en cuatro subintervalos de igual longitud, luego cada uno de ellos se pone en correspondencia con un subcuadrado, una partición del cuadrado unitario $\mathcal{Q} = [0, 1]^2$ que también fue dividido en cuatro partes iguales. Para las siguientes iteraciones debemos repetir el mismo proceso considerando a cada subintervalo como el nuevo intervalo inicial $\mathcal{I}$, análogamente para los subcuadrados.

Ahora, dos aspectos esenciales para el proceso son: preservar la continuidad y preservar la adyacencia que existe entre los subintervalos al momento de relacionar dos cuadrados adyacentes. Teniendo en cuenta estos aspectos, el pro-

*Egresado Departamento de Matemática, Fundación Universitaria Konrad Lorenz.

¹El subíndice en el punto decimal dentro de f representa la base de los dígitos decimales.

ceso, tal como Hilbert lo planteó en un principio, es el siguiente: dada la representación cuaternaria de un número $t = 0.4q_1q_2q_3\dots q_k$,

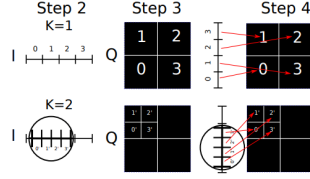


Figura 2: Construcción de la curva de Hilbert. Tomado de [EEMG17].

1. $I_0 = \{t : 0 \leq t \leq 1\}$, y $Q_0 = \{(\xi, \eta) : 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$
2. Realizar la partición en cuartos del intervalo $I_{0.4q_1q_2\dots q_k} = I_{0.4q_1q_2\dots q_k0} \cup I_{0.4q_1q_2\dots q_k1} \cup I_{0.4q_1q_2\dots q_k2} \cup I_{0.4q_1q_2\dots q_k3}$.
3. Análogamente se realiza la partición en cuartos del cuadrado inicial $Q_{0.4m_1m_2\dots m_k} = Q_{0.4m_1m_2\dots m_k0} \cup Q_{0.4m_1m_2\dots m_k1} \cup Q_{0.4m_1m_2\dots m_k2} \cup Q_{0.4m_1m_2\dots m_k3}$.
4. Aplicar la correspondencia $I_{0.4q_1q_2\dots q_k} \rightarrow Q_{0.4m_1m_2\dots m_k}$ de tal manera que se satisfaga la condición de adyacencia y continuidad.
5. Tomar $k = k + 1$ y volver al paso 2.

De esta manera cada $t \in \mathcal{I}$ será determinado por una secuencia de intervalos cerrados anidados cuya longitud tiende a cero. A cada secuencia le corresponderá entonces una única secuencia de cuadrados cerrados cuyas diagonales tienden a un único punto en $\mathcal{Q}$. Así entonces, si $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{Q}$, $f(\mathcal{I})$ será llamada Curva de Hilbert. Lo interesante de esta construcción geométrica es que permite probar de manera simple que la curva de Hilbert es una curva que rellena el espacio, además de otras varias características (Sagan, [Han94]).

Teorema 2.1. *La curva de Hilbert es continua, sobreyectiva y no diferenciable en ningún punto.*

Particularmente, para demostrar la no diferenciable de la curva, se utilizó el siguiente criterio: sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Si hay dos secuencias $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, en donde $0 < a_n \leq t < b_n < 1$, y $\{a_n\} \rightarrow t$, $\{b_n\} \rightarrow t$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(b_n)}{(a_n - b_n)}$$

no existe, entonces f es no diferenciable en el punto t . Este criterio será recurrente dentro de todas las demostraciones de esta índole para las otras curvas que rellenan el espacio.

Demostración. vamos a verificar cada una de las tres consecuencias del teorema:

(i). Considérese la iteración k -ésima para generar la curva de Hilbert. Sea $f^{(k)}$ la gráfica de la curva de Hilbert en la iteración k , y sea t_1 y $t_2 \in \mathcal{I}$ tales que

$$|t_1 - t_2| < \frac{1}{4^k},$$

entonces el intervalo $[t_1, t_2]$ interseca por mucho a dos subintervalos en $\mathcal{I}$, y como sus imágenes deben estar en subcuadrados adyacentes, la máxima distancia entre $f^{(k)}(t_1)$ y $f^{(k)}(t_2)$ es la diagonal que se forma entre los cuadrados adyacentes, entonces

$$|f^{(k)}(t_1) - f^{(k)}(t_2)| < \frac{\sqrt{5}}{2^k}.$$

(ii). Sea $p \in \mathcal{Q}$, entonces existe una sucesión de subcuadrados cuya intersección es p . Ahora, como esta sucesión de subcuadrados tiene asociada una sucesión de subintervalos cuya longitud tiende a 0, ella también define un único punto $t \in \mathcal{I}$, tal que $f(t) = p$.

(iii). Sean $f^{(k)} = (\phi, \psi)$ las funciones coordenadas de $f^{(k)}$. Si tenemos en cuenta el criterio de no diferenciable, al fijar $t \in \mathcal{I}$ y $k \geq 3$, tomemos t_n de tal modo que

$$|t - t_n| \leq \frac{10}{4^k},$$

y además $f^{(k)}(t)$ esté separado horizontalmente de $f^{(k)}(t_n)$ por al menos un subcuadrado, esto es

$$|\phi(t) - \phi(t_n)| \geq \frac{1}{2^k},$$

gracias a la forma en la que se organizan los subcuadrados de un orden específico. Entonces se tiene que

$$\frac{|\phi(t) - \phi(t_n)|}{|t - t_n|} \geq \frac{1/2^k}{10/4^k} = \frac{2^k}{10},$$

y así podemos ver que al tomar $k \rightarrow \infty$, el límite se va al infinito, por lo que ϕ es no diferenciable en t , análogamente para ψ . $\square$

Estas demostraciones fueron tomadas de (Sagan, [Han94]) y están basadas plenamente en los aspectos geométricos de la curva. Y aunque el proceso es largo, mediante un conjunto de transformaciones complejas aplicadas al cuadrado unitario inicial, se puede definir una función $f(1)$ para facilitar el cálculo exacto de las imágenes del segmento unitario y con la cual se puede demostrar analíticamente el previo teorema.

$$f(0.q_1q_2q_3\dots) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} (-1)^{e_{0j}} \text{sgn}(q_j) \begin{pmatrix} (1-d_j)q_j - 1 \\ 1-d_jq_j \end{pmatrix} \quad (1)$$

Para esto vamos a implementar una representación compleja de las transformaciones. Esto implica que ahora Q va a representar al cuadrado unitario complejo, entonces para

$z \in \mathbb{C}$ primero se reduce el tamaño a razón de $1/2$ en dirección al origen ($z' = 1/2z$), después se rota el cuadrado 90° ($z'' = z'i$) y luego se refleja sobre el eje imaginario ($z''' = \bar{z}''$). Al final, la composición de estas transformaciones da como resultado al cuadrado $[0, 1/2]^2$. Entonces, la denotaremos

$$\mathfrak{H}_0 z = \frac{1}{2} \bar{z} i, \quad (2)$$

para el cuadrado $[0, 1/2] \times [1/2, 1]$ simplemente reducimos el cuadrado como antes y después se traslada media unidad hacia arriba de la siguiente manera

$$\mathfrak{H}_1 z = \frac{1}{2} z + \frac{i}{2}, \quad (3)$$

para el cuadrado en la esquina superior derecha $[1/2, 1] \times [1/2, 1]$ reducimos el cuadrado y desplazarlo media unidad a la derecha y hacia arriba

$$\mathfrak{H}_2 z = \frac{1}{2} z + \frac{i}{2} + \frac{1}{2}, \quad (4)$$

y por último, para el cuadrado en la esquina inferior derecha se reduce el cuadrado, se gira -90° y se hace una reflexión, después se traslada una unidad a la derecha y media unidad hacia arriba

$$\mathfrak{H}_3 z = -\frac{1}{2} \bar{z} + \frac{i}{2} + 1. \quad (5)$$

Esta construcción compleja de las transformaciones es común en todos los escritos sobre las curvas que rellenan el espacio, suelen variar en la notación, particularmente aquí estamos siguiendo la notación de [Han94] y en su mayoría el desarrollo mostrado en la tesis [Gan19]. Por otro lado, existe una ventaja (no "aleatoria") por la que Hilbert decidió utilizar la representación cuaternaria de los números racionales dentro de $\mathcal{J}$, y es que facilita el rastreo o localización de dichos números dentro del intervalo o el cuadrado unitario. Si consideramos un punto $t \in \mathcal{J}$ con su respectiva representación cuaternaria $t = 0.4 q_1 q_2 q_3 \dots$, donde $q_j = 0, 1, 2, 3$, sabemos que para la primera partición, t estará en el subintervalo q_1 , entonces su imagen estará en el subcuadrado q_1 de la primera partición, visto en términos de las transformaciones, $f(t) \in \mathfrak{H}_{q_1} \mathcal{Q}$. Después, su imagen estará en el subcuadrado q_2 de la segunda partición, que a su vez estará dentro del subcuadrado q_1 de la primera partición, esto es $f(t) \in \mathfrak{H}_{q_1} \mathfrak{H}_{q_2} \mathcal{Q}$. Y si se sigue este razonamiento hasta el infinito se obtiene que

$$f(t) = \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathfrak{H}_{q_1} \mathfrak{H}_{q_2} \mathfrak{H}_{q_3} \dots \mathfrak{H}_{q_k}(\mathcal{Q}). \quad (6)$$

Al desarrollar todo un análisis sobre las composiciones de estas transformaciones se consigue una representación aritmética compleja de la curva

$$\begin{aligned} \phi(0.4 q_1 q_2 q_3 \dots) + i\psi(0.4 q_1 q_2 q_3 \dots) = \\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{e_{3j}}}{2^j} \operatorname{sgn}(q_j) [(q_j - 1) + (-1)^{d_j} i] \\ + \exp \left[\frac{i\pi d_j}{2} + (-1)^{d_j} i \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (q_j - 1)^2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Aun así, esta función se puede seguir simplificando si se continua con la descomposición en su parte real e imaginaria, obteniendo así el siguiente conjunto de transformaciones de similitud:

$$\mathfrak{H}_n \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} H \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \frac{1}{2} h \triangleq \frac{1}{2} [H, h] \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (7)$$

donde H representa una matriz ortogonal 2×2 que puede tomar los valores de

$$H_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, H_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H_V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y h es un vector de traslación que puede tomar los siguientes valores:

$$h_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, h_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, h_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De esta manera se forman las tuplas $[H, h]$ que representan una transformación de similitud, y el conjunto de cuatro transformaciones de similitud dará como resultado una curva de Hilbert. Así, al continuar con el análisis sobre las posibles combinaciones y composiciones de $[H, h]$ es que se llega a la representación aritmética por excelencia de la curva de Hilbert:

$$f(0.4 q_1 q_2 q_3 \dots) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} (-1)^{e_{0j}} \operatorname{sgn}(q_j) \begin{pmatrix} (1 - d_j) q_j - 1 \\ 1 - d_j q_j \end{pmatrix}.$$

A modo de resumen, se van a ilustrar un par de ejemplos sobre cómo utilizar las ideas desarrolladas en esta sección:

Ejemplo (1). Sea $t = 0.546875$, un número real que pertenece al intervalo unitario. Primero se representa a t con su expansión cuaternaria, $t = 0.203$, entonces.

$$\begin{aligned} f(0.203) &= \mathfrak{H}_2 \mathfrak{H}_0 \mathfrak{H}_3(0), \\ &= \mathfrak{H}_2 \mathfrak{H}_0 \left(1 + \frac{i}{2} \right), \\ &= \mathfrak{H}_2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right), \\ &= \frac{5}{8} + \frac{3}{4} i. \end{aligned}$$

Ejemplo (2). Se toma el mismo valor de $t = 0.203$, pero esta vez se busca ilustrar el uso de la función aritmética. Entonces siguiendo sus respectivas definiciones, $e_{01} = 0$, $e_{02} = 0$, $e_{03} = 1$, $e_{31} = 0$, $e_{33} = 0$; por otro lado $d_1 = 0$, $d_2 = 0$ y $d_3 = 1$, entonces al reemplazar se obtiene

$$\begin{aligned} f(0.203) &= (1/2)(-1)^0 \begin{pmatrix} 1, 2-1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 + (1/8)(-1)^1 \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-1, 3 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 5/8 \\ 3/4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ambos ejemplos llegan al mismo resultado, el cuarto subcuadrado de la tercera partición dentro del primer subcuadrado de la segunda partición dentro del tercer subcuadrado de la primera partición. La única diferencia radica en las operaciones necesarias para llegar al resultado, pues probablemente el primer ejemplo a simple vista parece más fácil, pero el poder computacional que tiene el segundo ejemplo es mayor gracias a su simpleza operacional.

3. La curva que lo originó todo

Como se mencionó brevemente en la introducción, fue Peano quien introdujo la primera curva que rellena una superficie, de manera muy diferente a como la planteó Hilbert unos años después. Peano definió su curva de la siguiente manera:

$$f(0 \cdot_3 t_1 t_2 t_3 \dots) = \begin{pmatrix} 0 \cdot_3 t_1 (k^{t_2} t_3) (k^{t_2+t_4} t_5) \dots \\ 0 \cdot_3 (k^{t_1} t_2) (k^{t_1+t_3} t_4) \dots \end{pmatrix}, \quad (8)$$

donde $kt_j = 2 - t_j$, con $j = 0, 1, 2$, y entonces k^n será la n -ésima iteración de k .

Aun así, dentro de todo el proceso de creación que realizó Peano en 1890 nunca se vislumbró una representación geométrica de la función f , fue solo hasta que Hilbert introdujo su propia curva que se pensó en hacer lo mismo con la curva que rellena el espacio de Peano.

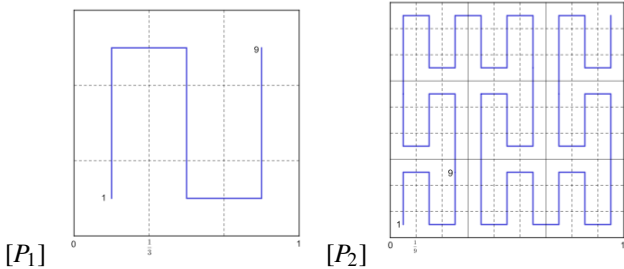


Figura 3: Las dos primeras iteraciones de la curva de Peano.

Teniendo en cuenta la distribución de los subcuadrados, así como se ve en la figura anterior, el primer subcuadrado estará en la esquina inferior izquierda y el último estará en la esquina superior derecha, enumerados desde el 1 hasta el 9 siguiendo un movimiento de "serpenteo". Esto responde a que Peano construyó su función utilizando los dígitos decimales en base 3, a diferencia de Hilbert que lo hizo en base 4. Aun así, el proceso geométrico para su construcción es análogo ya que se vuelve a crear la correspondencia entre subsegmentos y subcuadrados.

- Primero se divide el intervalo unitario $\mathcal{I}$ en nueve subintervalos congruentes $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_9$ y de igual manera se divide el cuadrado unitario $\mathcal{Q}$ en nueve subcuadrados congruentes $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_9$. Observe que la longitud de cada subcuadrado ahora es de $1/3$.

- De manera semejante a la curva de Hilbert, a cada $\mathcal{I}_k$ le corresponderá un $\mathcal{Q}_k$ con $k = 1, 2, \dots, 9$ manteniendo la adyacencia de los intervalos con los subcuadrados adyacentes.
- Ahora se repite el proceso en cada iteración para generar nueve nuevos subcuadrados dentro de los anteriores ya existentes, preservando la inclusión de subintervalos y subcuadrados.

Así entonces, el primer intervalo de la primera iteración, $[1, \frac{1}{9}]$ estará relacionado con el primer cuadrado, $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ con el segundo cuadrado y así sucesivamente, por lo que el intervalo $[\frac{j-1}{9}, \frac{j}{9}]$ estará sobre el cuadrado $j = 1, 2, 3, \dots, 9$, según la distribución dada en la figura 3. De esta forma se construye la curva geométrica de Peano, pero al igual que con la curva de Hilbert, existen transformaciones que aplicadas sobre $\mathcal{Q}$ dan como resultado la misma curva.

Por último, vamos a demostrar la no diferenciabilidad de la curva, como un aspecto relevante de las curvas que rellenan el espacio. La historia de la no diferenciabilidad para la curva de Peano es cuanto menos curiosa, pero si se piensa bien, muy común en la historia de las matemáticas. Es similar a la historia del último teorema de Fermat, pues se presenta el resultado trascendental, pero no su demostración por cuestión de espacio, relevancia o simplemente porque no existía más que pura fe en el resultado. No fue sino hasta diez años después que el mismo Moore, en [Moo00], presentó la demostración de que la curva de Peano no es diferenciable en ningún punto, aquí se presenta una demostración simple, planteada por Sagan en (Sagan, [Han91]), capítulo 3, pp. 34.

Teorema 3.1. *La curva de Peano, definida como*

$$f(0 \cdot_3 t_1 t_2 t_3 \dots) = \begin{pmatrix} 0 \cdot_3 t_1 (k^{t_2} t_3) (k^{t_2+t_4} t_5) \dots \\ 0 \cdot_3 (k^{t_1} t_2) (k^{t_1+t_3} t_4) \dots \end{pmatrix},$$

donde $kt_j = 2 - t_j$, con $j = 0, 1, 2$, y k^n es la n -ésima iteración de k , no es diferenciable en ningún punto.

Demostración. Para cualquier $t = 0 \cdot_3 t_1 t_2 t_3 \dots t_{2n} t_{2n+1} \dots \in [0, 1]$, definimos $t_n = 0 \cdot_3 t_1 t_2 t_3 \dots t_{2n} \tau_{2n+1} t_{2n+2} \dots$, con $\tau_{2n+1} = t_{2n+1} + 1 \bmod(2)$. Entonces, similar a la demostración para la continuidad de ψ y ϕ ,

$$|t - t_n| = \frac{1}{3^{2n+1}},$$

y por la definición de la curva, $\phi(t)$ difiere de $\phi(t_n)$ únicamente en el $(n+1)$ dígito ternario, por lo que

$$|\phi(t) - \phi(t_n)| = \frac{|k^{t_2+\dots+t_{2n}} t_{2n+1} - k^{t_2+\dots+t_{2n}} \tau_{2n+1}|}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^{n+1}},$$

por lo tanto,

$$\frac{|\phi(t) - \phi(t_n)|}{|t - t_n|} = 3^n,$$

lo cual concluye la demostración, pues $3^n \rightarrow \infty$ a medida que n aumenta. Por otro lado, para ψ basta tomar $\psi(t) = 3\phi(t/3)$. $\square$

Aunque se ha hablado sobre las diferentes formas de construir la curva de Peano y de sus propiedades, existen otros temas interesantes que no resultan de utilidad para el desarrollo de este trabajo, por ejemplo la construcción de la curva de Peano en tres dimensiones, de la cual se puede encontrar más información en (Sagan, [Han94]). Por otro lado, en caso de que el lector desee ver una posible aplicación de la curva de Peano puede revisar la segunda sección del capítulo 7 en el trabajo de grado [Luna23], en donde se resume el desarrollo de un súper capacitor que presenta una distribución de condensadores basada en la curva de Peano.

4. Nuevos patrones de las curvas que rellenan el espacio

4.1. La curva de Sierpinski

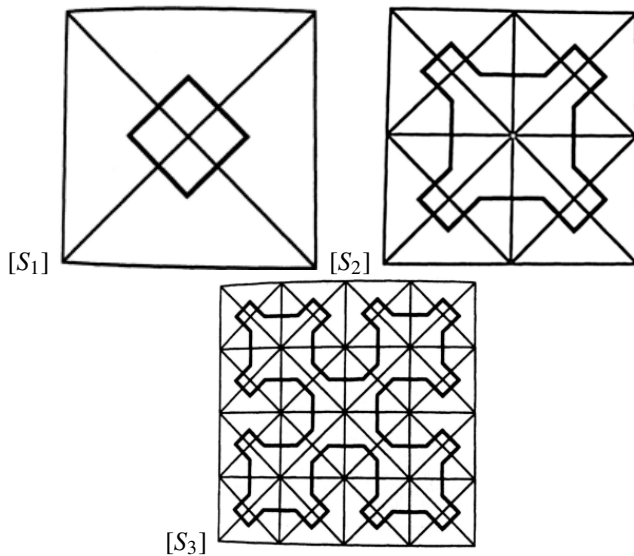


Figura 4: Las tres primeras iteraciones en la construcción de la curva de Sierpinski. Tomadas de [H94].

La curva de Sierpinski posee una distribución totalmente diferente a las vistas anteriormente, de hecho, al partir el cuadrado $[-1, 1]^2$ en dos partes iguales, por su diagonal, la mitad de la curva de Sierpinski estará sobre uno de los dos triángulos isósceles rectos que se forman, al igual que la otra mitad de la curva, es por eso que la curva de Sierpinski se maneja como una función que va desde $\mathcal{I}$ hasta un triángulo rectángulo isósceles, y bajo esa misma idea es que se va a describir la creación geométrica de la curva.

Sea $\mathcal{T}$ el triángulo rectángulo isósceles con vértices en $(0, 0)$, $(2, 0)$ y en $(1, 1)$; si $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{T}$, se puede usar el mismo principio geométrico de Hilbert para generar la curva de Sierpinski. Primero, se divide a $\mathcal{I}$ en 2^n subintervalos congruentes, de igual manera, $\mathcal{T}$ se divide en 2^n subtriángulos congruentes, con $n = 1, 2, 3, \dots$, asegurando que al momento

de hacer las correspondencias se siga manteniendo la adyacencia de subintervalos dentro de subtriángulos adyacentes. Bajo la definición geométrica de la curva de Sierpinski, así como se hizo para la curva de Hilbert, se pueden comprobar las condiciones necesarias que deben satisfacer las curvas que rellenan el espacio.

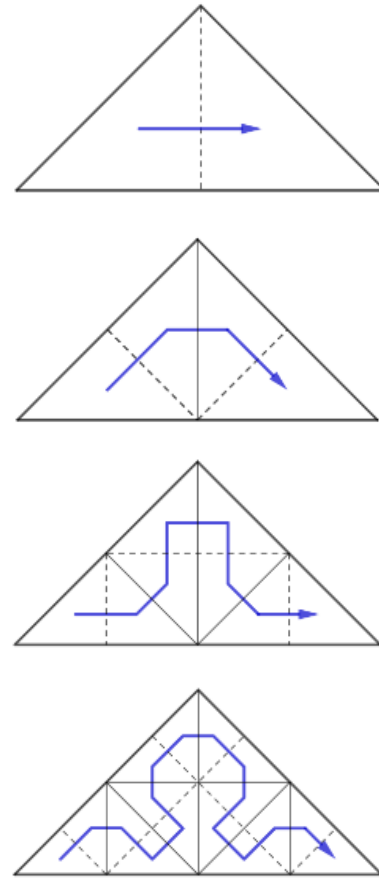


Figura 5: Cuatro primeras iteraciones de la curva de Sierpinski con su respectivo sentido de orientación. Tomada de [M19].

Teniendo en cuenta estas cuatro figuras, Sagan logra definir la curva de Sierpinski-Knopp en términos de números cuaternarios, semejante a la de Hilbert. (Ver Sagan [Han94] y [Han91]). En ese orden de ideas, hay que cambiar la base sobre la cual se hacen las particiones de los segmentos y triángulos para la construcción geométrica de la curva, esto es, en cada iteración ya no se dividirá a $\mathcal{I}$ y a $\mathcal{T}$ en dos partes iguales, sino que se hará en cuatro. Esto da paso a la creación de cuatro transformaciones nuevas, resultantes de una serie de composiciones entre transformaciones previas, esto debido a que el objetivo de Sagan es realizar en un solo paso, dos transformaciones, pasando de la figura 5b a la 5d.

Dichas transformaciones, al igual que en la curva de Hilbert, tienen el objetivo de generar una función que facilite su uso aritméticamente o computacionalmente:

$$f(0.4q_1q_2q_3\ldots) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\eta_j}}{2^j} \text{sgn}(q_j) \times \left((1 - \delta_j)(1 + (-1)^{\delta_j}) + \frac{1}{2}(\delta_j - 2)(1 - (-1)^{\delta_j})(1 + (-1)^{q_j}) \right)$$

la demostración de que esta curva, en términos cuaternarios, es no diferenciable en ningún punto se puede encontrar desarrollada en el trabajo de grado [Luna23].

4.2. Otras curvas

Dentro de [Han94], Sagan desarrolla la teoría de las curvas que rellenan el espacio utilizando diferentes curvas como ejemplos, aquí ya se mencionaron tres, la de Hilbert, la de Peano y la de Sierpinski, pero hay otras también llamativas, como la de Lebesgue o la de Shoenberg.

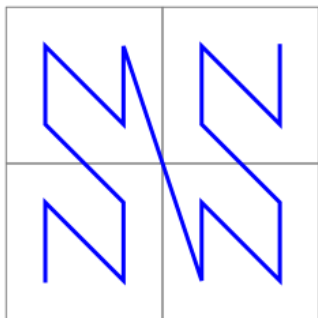


Figura 6: Ejemplo de la curva de Lebesgue. Tomada de [Han94].

Particularmente estas dos últimas se apoyan en gran medida de herramientas computacionales para ser representadas gráficamente dada su alta complejidad. Aún así, su componente teórico es muy amplio y complejo también, ya que tienen gran relación con el conjunto de Cantor y muchas de sus propiedades, además de toda la teoría relacionada con los fractales (Sagan [Han94]).

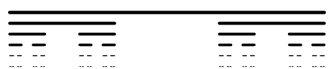


Figura 7: Ejemplo del conjunto de Cantor generado en Geogebra.

5. Almacenamiento y recuperación de información en imágenes digitales

Lo que vale la pena reconocer es que todas estas propiedades analíticas y geométricas con las que fueron dotadas las curvas que rellenan el espacio son utilizadas por varios autores para desarrollar investigaciones en campos como la

electrónica, la biología y particularmente en el manejo de imágenes digitales. A continuación se presenta brevemente un algoritmo para el almacenamiento y recuperación de información en imágenes, además de un pequeño ejercicio realizado en el mismo trabajo de grado que busca mostrar gráficamente el comportamiento de la curva de Hilbert sobre una imagen digital.

Dentro de todas las investigaciones en las que han aplicado curvas que rellenan el espacio, y en especial la de Hilbert, existe una en la cual se trabaja el "subset query problem", cuyo enunciado es el siguiente: dado un conjunto de píxeles I (imagen) y un rango R (subconjunto), devolver todos los píxeles $p \in I$ tales que $p \in R$. En el artículo [Val05] se presenta un algoritmo para realizar esta tarea, principalmente porque utilizan la curva de Hilbert como guía para organizar los píxeles de manera lineal al momento de almacenar la imagen.

Gracias a la contracción recursiva de las curvas de Hilbert, vista en las secciones anteriores, hay dos propiedades muy importantes para el algoritmo:

Proposición 5.1. Suponga que H_i y H_j son dos curvas de Hilbert de orden i y j respectivamente, con $i > j$, entonces la trayectoria de H_i sigue la trayectoria de H_j .

Proposición 5.2. Suponga que el píxel p tiene coordenadas (i, j) , entonces el píxel previo y posterior a p debe tener coordenadas: $(i + 1, j)$, $(i - 1, j)$, $(i, j + 1)$ o $(i, j - 1)$.

en donde ambas proposiciones se pueden corroborar fácilmente al ver la representación gráfica de la curva de Hilbert.

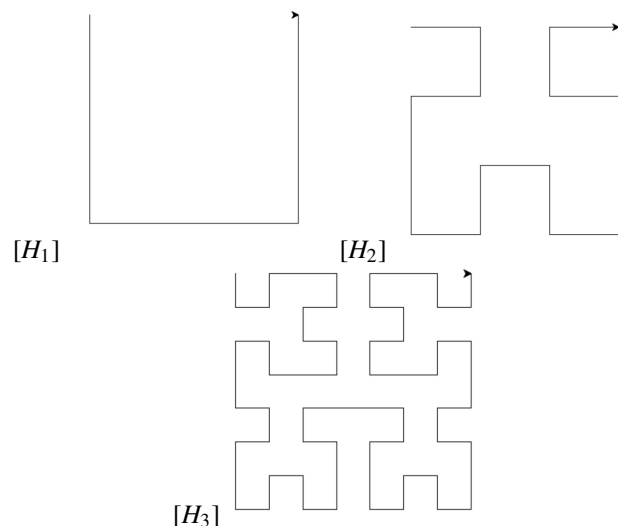


Figura 8: Los tres primeros ordenes de la curva de Hilbert.

Por otro lado, parte de la optimización del problema es poder generar el menor número de cadenas dentro del resultado, en ese sentido estas deben ser más largas, el problema es que siguiendo el orden de la curva de Hilbert no se asegura una equidistancia entre todas las cadenas,

algunas pueden ser muy largas o muy cortas, por lo que el resultado final no necesariamente es el óptimo, para esto se introduce el concepto de puntos de cruce, o en ingles "cross points". Tomando como referencia el borde izquierdo (l) de R , los píxeles que coincide con l se pueden calcificar de tres maneras:

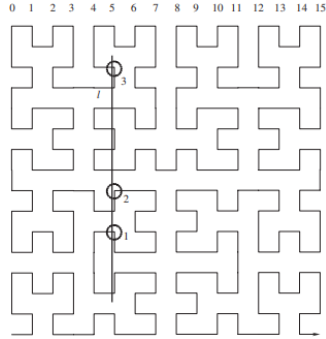


Figura 9: Tipos de píxeles. Tomada de [Val05].

1. Observando desde el píxel más cercano a l por la izquierda, la curva pasa por el píxel y sigue una de las siguientes direcciones: arriba, abajo, derecha.
2. Observando desde el píxel más cercano a l por la derecha o sobre l , la curva sigue una dirección vertical o hacia la derecha.
3. Observando desde el píxel más cercano a l por la derecha o sobre l , la curva pasa por el píxel y sigue hacia la izquierda.

En el caso (1) y (3) los píxeles p son puntos de cruce sobre la frontera, dado que el píxel previo o posterior va a estar fuera de la región de búsqueda, en cambio para los píxeles de (2), el previo o posterior siempre va a estar dentro de la región de búsqueda. Ahora, como la curva de Hilbert es continua, las cadenas que se encuentran dentro del rango de búsqueda están delimitadas por puntos de cruce sobre la frontera.

Corolario 5.1. Para cualquier rango de búsqueda rectangular con parámetro c , el número promedio de puntos de cruce sobre la frontera es de $\frac{c}{2}$ y el número promedio de cadenas dentro del rango de búsqueda es de $\frac{c}{4}$.

Demostración. El parámetro c es el número de píxeles en la frontera de la región. Ahora por definición, si p es un punto de cruce, si y solo si, el píxel previo o posterior a p está al lado izquierdo de l , o de otra forma, existe una línea horizontal que se interseca con l y p es el extremo derecho. Como el número de líneas horizontales es casi el mismo al de las líneas verticales, y además todos los píxeles son puntos finales de dos cadenas consecutivas en la curva, excepto por los puntos de entrada y salida de la curva. Teniendo todo esto en cuenta podemos afirmar que al tomar un píxel p aleatorio en la frontera de R , existe un 50% de probabilidad de que sea

un punto de cruce, entonces dependiendo del parámetro c , el número de puntos de cruce en la frontera de R es $\frac{c}{2}$, y como cada cadena tiene dos puntos de cruce como extremos, deben haber $\frac{c}{4}$ cadenas. $\square$

Otro aspecto importante para la creación del algoritmo, y que depende de los puntos de cruce, es la siguiente proposición:

La cantidad de puntos de cruce en la frontera de búsqueda de una imagen es más grande si la frontera corresponde con una columna impar y disminuye considerablemente cuando la frontera coincide con una columna par. En caso de que la columna sea divisible por 4, 8, etc el número será aún menor.

Este es un resultado poco intuitivo pero usando ejemplos se puede entender, por esta razón su demostración se obvia. Lo importante es ver que esto implica que la cantidad de puntos de cruce no está uniformemente distribuido para ningún rango de búsqueda.

Así entonces, en [Val05] crean el algoritmo Subset Query Algorithm normal, pero gracias a la proposición 5 logran hacerle una mejora, dando el siguiente algoritmo como resultado de la investigación:

Algoritmo .1: *Subset Query Algorithm* normal

Data: lowx, lowy, highx, highy

Result: Conjunto de puntos R-S

- 1 Almacenar los píxeles de la frontera en un conjunto P ;
 - 2 Organizar los puntos en P según el orden de Hilbert;
 - 3 **for** $p \in P$ **do**
 - 4 Encontrar el píxel previo p_a y posterior p_d a p en la curva de Hilbert;
 - 5 **if** $p_a \in R$ & $p_d \in R$ **then**
 - 6 Remover p de P porque no es un punto de cruce;
 - 7 //De esta forma solo hay puntos de cruce en P ;
 - 8 Recuperar la cadena de píxeles desde su almacenamiento en su posición $p[i]$;
 - 9 Recuperar su posición final $p[i + 1]$, donde $i = 1, 2, 3, 4, \dots$;
 - 10 Agregar la cadena al conjunto R-S;
 - 11 Retornar R-S;
-

Aunque es una buena solución, hay que pagar cierto costo, que en este caso es devolver más píxeles de los que eran necesarios. Ahora el problema es estudiar la relación entre el rendimiento del algoritmo y el parámetro que describe la cantidad de columnas analizadas dentro de la región objetivo. Esto último queda a gusto del lector, puede consultarlo en [Val05], donde podrá encontrar más propiedades que influyen en los algoritmos y una explicación más detallada de los mismos, o consultar [EEMG17] para explorar otras propiedades que pueden aportar y optimizar el algoritmo.

6. Ordenar una imagen de manera lineal según la curva de Hilbert

El objetivo de esta sección es mostrar el proceso de cómo una curva que rellena el espacio (particularmente la de Hilbert) puede alcanzar cada píxel de una imagen dada, o al menos una región de interés (ROI). De esta manera, se puede conocer la información almacenada en cada píxel (su color), que a su vez puede ser registrada en un arreglo unidimensional siguiendo el orden de la curva. Todos los procesos desarrollados para esta sección los hicimos con la ayuda de Python, particularmente la librería de CV2 para el manejo de la imagen digital, y la librería de Turtle para recrear gráficamente la curva de Hilbert.

La imagen dada en formato PNG será la de Vulpix en su estilo de 16 bits, un pokémon bastante reconocido por la comunidad.



Figura 10: Imágen de Vulpix.

Utilizando la librería CV2 podemos crear una nueva imagen, un recorte que tendrá una dimensión de $n \times m$ píxeles. La región escogida fue la del ojo de Vulpix, y se tomó de 128×128 píxeles por dos razones, la primera es que es una región cuadrada, por lo que no hay que considerar muchas cosas para rellenarla con la curva de Hilbert. Y la segunda razón es que $2^7 = 128$, por lo que será suficiente la curva de Hilbert de grado siete para llegar a cada píxel de la región de interés.



Figura 11: Región de interés: ojo de Vulpix.

Ahora veamos cómo recrear la curva de Hilbert usando la

librería de Python Turtle. Turtle es bastante sencilla en cuanto a sus acciones, por lo que sirve como un ejercicio introductorio a la programación, la idea principal es darle indicaciones a una "tortuga" para que se mueva y pinte su trayectoria (que se puede ver de manera animada), en donde se puede variar su orientación, la distancia que camina, su color, su velocidad y muchos otros parámetros. Recordemos que la curva de Hilbert es algo que se puede construir recursivamente, entonces mediante una función recursiva, se le pueden dar instrucciones a la tortuga para que pinte una curva de Hilbert del grado deseado.

Algoritmo .2: Curva de Hilbert

Data: *grade, angle, step*

```

1 if grade = 0 then
2   | Fin
3 else
4   Girar_derecha(angle);
5   Hilbert(grade-1, -angle, step);
6   Avanzar(step);
7   Girar_izquierda(angle);
8   Hilbert(grade-1, angle, step);
9   Avanzar(step);
10  Hilbert(grade-1, angle, step);
11  Girar_izquierda(angle);
12  Avanzar(step);
13  Hilbert(grade-1, -angle, step);
14  Girar_derecha(angle);

```

De esta manera, al graficar la curva de Hilbert de grado siete sobre la región de interés, ésta debería quedar totalmente cubierta.

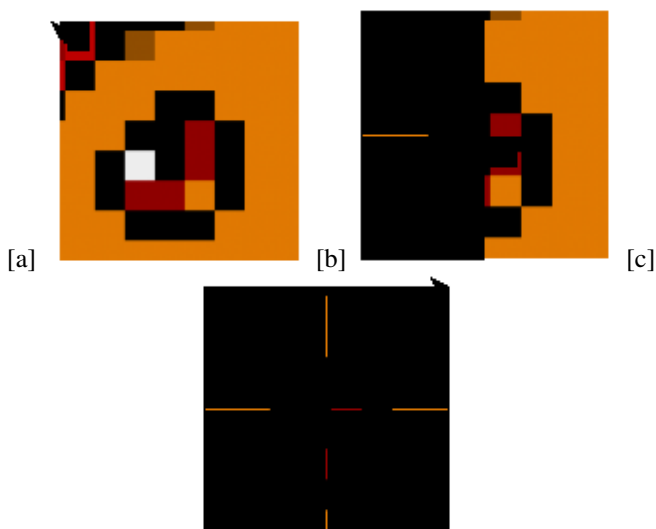


Figura 12: Proceso de cobertura de la región de interés.

Observación. Al finalizar el proceso de cobertura podemos observar con claridad las divisiones entre los cuadrantes ya que se ve en el fondo el color de la imagen. Esto es debido a la simetría que existe entre ellos.

Lo único que falta es indicar el color que debe adoptar la curva dependiendo del píxel sobre el que esté parado. El problema es que el sistema de coordenadas para la tortuga es diferente al sistema de coordenadas de la imagen, pues el origen de la tortuga está en el centro de la imagen, pero el origen de esta se encuentra en el píxel de la esquina superior izquierda (por lo que se maneja como un arreglo bidimensional), en ese sentido, para hacer que la tortuga empezara su trayecto en el punto correcto tuvimos que desplazarla 64 unidades, quedando en el punto $(-64, 64)$. Para solucionar el problema del color creamos un segundo "puntero" que se va desplazando por la imagen, en función de la orientación de la tortuga, asegurando así que se mantuviera el orden de Hilbert.



Figura 13: Cobertura a color de la región de interés.

Observación. En este caso el resultado se ve prácticamente igual debido a que estamos usando los mismos colores de la imagen, aun así hay unos pequeños detalles que permiten identificar la cobertura, como por ejemplo, las mismas separaciones de los cuadrantes principales vistos anteriormente. Por otra parte, si se pudiera ver más detalladamente, uno se podría dar cuenta que la imagen está ligeramente estirada debido a que la distancia de los pasos de la tortuga no son de exactamente un píxel.

Así finaliza toda la tarea, pues a medida que el puntero de la imagen se va moviendo, también va extrayendo la información que irá quedando almacenada en un arreglo unidimensional. Dentro del siguiente link podremos encontrar el código utilizado para todo este procedimiento con una explicación más detallada, por si el lector desea explorar más posibilidades o simplemente ver la animación de la tortuga:

<https://github.com/LunaSamuel99/>

Tesis-Curvas-que-rellenan-el-espacio

7. Conclusión

A lo largo de todo el trabajo se han explorado las características que describen a las curvas que rellenan el espacio; como la continuidad, sobreyectividad y no diferenciabilidad, pero también, distintas formas de trabajar con ellas, desde una visión geométrica y una aritmética o compleja. Particularmente, la curva de Hilbert, la de Peano y la de Sierpinski

son ejemplos de curvas muy ilustrativos, pues permiten ver todo de lo que son capaces las curvas que rellenan el espacio mediante un desarrollo bastante introductorio de sus características. Desde que Sagan se vio en la tarea de recopilar y desarrollar aun más la teoría sobre las curvas que rellenan el espacio a finales del siglo XX, es fácil ver el panorama general, en donde las curvas son continuas, son sobreyectivas, son no diferenciables, tienen una representación geométrica, otra aritmética o con todas se pueden aproximar polígonos (de maneras únicas o tal vez similares); pero lo realmente interesante es ver cómo todas se complementaron durante su desarrollo, por lo que aún quedan bastantes temas por trabajar e investigar.

Por último, y siendo la mejor forma de cerrar, dentro del ámbito netamente teórico también hay aspectos sobre los cuales profundizar para formalizar aún más las curvas que rellenan el espacio; una gran cantidad de definiciones, lemas, proposiciones y teoremas del análisis matemático o topológico que dan vida al Teorema de Hahn-Mazurkiewicz (1914). Un teorema que describe por completo la idea sobre la cual están fundamentadas las curvas que rellenan el espacio:

Teorema 7.1. *Un conjunto $\mathcal{M}$ es la imagen continua de $\mathcal{I}$ si y solo si es compacto, conexo y localmente conexo.*

Pero al igual que con cualquier otro final, este no es más que la puerta de inicio a muchas otras investigaciones, para las cuales, espero, el lector también haya podido quedar entusiasmado.

Referencias.

- [Han94] Sagan Hans, *Space-Filling Curves*, Springer-Verlag, 1994.
- [Han91] ———, *Some reflections on the emergence of space filling curves: The way it could have happened and should have happened, but did not happen*, Journal of the Franklin Institute, 1991.
- [EEMG17] Estevez Estevez Martinez Gomez, *Hilbert Curves in two Dimensions* (2017).
- [Moo00] Moore, *On Certain crinkly curves* (1900).
- [Gan19] M Gandul, *La curva de Hilbert y otras curvas que rellenan áreas o volúmenes*, Universidad de Sevilla, Facultad de Matemáticas, 2019.
- [Lun23] S Luna, *Curvas que rellenan el espacio y su aplicación en el procesamiento de imágenes*, Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Facultad de Matemáticas e Ingeniería, 2023.
- [Val05] J Valantinas, *On the use of space-filling curves in changing image dimensionality*, Information Technology and Control (2005).

Acerca del autor: Soy egresado de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz, del programa de Matemáticas, apasionado por los juegos y la naturaleza, y definitivamente espero poder seguir aprendiendo para llegar más allá de las estrellas.

AZAR: ALGUNAS HUELLAS DE SU CONSTITUCIÓN HISTÓRICO-CULTURAL

Liliana González *

lilianam.gonzalezc@konradlorenz.edu.co

1. Resumen

Este artículo presenta una reflexión acerca del encuentro del ser humano con el azar. Dicha reflexión versa sobre la presencia dual azar/determinismo en civilizaciones antiguas. Se muestra cómo el encuentro del ser humano con lo incierto lleva la huella de la experiencia de los sujetos que se produce y se configura a partir de la actividad humana concreta en el marco de Sistemas Semióticos de Significación Cultural (SSSC) que son dinámicos y que se derivan de la actividad práctica y sensorial [Rad21].

2. Introducción

A través de la historia el ser humano se ha topado inevitablemente con la dualidad entre determinismo y no determinismo, que, si se nos permite la metáfora, como el dios Jano de la mitología romana, presenta dos caras vigilantes, en este caso, una hacia la certeza y la otra hacia el azar. Como dos partes de una misma unidad. Dos facetas de nuestra experiencia cotidiana. En relación con el azar, de los Ríos [dIR08, p. 10] menciona que

El azar [...] constituye un factor característico de la condición humana en su nivel más elemental, un fenómeno cotidiano presente en todos y cada uno de los contextos en los que encontramos individuos que llevan a cabo acciones deliberadas con el fin de conseguir objetivos deseados.

Naturalmente, los diferentes contextos en que tiene lugar la experiencia humana, en general, se encuentran en el seno de la cultura y la historia. Allí, azar y certeza aparecen como dos categorías relacionadas entre sí de modo dinámico, en movimiento dialéctico y cuya interpretación depende de las condiciones histórico-culturales que se tiene a disposición. En cada momento histórico se pone de presente ciertas formas de ser y de estar en el mundo. De modo que, no es de extrañar que, “según sean las condiciones de existencia de la sociedad, las condiciones en que se desenvuelva su vida material, así son sus ideas, sus teorías, sus concepciones” [Sta38, p.10]. Así pues, la cultura y la historia proveen tanto las posibilidades como los límites para la producción de sistemas de pensamiento a nivel ético, legal, conceptual, etc. [Rad14]. Estos

sistemas de pensamiento vienen a delinear los rasgos del desarrollo de sensibilidades perceptivas, manuales e intelectuales [Rad06] a través de los recursos materiales e ideacionales que se erigen como concreciones de la actividad humana creadora y productiva [Leo69]. Es así como a lo largo de nuestra existencia vamos encontrándonos con esos sistemas de pensamiento que culturalmente nos preceden. Al toparnos con el saber, delimitado por estos sistemas de pensamiento, se produce de un lado, el encuentro con el determinismo que en palabras de Guillemette [Gui19] “afirma que nuestras acciones y pensamientos están determinados por fuerzas internas o externas que los hacen necesarios e inexorables” (p. 19), dando lugar a un resultado específico y predecible; y de otro lado con el no determinismo en donde en las situaciones no se encuentran bajo leyes causales, mostrando el azar como protagonista en la imposibilidad de predicción certera. Esta dualidad no habla de otra cosa que de nuestra praxis temporal para acercarnos a la distinción y comprensión de fenómenos afectados por el azar y aquellos que no lo son. Dicha dualidad ha llevado a la humanidad desde tiempos remotos a plantearse cuestiones como ¿es nuestra realidad determinista o inexorablemente se encuentra vinculada al azar?, ¿es la suerte la que determina nuestro futuro?, ¿el destino está prescrito y es inevitable?, ¿suceden las cosas por casualidad o causalidad? ¿existe el azar o es meramente aparente?, ¿todos los fenómenos y sucesos pueden ser completamente determinados mediante leyes naturales?, ¿es justo el azar? etc. Las posibles respuestas a estos interrogantes invitan a una reflexión epistemológica acerca de la naturaleza del azar pues al tratarse de un concepto multifacético nos sale al paso inmediatamente la complejidad para su definición y tratamiento. El presente escrito no pretende responder estas preguntas, o sugerir una definición categórica del azar, nuestra empresa es más modesta. Nuestro interés corresponde a mostrar el encuentro del ser humano con la incertidumbre ilustrando algunas situaciones en donde el azar ha sido protagonista.

3. Ser, historia y cultura

Los aspectos asociados al azar son medulares para comprender el desarrollo histórico del saber probabilístico, el cual desde una perspectiva histórico cultural, consideramos como como un sistema de formas de actuar y reflexionar con relación al azar, que se constituyen histórica y culturalmente a

*Estudiante del Doctorado Interinstitucional en Educación DIE - Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

partir del trabajo conjunto, material, corpóreo y sensible. En este sentido, el reencuentro con el azar nos conmina a perfilar una postura acerca del saber en relación con la historia y la cultura. Radford [Rad14] sostiene que la evolución del saber en general se encuentra en comunión con su contexto social, cultural, histórico y político en tanto estos supeditan las formas de acción y de reflexión de los individuos. En Hegel [Heg95, p.9] encontramos algunos indicios que nos permiten avanzar en esta línea en relación con la historia,

—en lo que nosotros somos—, lo común e imperecedero se halla inseparablemente unido a lo que somos históricamente. La razón consciente de sí misma que hoy consideramos como patrimonio nuestro y que forma parte del mundo actual no ha surgido de improviso, directamente, como si brotase por sí sola del suelo del presente, sino que es también, sustancialmente, una herencia y, más concretamente, el resultado del trabajo de todas las anteriores generaciones del linaje humano.

Al mencionar lo común e imperecedero Hegel refiere al legado que la humanidad va dejando a otras generaciones tras su actividad laborante. Este legado aparece ante nuestros ojos como concreción material e ideacional de la actividad humana. Dicha concreción no refiere un tipo de condición estática, por el contrario, dicha concreción es dinámica, permanece en movimiento gracias a la actividad de los individuos impulsando nuevas y más robustas comprensiones del mundo. De modo que el saber encuentra sus límites y posibilidades evolutivas en el curso natural e histórico de la vida de los sujetos tanto en el ámbito material como conceptual. Las condiciones ofrecidas en ciertos momentos de la historia han favorecido, por ejemplo, un cambio de creencias en relación con el azar. Por ejemplo, en Grecia, la comprensión de las relaciones del humano con el mundo se encontraba mediada por un conjunto de dioses que determinaban las acciones humanas. De manera que el uso de tabas en los rituales de adivinación eran la forma en que los dioses expresaban sus deseos con la intervención del azar. Sin embargo, en la modernidad, los dioses son puestos al margen de la acción humana. Y es allí, en donde la cuantificación y el desarrollo con rigurosidad matemática del concepto de probabilidad viene a emerger en un momento de la historia del mundo occidental en el que se toma distancia de las concepciones ontológicas que se habían definido al sujeto y su actuar en el mundo. Para Marx [Mar03, p.7] “Los hombres hacen su propia historia, pero no la hacen a su libre arbitrio, bajo circunstancias elegidos por ellos mismos, sino bajo aquellas circunstancias con que se encuentran directamente, que existen y les han sido legadas por el pasado”. Es decir, lo que vamos haciendo y la forma en que lo hacemos se encuentra dentro de un marco histórico que determina las maneras en que producimos el saber, pero también las formas de relacionarnos los unos con los otros. Pues, de acuerdo con Gernet [Ger80, p.85], “Una de las principales razones de ser de la historia consiste en restituir allí donde se pueda —y en la medida en que se pueda— esos estados antiguos en que se

vislumbran mejor las creaciones humanas”. En consecuencia, la historia nos habla del saber y su desarrollo, pero también del ser y su devenir en el marco de las prácticas sociales y culturales, acontecimientos, hechos individuales y colectivos, entre otros. En relación con la cultura, desde una perspectiva dialéctico materialista Marx esboza una idea que pone de presente que aquello que es humano procede de la relación de los sujetos con el entorno y de la satisfacción de sus necesidades de subsistencia [Rad14]. Roger Garaudy en su libro *Introducción al estudio de Marx* [Gar70, p.62], menciona que para Marx

[El hombre] al satisfacer sus necesidades y al producir medios técnicos para satisfacerlas, el hombre crea nuevas necesidades. [...] Al transformar la naturaleza, él mismo se transforma y afina sus sentidos a modo de hacerlos aptos para captar todo lo que han creado las generaciones anteriores. Sus sentidos son asistidos por toda la civilización y la cultura pasadas. En el acto de su trabajo está presente toda la humanidad.

Es este sentido, lo planteado por Marx lleva en sí una reflexión sobre la cultura como una entidad dinámica, siempre en movimiento, que cambia como cambian las formas de producción y las formas de relación humana para la producción. Es decir que esas formas de producción y de relación humana más allá de procurar un medio para la satisfacción de las necesidades materiales y espirituales del hombre, son ante todo aquello que da forma y contenido a lo humano. Siguiendo a Radford [Rad21, p.214],

Una cultura [...] es un todo en movimiento, cuyos componentes están interconectados por un conjunto dinámico de relaciones sociales que actúan simultáneamente [...] manteniendo la cultura en perpetuo movimiento. Esta es precisamente la concepción dialéctico-materialista de la cultura, que no da primacía ni a la materialidad ni al mundo de las ideas, sino que los concibe como dos caras de la misma moneda, como partes de un mismo proceso.

que pasa y se transforma de generación en generación gracias al trabajo del hombre como el acopio vivo de la experiencia humana. Así, la cultura se constituye en la expresión de nuestra naturaleza humana que revela nuestros modos de vida y de pensamiento, sintetizados en la relación al otro, en el arte, en la literatura, en la religión, en la creación y el disfrute [Mac59]. En palabras de Leontiev [Leo69, p.6],

En la vida cada generación comienza en un mundo de objetos y fenómenos creados por generaciones precedentes. Asimila estas riquezas con su participación en el trabajo, en la producción y en las diversas formas de actividad social que han cristalizado, que se han encarnado en este mundo.

Subrayamos entonces una idea de cultura que sugiere que la actividad humana de producción cultural que aparece en la

realidad material procura la emergencia de la idealidad como una realidad impalpable e inmaterial [God86] y con ello el surgimiento de lo simbólico. De manera que las formas de expresión de nuestros modos de vida y pensamiento se encuentran supeditadas al establecimiento de una determinada dimensión simbólica que sintetiza, determina y asigna significado a aquellas formas ideales de ser, de relacionarse, de producir y de estar en el mundo. En consecuencia, la dimensión simbólica delimita las fronteras de las formas de actuar y reflexionar de los sujetos a la vez que asignan significado cultural a los objetos, a las relaciones, etc. Esta dimensión simbólica que sugiere parámetros para concebir y dar significado a la realidad define lo que es aceptado como verdadero, bello, probo, entre otros, además de perfilar aquello que se espera de los sujetos dentro de un entramado legal, religioso, político y económico. Estas superestructuras simbólicas constituyen lo que Radford [Rad21, p.239] ha denominado *Sistemas Semióticos de Significación Cultural* (SSSC) cuyo origen se encuentra en la actividad sensorial y práctica de los sujetos y que comprende ideas en relación con,

- la naturaleza del mundo (por ejemplo, la naturaleza de los objetos matemáticos y su forma de existir);
- la verdad (como la verdad es y puede ser establecida);
- la naturaleza de los individuos.

Estos SSSC llevan rastros de la experiencia humana, en sentido general, del encuentro con esas formas de pensamiento y acción. En ese encuentro emergen formas de producción del saber en relación con lo que se establece como verdadero, como se reflexiona acerca de la validez de los razonamientos y procedimientos, distinción entre lo bueno y lo malo, entre otros, y cuyas potencialidades son puestas en movimiento durante la actividad productiva de los sujetos, cuestión que ha llevado hacia adelante desarrollos en diferentes campos del saber en cada momento histórico. Podemos inferir entonces, que el encuentro del ser humano con el azar, a través de la historia no escapa de los SSSC que delimitaron los avances de lo que hoy conocemos como la teoría de la probabilidad. Al echar un vistazo a la historia notamos que no fue sino hasta el siglo XV que empieza a esbozarse algún interés por el estudio de estas situaciones y cuya rigurosidad matemática viene a perfilarse en los albores del siglo XVII. Así que, revisar algunas prácticas culturales antiguas pueden ofrecernos luces de la manera en que los SSSC afectaron, condicionaron y dieron forma a las concepciones acerca del azar que han producido los sujetos en su devenir histórico y cultural.

4. El azar: entre lo mágico y lo divino

El uso común de la lengua griega y la religión politeísta fundamentada en los dioses del Olimpo, agrupados bajo la autoridad de Zeus, fueron aspectos que brindaron cohesión entre los pueblos (jonios, aqueos, dorios, eolios) que constituirían la cultura griega. Su identidad cultural (lengua, costumbres, religión, valores, etc.), aparece entrelazada con relatos míticos,

con la adoración a los dioses y con un sistema de creencias que permea los ámbitos públicos y privados. Por ejemplo, la incertidumbre presente en los acontecimientos fortuitos, como algo cuyas causas eran desconocidas y en consecuencia inexplicables, fue interpretada por los antiguos como de origen extraño y desconocido [Car03]. Desde su cosmovisión, aquello que resultaba desconocido se vinculaba entonces con las deidades. De modo que, el encuentro del ser humano con el azar se presenta en vínculo con lo divino o mágico perfilando formas de pensar y actuar arraigadas a una dimensión teológica. En el siglo VIII a.C aparecen los santuarios para la veneración de los dioses y celebración de fiestas religiosas que atraían devotos de todos los confines del mundo griego. Santuarios y fiestas religiosas fortalecían la idea de consolidación del pueblo griego [Pom11]. Lo que parece confirmar que la religión griega,

ahonda sus raíces en una tradición que engloba, íntimamente mezclados con ella, todos los demás elementos constitutivos de la civilización helénica, todo aquello que da a la Grecia de las ciudades su fisonomía propia, desde la lengua, los gestos, las formas de vivir, de sentir, de pensar, hasta los sistemas de valores y las normas de vida colectiva. [Ver91, p.15]

En este sentido, no es de extrañar, que los oráculos se constituyeran en un pilar fundamental de la religión y la cultura. El oráculo era una respuesta proveniente de una deidad a través de la mediación humana de un sacerdote o pitonisa ante la consulta de un mortal, que, aunque no constituían un clero, se pensaba tenían el don de predicción e interpretación otorgado a ellos por los dioses. “Los sacerdotes y sacerdotisas procedían casi exclusivamente de las clases más altas de la sociedad, y muchos cargos sacerdotales eran hereditarios y propiedad de una sola familia” [Pom11, p.94]. No obstante, la palabra oráculo, por extensión, también fue asignada al lugar sagrado o santuario donde se desarrollaban los rituales adivinatorios. Los sacerdotes o pitonisas se valían de guijarros de diversas formas y colores, flechas, astrágolos, dados, entre otros, para interpretar la voluntad divina mediante variados actos de adivinación por sorteo¹. En general, el ritual consistía en formular una pregunta, el sacerdote o pitonisa realizaba una plegaria al dios del santuario y se disponía a echar suertes (con el artefacto dispuesto para ello), finalmente se deducía el mensaje enviado por la deidad [Dav55], como una profecía sagrada. De este modo, la selección aleatoria, entonces, se encontraba incrustada dentro de una connotación de carácter adivinatorio en donde el “*kleros* (la “suerte del azar”) revelaba el destino (*moira* en griego) que esperaba a cada individuo” [Sin17, p.30], o grupo individuos en el contexto de interés consultado. A modo de ejemplo, las tabas o huesos de astrágalo de animales pequeños (como ovejas, cabras y ciervos), aparte de ser utilizadas por los antiguos como artefactos lúdicos, también fueron empleadas en ritos de adivinación.

¹Corresponde al resultado fortuito o casual de una experiencia tras el uso de algún medio o mecanismo generador de azar.

Los sacerdotes o pitonisas utilizaban la combinación que resultaba de lanzar cuatro tabas en los templos de los dioses como procedimiento mediante el cual la Fortuna, los Hados o el Destino podían expresar sus deseos. Era una forma de predecir el futuro. [MA02, p.2]

Además de los astrágalos parece que el lanzamiento de palillos de madera o marfil se utilizaba también para actividades de carácter religioso en cultos de adivinación en Grecia, Roma y Egipto [Dav55]. En particular, en los escritos del historiador romano Tácito (a.C. 98) se describe la adivinación por suertes como sigue,

una rama de un árbol de nueces es cortada en tiras; las marcan con diferentes signos y las arrojan al azar sobre un paño blanco. A continuación, el sacerdote del Estado, si la consulta es pública, o el padre de familia, si es privada, ofrece una oración a los dioses y, mirando al cielo, recoge tres tiras, de una en una, y lee su significado a partir de los signos previamente marcados en ellas. [Ben98, p.30]

En los cultos adivinatorios y en general en contextos donde fuese requerida la selección aleatoria de resultados, eran comunes acciones como,

- Agitar las suertes (tabas, palillos, dados, etc.)
- Mirar hacia atrás en el momento de la selección de las suertes²
- Seleccionar las suertes con la ayuda de un niño dada su pureza, incorruptibilidad y libertad de prejuicios [Ben98].

Estas acciones parecen tener la intención de evidenciar, ante los ojos del espectador, la no interferencia con el azar en el resultado de la experiencia aleatoria. Es decir, la no intervención humana en la expresión de la voluntad divina. En relación con la predicción, hemos de mencionar que ésta se constituyó en una instancia culturalmente aceptada para lidiar con la incertidumbre en los variados escenarios de la vida misma. Por ejemplo, la consulta a los oráculos como medio de comunicación entre los dioses celestes y los hombres fue muy relevante, dado que,

más allá de la esfera privada, [...] gran parte de la actividad adivinatoria, tanto en Grecia como en Roma, se refería al gobierno de la ciudad y a las distintas acciones —políticas, comerciales o militares— que se fueran a emprender. [Her09, p.300]

²En el II canto de la Ilíada de Homero encontramos un ejemplo de ello “Héctor, hijo de Príamo, y el divino Ulises midieron el campo, y, echando dos suertes en un casco de bronce, lo meneaban para decidir quién sería el primero en arrojar la broncea lanza. Los hombres oraban y levantaban las manos a los dioses. [...] El gran Héctor, el de tremolante casco, agitaba las suertes volviendo el rostro atrás: pronto saltó la de Paris”.

En otras palabras, para los griegos, el ámbito sobrenatural representado por los dioses y el ámbito natural como aquello terrenal y humano se encuentran relacionados consustancialmente. Así que toda decisión, pública o privada, pasaba por el consentimiento de los dioses mediante actos de vaticinio. Uno de los ejemplos más significativos de esto, lo encontramos en el oráculo consagrado al dios Apolo en Delfos, el cual

Atraía a griegos y no griegos de todo el Mediterráneo. Por un coste bastante alto en forma de sacrificios obligatorios, cualquier individuo podía consultar a Apolo y pedirle consejo sobre cuestiones personales (casamientos, carrera personal, viajes, favor divino, etc.). [Pom11, p.157]

Así mismo, en el oráculo de Delfos “las ciudades-estado también consultaban al dios, solicitando su guía o su ratificación en cuestiones tan importantes como el envío de una colonia, conflictos religiosos, o aprobación de leyes” [Pom11, p.157]. La respuesta otorgada por el oráculo permitía orientar las acciones del consultante de acuerdo con la voluntad expresada por la divinidad. De Quincey (citado en [Her09]) sostiene que, el oráculo de Delfos centralizaba información de naturaleza política además de coordinar de modo generalizado las deliberaciones del pueblo griego como una especie de *bureau d’administration* central. Pues, “al ser tantos los tiranos, monarcas extranjeros y líderes aristocráticos que consultaban el oráculo, el santuario se convirtió en un verdadero depósito de información en torno a las condiciones políticas reinantes en el mundo entero” [Pom11, p.157]. En consecuencia, inquirir al oráculo de Delfos como “la fuente de la más alta «sabiduría»” [Ger80, p.16], en asuntos legislativos, de gobernanza, de conquista de tierras y para el establecimiento de ciudades, por los legisladores de la época, era una práctica frecuente que valida la idea de poder, desde una perspectiva política, que parecen legitimar la intercesión de los dioses en estos asuntos.

En síntesis, los oráculos y la adivinación fueron reconocidos como la máxima instancia para dirimir controversias y en general se constituyeron en arquetipos ideológicos del pensamiento político, jurídico, filosófico, mitológico, entre otros; además de consolidarse como mecanismo de control social y político del mundo antiguo [Her09]. Aquí vemos cómo aparece la necesidad de relacionar los asuntos de la vida material con la vida espiritual en las diferentes esferas sociales y políticas, en particular, aquellas que demarcan líneas de acción delimitadas por las leyes aceptadas como divinas. Aquí vemos cómo las creencias, en el marco de los SSSC, posicionan a los dioses como los máximos conocedores de todas las cosas reales y todas las cosas posibles, es decir, por encima de las capacidades humanas. Así, pues, las deidades se encuentran en una especie de supra nivel ordenando el universo y dirigiendo los hilos del destino de la humanidad. Esta concepción lleva en sí una consciencia de “la naturaleza variable, precaria, frágil e incierta de la condición humana” [dlR08, p.24], que acepta la imposibilidad del hombre para acceder a una condición divina. El mundo, es visto desde una óptica religiosa en un sentido místico como la dualidad entre lo celeste

y lo terrenal. Esta cuestión, provoca una interpretación de la realidad como incuestionable en tanto es dada por los dioses y no como producto humano de su devenir histórico y cultural. El hombre se presenta en un estado de sujeción y subordinación a lo divino, y, en consecuencia, la realidad se plantea en sentido contemplativo.

Lo que estamos planteando aquí en términos del encuentro del hombre griego con el azar no se trata del aspecto escotístico de lo fortuito sino de “*la vivencia significativa de lo incomprensible*” y el intento discursivo de configurar narrativa y explicativamente la existencia, entendiendo ésta como síntesis finita e inestable entre aquello que decidimos y aquello que sin más nos pasa” [dIR08, p.37]. En este sentido, las situaciones afectadas por el azar con las que el ser humano se fue topando en el día a día en relación con lo incierto fueron interpretadas como esa “fuerza extraña de origen mágico, [que] refleja la suerte ciega o destino” [Car03, p.5]. Así el azar, fue concebido como algo incomprensible en términos de las causas que lo rodean, que escapa al control humano y se aferra categóricamente a unas formas de ver y entender el mundo por la vía de interpretaciones mágicas o míticas. Estas interpretaciones aparecen dentro de los SSSC que orientan el pensamiento y las acciones de los individuos, delimitando imaginarios individuales y colectivos, en este caso, en conexión con lo divino. A este respecto, el historiador y antropólogo francés Jean-Pierre Vernant [Ver91, p.10], afirma que,

La religión griega no constituye un sector aparte encerrado en sus límites y que se superpondría a la vida familiar, profesional, política o de ocio sin confundirse con ella. Si podemos hablar de “religión cívica” para la Grecia arcaica y clásica, esto significa que lo religioso queda incluido en lo social y que, recíprocamente, lo social, en todos sus niveles y en la diversidad de sus aspectos, está penetrado de lado a lado por lo religioso.

Vernant, sugiere la mutua constitución entre lo social y lo religioso en donde los actos de adivinación y vaticinio ponen al centro la posibilidad de la manifestación de un mundo que se presenta, en principio, invisible a la experiencia humana. Esa idea de invisibilidad o inmaterialidad del azar y la incertidumbre se relaciona con la imposibilidad de explicar las causas que provocan un acontecimiento fortuito soportado en cierto halo mágico o divino que envuelve el suceso [Car03]. Es decir, aparece un juego de revelación de aquello que está oculto y que aparece ante nuestros ojos, frecuentemente a través de los rituales, en presencia de la incertidumbre [Ger80], como causalidad divina.

Notamos que el azar hace parte de la vivencia del ser humano en el mundo ante acontecimientos fortuitos, sucesos espontáneos o decisiones inciertas. Sin embargo, “para el mundo primitivo no hay hechos fortuitos, hay causas desconocidas que, ante la ausencia de justificaciones para su existencia, se relacionan, con lo mágico o lo divino” [Car03, p.7]. Verdad y superstición se entremezclan en la necesidad humana de entender la realidad.

5. El azar: sorteo y democracia

La civilización griega estaba compuesta por sujetos libres y esclavos. En la categoría de sujetos libres había quienes carecían de derechos políticos. Así mismo, dentro de esta categoría se encontraban los denominados *ciudadanos*, sujetos libres, en particular varones (mujeres y niños fueron considerados ciudadanos “de hecho”, carentes de los derechos políticos de entonces) de padre y madre atenienses, quienes gozaban de derechos políticos que les permitían participar en los asuntos públicos con posibilidad de elegir y ser elegidos para ocupar cargos gubernamentales.

La ciudad de Atenas fue testigo de la emergencia primigenia de la democracia en donde la selección aleatoria por sorteo desempeñó un rol fundamental [Sin11]. Bajo la tutela de Clístenes (570 a. C.-507 a. C) aparecen los fundamentos de una nueva legislación con base en la igualdad de todos los ciudadanos atenienses ante la ley sin distinción de origen, es decir la *isonomía* [Mos71]. Crea tribunales (la *Heliea*) y consejos (la *boulé*) de carácter democrático en contraposición a los consejos aristocráticos (el *aerópago*) los cuales poco a poco fueron perdiendo protagonismo con el florecimiento de la democracia como consecuencia de la instauración de la asamblea del pueblo, la remuneración económica diaria para los miembros del Consejo y la selección por sorteo de jurados para los tribunales populares bajo criterios de igualdad [Sin17]. Las instituciones gubernamentales eran pocas y sencillas. El consejo *boulé* estaba constituido por los jefes locales y el caudillo supremo quienes definían la política de todo el pueblo *démos*. El presidente *basileús* lideraba los debates, posteriormente sus decisiones eran presentadas a la asamblea del pueblo *ekklesía*, produciendo un debate abierto a fin de llegar a consensos entre los jefes y el pueblo [Pom11]. La vida en Atenas se encontraba en fuerte relación con la actividad política. Los aspectos del ideal democrático delineaban la posibilidad de los ciudadanos de relacionarse políticamente en una idea de autogobierno igualitario con participación rotativa y equitativa en las decisiones legislativas y jurídicas en el evitamiento de monopolio del poder, pues

la institución de [...] retribución de los cargos públicos ha permitido a todos, cualquiera que sea su origen o su fortuna, participar directamente en la vida de la ciudad, y, al menos un día en su vida, todo ateniense puede presidir la Asamblea política de la ciudad y desempeñar el cargo de jefe supremo. [Mos71, p.22]

Para la consolidación de la democracia, las instituciones en Atenas tenían a su disposición tres procedimientos a) la *ekklesía* o asamblea del pueblo; b) las elecciones; c) la elección por sorteo [Sin17]. No obstante, en el libro IV de *La política* Aristóteles afirma que “parece ser democrático que los cargos se den por sorteo, y oligárquico que se den por elección” [Ari88, p.244], refiriéndose al esquema de combinación de unos y otros en el modelo político griego. En particular, podemos inferir desde esta postura, que mediante la

selección por sorteo podía expresarse la esencia democrática, en libertad de prejuicios o nepotismo, por cuanto todos o la mayoría de los ciudadanos podían participar en igualdad de condiciones.

El proceso de elección realizada por sorteo en Grecia se encontraba en relación con la idea de democracia [Pom11]. Por ejemplo, la boulé, se elegía anualmente y estaba conformado por 500 ciudadanos. En él había participación representativa de cada una de las diez tribus “una especie de distrito cuyos contornos también se determinaron inicialmente mediante el método del azar”³ [Sin11, p.42], en que se dividía Atenas para ese entonces. De este modo, se contaba con la concurrencia de cincuenta ciudadanos mayores de 30 años por cada una de ellas. Los cargos dentro de la boulé, como el del presidente, eran rotativos determinados por sorteo. Según, Pomeroy “el hecho de recurrir al sorteo para decidir la composición de la boulé de cada año fue un elemento democrático trascendental del sistema de Clístenes” [Pom11, p.207].

Además de la constitución de la boulé, los cargos relacionados con la mayoría de las magistraturas, jueces y la constitución del nomothetai (asamblea aprobatoria de las leyes determinadas por la asamblea general), también eran determinados por sorteo en consecuencia “el significado del uso del sorteo se transforma completamente con el florecimiento de la democracia, que sistematiza su uso”⁴ [Sin11, p.41]. Es natural, en este punto, reconocer que el pueblo ateniense estaba relacionado con el uso del sorteo con dados y con el oráculo, sin embargo, se reservó el uso de un aparato, el kleroterion, que seleccionaba al azar los nombres de los ciudadanos que participarían en una institución o su cargo en ella.

El kleroterion era un artefacto de piedra cuya estructura disponía de ranuras horizontales distribuidas en filas y columnas, además, de contar con un tubo en cuyo interior se depositaban bolas blancas y negras para el sorteo. De acuerdo con el procedimiento reiterativo, se aceptaba o rechazaba a todos los participantes de toda una fila, dependiendo del color de la bola que saliese en la parte inferior. El kleroterion (máquina de sorteo, ver Figura 1) fue utilizado para menesteres judiciales y políticos materializando y reforzando el ideal democrático de isonomía [Sin17].



Figura 1: Kleroterion. Ubicación: Museo del Ágora Antigua en Atenas. Tomado, de Mollerus, S. (2009). https://commons.wikimedia.org/wiki/File:AGMA_Kleroterion.

³Traducción propia.

⁴Traducción propia.

Los ciudadanos pasaban al frente e insertaban su pinakia (una placa de bronce que los identificaba, ver Figura 2), en cualquiera de las ranuras dispuestas en el kleroterion otorgando la misma posibilidad a todos los ciudadanos participantes de ser elegidos, una asignación dejada al azar [LR17]. Así que, el uso de este artefacto con su inherente componente aleatorio evitaba lidiar con la corrupción y manipulación de resultados [Gui19].



Figura 2: Pinakia. Ubicación: Museo del Ágora Antigua en Atenas. Tomado, de Marsyas (2005). https://commons.wikimedia.org/wiki/File:AGMA_Pinakia.jpg

En el contexto presentado se muestra una íntima relación del azar con la equidad, algo así como una especie de justicia natural para todos los ciudadanos. El uso de artefactos para la selección aleatoria por sorteo pretende asegurar mediante un protocolo experimental que cada selección se realizará bajo las mismas condiciones de igualdad de posibilidades minimizando el control humano de las condiciones materiales ante la mirada de los ciudadanos in situ. El ideal democrático ateniense se materializaba mediante aspectos como: “la selección por sorteo, rotación de mandatos, igual participación en la vida política, rendición de cuentas de los cargos públicos, el lugar central de la asamblea del pueblo o del consejo, la deliberación en la esfera pública” [Sin17, p.29].

El azar siempre presente en situaciones de incertidumbre, muda de una connotación mágica y adivinatoria en sentido teológico a una connotación de igualdad en sentido seglar otorgando la posibilidad de convertir a cualquier ciudadano en magistrado responsable [Mos71]. El poder que antes estaba determinado por las deidades ahora con la instauración de la democracia se traslada a los ciudadanos en una idea de participación, reflexión y acción igualitaria en asuntos públicos. En el sentido de los SSSC esta mudanza obedece a la necesidad humana de establecerse en libertad de los dioses y se constituye en un esfuerzo germinal de pensar en una sociedad igualitaria, aunque en principio, se trata de igualdad entre ciudadanos y no cobija a esclavos, mujeres niños y hombres libres sin derechos.

El movimiento filosófico de los sofistas pone en tela de juicio el origen de las leyes y los gobiernos. Su importancia radica en que “los pensadores liberaron a los hombres de las supersticiones y trabas de la moral convencional” [Mos71, p.22], sugiriendo el replanteamiento de aquello considerado como verdades universales aceptadas hasta entonces.

Si las leyes son puras convenciones creadas por el

hombre y si en un determinado momento se hallan en conflicto con las leyes naturales, entonces es necesario replantearlas. Y no se trata solamente de replantear las leyes morales, sino también y fundamentalmente de las Nomoi, las leyes de la Ciudad. Estas leyes, que la tradición atribuía a legisladores omniscientes, no son, en realidad, más que simples leyes del momento y de la época que las creó. Una determinada ley, buena para una ciudad, no lo es para otra; lo que aquí es justo no ha de serlo necesariamente en otro lugar. En último extremo, este replanteo de todas las leyes lleva a la misma negación de los dioses. [Mos71, p.24]

El término *nomoi* hace referencia al *nómos*, que en general, se encuentra en relación con las costumbres locales, usos o manera de hacer, derivadas de la tradición, que se anclan a un sistema de valores específico que les otorga legitimidad. Había *nomoi* social, jurídico, religioso, entre otros, que distinguían los límites y dictaminaban las normas de acción de la comunidad. “En una sociedad que llevaba siglos existiendo sin una ley escrita, la línea divisoria que separaba el *nomos* legal y el *nomos* convencional era muy borrosa y estaba basada en la tradición” [Pom11, p.299]

Asistimos, a una transformación en la cosmovisión griega que no abandona la veneración a los dioses y la concurrencia del pueblo a los templos. La humanidad, se “libera” del nexo divino como la inagotable, perfecta e irrefutable fuente de saber y autoridad. La negación de los dioses en lo concerniente a las leyes que dictaminan las costumbres de hacer, las *nomoi*, restituye al ser humano su participación en la constitución de su realidad. El mundo ahora es visto a través de un prisma terrenal en donde se establece que las leyes son cuestionables, modificables y producidas por el hombre. Dicha modificabilidad se establece en consonancia con aquello que potencie la satisfacción de las necesidades colectivas, es decir, en beneficio de la comunidad. El poder y la regulación de los pueblos ahora corresponde a los hombres. A partir de la idea de democracia la realidad emergente es interpretada desde un punto de vista activo y participativo, que, aunque limitada a los ciudadanos, otorga poder decisorio a los hombres. Las *nomoi*, entonces, pueden entenderse aquí como esos SSSC que modelan las formas de entender la realidad y las prácticas sociales dentro de una compleja trama de “sistemas simbólicos que la organizan de una u otra forma” [Rad14, p.62]. Los individuos se presentan en sujeción a las *nomoi* en tanto estas determinan sus maneras de pensar y actuar en diferentes contextos de la vida diaria pública y privada. Sin embargo, el impacto mayor, tiene que ver con la posibilidad de su modificabilidad en términos de tiempo y espacio. De modo que la satisfacción de las necesidades colectivas aparece como producto de un trabajo humano consensuado.

Por ejemplo, la configuración de la *boulé* asociada a la elección de sus miembros por sorteo aleatorio mediante el uso del *kleroterion*, se constituye en formas de proceder culturalmente aceptadas y determinadas para producir y reproducir la vida material y espiritual [Rad14]. Este no es un asunto

menor. Pues la forma de gobierno instaurada por Clístenes al poner su fundamento en la idea de igualdad de los ciudadanos ante la ley, precisa de un mecanismo que asegure la isonomía. Para revestir al acto de neutralidad, cada elección en el *kleroterion* ocurrirá con intervención del azar. En este sentido, los resultados de selección por sorteo ponen de manifiesto, que lo fortuito es una característica del mundo material en aquellas situaciones que no admiten certeza absoluta acerca del porvenir [Car03]. El azar aparece aquí como modo fundamental y culturalmente aceptado de garantizar la igualdad al suprimir toda posibilidad de manipulación y/o control de la experiencia aleatoria. De acuerdo con Cardeñoso y Azcárate [Car03, p.7], Aristóteles,

explica el Azar como el encuentro imprevisto de procesos causales independientes, es una mera apariencia que atañe a las cosas de la naturaleza y a las humanas, nunca a las celestes, a las que considera de otra categoría y pertenecientes a lo que llama el mundo supralunar, donde no existe indeterminación alguna.

Pero estas ideas no aparecen en el vacío. Se encuentran atravesadas por la influencia de la divinidad en la cosmovisión griega. En tanto, las fuerzas causales que intervienen en un suceso (ejemplo: selección aleatoria de jurados) se encuentran más allá del alcance y control del hombre. Es decir, el universo se entiende como gobernado por una secuencia de causas necesarias, que determinan la comprensión última de la realidad. Así, *Tyché* es vista como la personificación del azar y la fortuna, siendo responsable de eventos inesperados de bienaventuranza o infortunio; mientras que, *Ananké* personifica lo inevitable y la necesidad como la fuerza del destino, responsable de eventos previsibles e inevitables. Aquí notamos que el azar es justificado desde la dupla necesidad/azar, que aparece como un imperativo presente en la experiencia humana [Car03]. La necesidad se vincula con aquello que resulta inevitable, explicando los sucesos por medio de causas necesarias; mientras que el azar es considerado como aquello que se desliga de una necesidad aparente en situaciones contingentes. Este último, es el caso de la selección por sorteo para cargos gubernamentales. Esta idea de convergencia de causas inciertas presente en el *kleroterion* para la elección o no de ciudadanos, obedece a *Tyché*, como la fortuna imparcial que sonríe a unos u otros. Esta imparcialidad en términos de la designación azarosa del sorteo brinda confianza en la manera justa de elegir al procurar la igualdad entre ciudadanos. En suma, el azar emerge “como algo desconocido, [que] es explicado como un simple reflejo del cruce inesperado de un conjunto de hechos que son producto de causas necesarias, establecidas por series causales independientes” [Car03, p.8], e inexplicables. Surge entonces una idea en concordancia con la casualidad en términos de la conjunción de condiciones que no son posibles de evitar o presagiar en la experiencia aleatoria.

6. El azar: incertidumbre y juego

El filósofo e historiador Johan Huizinga, en su obra *Homo Ludens* precisa una concepción del juego, en general, como fenómeno cultural. La presencia del juego en la experiencia humana es entendida, entonces, “como una forma de actividad, como una forma llena de sentido” [Hui54, p.11]. En todas las culturas existen diferentes y muy variados tipos de juegos [Bis98]. Una interesante característica es que “permanece en el recuerdo como creación o como tesoro espiritual, es transmitido por tradición y puede ser repetido en cualquier momento” [Hui54, p.18] pasando de generación en generación al reproducir su estructura interna y externa. Así mismo, en la experiencia humana con el juego se evidencia la dimensión emocional. Por ejemplo, la tensión experimentada por el jugador estriba en la incertidumbre del desenlace. El juego es ante todo movimiento, solaz, diversión, involucramiento, intercambio de energía, disfrute, historia de actividad lúdica de los individuos. En él, se encarna la capacidad creadora humana que lleva la impronta de su actividad. En general, desde una postura antropológica, el juego es una actividad humana que revela la cosmovisión colectiva que atraviesa los contextos sociales y culturales [Cor11b].

En relación con los juegos de azar hemos de mencionar que el hombre se ha topado con ellos desde tiempos remotos. Según David [Dav55], resulta difícil determinar con exactitud cuándo el ser humano empezó a jugar juegos de azar. Sin embargo, los hallazgos arqueológicos corroboran que, por ejemplo, en Grecia y Roma este tipo de juegos eran muy populares (por ejemplo, el juego con dados, con tabas, cara y cruz: en Grecia *nyx e hemera* y en Roma *capita aut navia*). La fascinación por los juegos de azar está impregnada por la incertidumbre que aparece en torno a los resultados de este y a los giros insospechados que el juego puede tomar. Indicios de la familiaridad del hombre con esta actividad lúdica de carácter fortuito pueden encontrarse en algunos apartes de la literatura antigua. Por ejemplo, en el canto 23 de la Iliada de Homero, aunque no se dan detalles, sí se menciona que por un fuerte enojo durante el juego de la taba Patroclo le quita la vida involuntariamente al hijo de Anfídamante.

Al parecer, los juegos de azar se encontraban en vínculo con apuestas sin distinción de clases sociales. A este respecto, el historiador romano Suetonio en su obra *Vida de los doce Césares*, en mención a Calígula comenta que este se lucraba, entre otras, con las ganancias procedentes de los juegos de dados. De igual manera relata, de Augusto que,

Su fama de jugador de dados no le preocupó lo más mínimo y jugaba desenfadada y públicamente porque le causaba placer. Incluso, siendo ya anciano, además de en el mes de diciembre, jugaba también en los otros meses, tanto en los días de fiesta como en los no festivos. [...]. En una carta autógrafa, escribe: «Anoche cené, mi querido Tiberio, con los de siempre. Como invitados vinieron Vinicio y Silio, el padre. Durante la cena jugamos, como viejos que somos, tanto ayer como hoy. Al lanzar los dados,

cuando uno sacaba el “perro” o el “seis”, poníamos en el bote un denario por cada dado y, el que sacaba “Venus”, se lo llevaba todo». [Sue08, p.133]

Aunque la práctica de los juegos de azar fue muy conocida, llama la atención la no existencia de algún tipo de manual de reglas y procedimientos de los juegos, cuestión que hace suponer que las reglas, los roles de los participantes, los materiales requeridos para el juego etc., pasaban de una generación a otra por tradición oral [Fer07]. Cicerón en el libro I y II sobre *la adivinación* presenta sus reflexiones acerca del azar y la adivinación. En uno de sus apartados, cuestiona a Carnéades sobre la casualidad de un evento haciendo referencia al juego con tabas,

¿Puede producirse por casualidad una cosa que alberga en sí todos los atributos propios de la verdad? Al tirar las cuatro tabas se obtiene por casualidad una jugada de Venus; ¿piensas que también por casualidad saldrán cien jugadas de Venus, al tirar cuatrocientas tabas? [Cic99, p.59]

De igual manera, en el libro II, Cicerón en relación con la adivinación mediante interpretación de tablillas menciona “¿qué es una tablilla? Lo mismo, más o menos, que jugar a la morra, tirar las tabas o las téseras, cosas en las que interviene el azar y la casualidad, no el razonamiento y la deliberación” [Cic99, p.221]. Aquí, por ejemplo, se mencionan tres juegos de la época en los cuales hay intervención directa del azar. Podemos notar entonces no solo la familiaridad con este tipo de actividades lúdicas de carácter fortuito sino a su vez toma de consciencia de la intervención del azar en ellas.

En cuanto a las tabas, juego muy popular en la antigüedad, se llevaba a cabo con huesos de astrágalo de animales pequeños (corderos, cerdo, ovejas, cabras, etc.) que poseen dos bases curvas y cuatro caras de formas diferentes: una más o menos plana, otra muy irregular, otra convexa y otra cóncava (ver Figura 3). Los valores asignados a las caras laterales fueron 1 y 6 mientras que a las caras estrechas se asignaron 3 y 4 (los valores 2 y 5 faltaban en el astrágalo) [Ine99]. Así mismo, se recurría al uso de imitaciones de tabas en materiales como piedra, arcilla, vidrio, marfil, etc. El primigenio juego de azar con astrágalos consistía en lanzar al aire cuatro de ellos observando las combinaciones obtenidas en las caras superiores. Se sabe que se trataba de treinta y cinco combinaciones posibles (con repetición). La peor combinación, que era llamada perro o buitre, probablemente se atribuía cuando las cuatro caras obtenidas tenían valor 1, mientras que el mejor, se denominaba Venus o Afrodita y se revelaba cuando las cuatro tabas caían en caras diferentes [Dav55]. Conviene subrayar que las tabas cuentan con cuatro caras de formas diferentes, la probabilidad de obtener una u otra también es distinta a diferencia de los dados. Ineichen [Ine99] realizó una modelación aproximada de forma empírica (con tabas modernas) llegando a establecer una probabilidad aproximada del 10 % para 1 y 6, y del 40 % para 3 y 4. La probabilidad aproximada de obtener Venus es de 3,8 % y perro 0,01 %. No obstante,

parece que ni los griegos ni los romanos hicieron nunca tales observaciones y tales cálculos. Y en relación con los juegos de azar nunca se habló de "probabilidad". – Pero conocían bien el efecto del azar, el efecto de la fortuna, y se puede ver que para los griegos y los romanos la caída de los huesos -o de los dados- era la imagen de un acontecimiento fortuito, accidental, imprevisto. [Ine99, p.7]



Figura 3: Izquierda: Tabas. Tracia, siglo III a. C. Derecha: Dos mujeres jugando a las tabas, Terracota, siglo IV a. C. Ubicación: Museo Británico, Londres. Tomado, de <https://domus-romana.blogspot.com/2019/07/alea-los-juegos-de-azar-en-la-antigua.html>

Las tabas, entonces, parecen ser precursores de los dados como producto del desgaste generado, por su uso en el juego, que tendía a tomar forma aproximadamente cúbica. El dado más antiguo fue hallado al norte de Irak alrededor del tercer milenio a. C., está construido en cerámica y la distribución de los puntos difiere de los dados actuales, pues estaban dispuestos de tal forma que en las caras opuestas se encontraran en orden consecutivo (2 frente a 3, 4 frente a 5 y 6 frente a 1). Los dados imperfectos o manipulados de la época omitían algún valor o duplicaban otro, también había dados con pequeños agujeros en donde se introducía una esfera para que el dado adquiriera la tendencia a caer de forma predeterminada [Dav55].

Ya en la antigüedad se reconocía que los resultados obtenidos al lanzar dados al aire evidenciaba resultados aleatorios teniendo como protagonista el azar. De modo que no es de extrañar que los jugadores idearan estrategias que les permitieran obtener ciertos resultados en el lanzamiento de los dados para su beneficio. Así que, para eliminar cualquier posibilidad de sesgo o de fraude, en el juego de azar con dados, ya fuese por la destreza del jugador en el lanzamiento (adquirida por la práctica) o por tener un dado cargado por presentar deformidades, huecos en su interior o algún tipo de huellas o marcas en sus caras, los romanos idearon la turrícula. La turrícula (ver Figura 4) consistía en una sucesión alternada de láminas inclinadas fijadas dentro de una pequeña torre. Los dados se introducían en la parte superior de la torre, a continuación estos rebotaban en las láminas internas y finalmente salía por una abertura dispuesta en la parte inferior [Par19]. Este peculiar artefacto impedía cualquier maniobra de control, por parte de los jugadores, sobre los dados manteniendo la imparcialidad y justicia en los resultados.



Figura 4: Izquierda: Turrícula. Torre de dados de Vettweiss-Froitzheim, romana, siglo IV d. C. Ubicación: Rheinisches Landesmuseum, Bonn. Tomado, de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vettweiss-Froitzheim'Dice'_Tower.jpg. Derecha: Jugadores de dados con turrícula. Ubicación: Antioch Expedition Archives, Department of Art and Archaeology, Princeton University. Tomado, <https://flashbackarchaeologica.es/turricula-nuevo-artefacto-flashback/>

Aunque la práctica del juego con tabas y dados en las civilizaciones antiguas fue muy difundida en las diferentes esferas sociales (Bennett, 1999), parecen no haberse topado con el saber en relación con la frecuencia relativa en torno al lanzamiento de dados que, en particular, tiende a estabilizarse en un número importante de lanzamientos (en un dado bien construido en donde los resultados son equiprobables). Llama particularmente la atención que los eruditos de la época no se hubiesen ocupado de estudiar un dado cúbico asignando el mismo peso a cada cara por cuanto los antiguos griegos ya se habían familiarizado con los poliedros regulares convexos, entre ellos, el cubo (David, 1955). Según Mateos-Aparicio “el no advertir la equiprobabilidad de los resultados elementales en dados equilibrados, fue una de las causas de que el desarrollo del cálculo de probabilidades se retrasara durante siglos” [MA02, p.2], pues es sabido que ni en Roma ni en Grecia se trató el problema de los juegos de azar desde un punto de vista axiomático (como se hizo en Grecia con los *Elementos* de Euclides en geometría), ya que la intervención de la incertidumbre se alejaba del interés de la época: la búsqueda insistente de la certeza, de la verdad absoluta [Cor11a].

La no percepción de la equiprobabilidad obedeció, posiblemente, en primer lugar a los defectos de uniformidad presente en los dados de la época y en segundo lugar a la relación del uso de estos artefactos en ceremonias de adivinación y las creencias culturales asociadas. Así, por ejemplo, la predicción del resultado del lanzamiento de un dado no fue posible en las culturas antiguas, fundamentadas en el determinismo, puesto que se consideraba la imperante intervención divina en situaciones de incertidumbre [MA02]. En este sentido,

parece razonable inferir que el misterio y el temor que la ceremonia religiosa otorga al sorteo con fines adivinatorios impediría a las personas especular demasiado al respecto. Cualquier intento de predecir el resultado de una tirada podría interpretarse, sin duda, como un intento de predecir la acción de la

deidad en cuestión, y cabría esperar que tal acto de impiedad trajera consigo mala suerte. [Dav55, p.8]

En síntesis, los juegos, en sentido general, aparecen como una actividad de divertimento que es creativa e inventiva. Su forma organizada de desarrollo presenta un carácter estético cuyo aspecto se traduce en el equilibrio de las reglas. De igual manera, el juego lleva en sí una carga ética en tanto se espera que los participantes, aún en medio de la tensión generada por el juego, se mantengan dentro de las reglas y límites permitidos, como una analogía de las fronteras explícitas e implícitas que demarcan los SSSC en la vida real. El juego aparece en respuesta a la satisfacción de una necesidad humana de divertimento que involucra la dimensión emocional de la cual es imposible sustraerse. En el juego, así como en cualquier actividad, los sujetos necesitan organizarse y establecer formas de relación con el otro las cuales se encuentran en atención a las reglas o normas que van a regular las acciones de los jugadores durante el desarrollo de este en tiempo y espacio. Por otra parte, la incertidumbre presente en los juegos de azar se manifiesta como un componente de la vida misma. Un componente que hace parte de la cotidianidad del ser humano. De acuerdo con Fernández “Los juegos de azar desde siempre han sido muy populares, y en épocas y ocasiones perseguidos. En Roma el juego alcanzó tal importancia e incidencia en la vida social que llegó a prohibirse en determinadas ocasiones y épocas del año” [Fer07, p.8]. Así, la actividad lúdica alrededor de los juegos afectados por el azar se encontraba estrechamente vinculada a las dinámicas culturales y a las reglas sociales que perfilan aquello que es lícito y bien visto y lo que no lo es en vínculo con las creencias deterministas del mundo como regido, organizado y dictaminado por los dioses. No obstante, aunque los juegos de azar hicieron parte del día a día de las civilizaciones antiguas de forma generalizada, parece que el asunto de la incertidumbre escapaba del interés de los eruditos de la época pues, por ejemplo, los antiguos griegos “insistían en encontrar la verdad absoluta y se revelaban en contra de todos los pronunciamientos inciertos” [Cor11a, p.35]. Esto tiene que ver con las ideas constitutivas acerca de la naturaleza del mundo como fundamentalmente regida por los dioses y en consecuencia incuestionable. De modo que el hombre aquí no aparece en su libre arbitrio sino sujetado al designio de los dioses.

7. Síntesis final

La experiencia del ser humano con lo incierto ha estado presente a lo largo de la historia. Nuestra percepción de los fenómenos afectados por la incertidumbre ha dependido en gran medida de los sistemas semióticos de significación cultural que nos capacitan con categorías discriminatorias en relación con la verdad, lo bello, lo bueno, etc., permitiéndonos interpretar y comunicar el mundo que nos rodea.

Dado que estos SSSC se encuentran en constante movimiento y cambio, nuestras formas de comprender el azar varían de acuerdo con la época y la cultura. Es así como, por

ejemplo, los oráculos y los sistemas de adivinación, la creación artefactos aleatorios, entre otros, se configuran en esfuerzos del ser humano por interactuar con lo incierto y, además, como un intento por comprender el azar como la expresión de lo indeterminado [Car03]. De acuerdo con Radford,

Las formas de pensar de los individuos, cómo sienten y expresan sus sentimientos, lo que hacen, imaginan, esperan o sueñan, están profundamente *entrelazadas* con la cultura o culturas en las que viven. Una de las consecuencias es que los individuos se ven profundamente *afectados* por sus culturas, tanto en lo que llegan a conocer como en la forma en la que llegan a ser. [Rad21, p.205]

De este modo, en la incesante búsqueda del saber, el ser humano ha encontrado en la incertidumbre un escenario complejo que trae consigo el agobio de la no certeza y la no predictibilidad. Si bien hay acuerdo en la comunidad académica con relación a que la emergencia primigenia del cálculo moderno de las probabilidades emerge del intercambio epistolar del trabajo de Fermat y Pascal unido a las aportaciones de Hyugens y Bernoulli que constituyen un pilar importante para el desarrollo de la teoría de la probabilidad, no podemos desconocer que existe evidencia del contacto de las civilizaciones antiguas con el azar y lo probable. Una mirada a las condiciones previas de la probabilidad antes de la modernidad muestra algo que no es probabilidad pero que fue transformándose en ello [Hac95]. Es decir, un tratamiento del azar como una vivencia del ser humano para aproximarse a fenómenos íntimamente ligados a la condición humana [dlR08]. En los casos presentados, al entrar en contacto con el azar las categorías demarcadas por los SSSC que posibilitan el acceso al mundo desde esquemas de interpretación, escapan de la racionalidad de la época por el determinismo imperante. En suma,

la experiencia del azar es una convulsión que nos deja perplejos, una alteración que nos asusta nos sorprende y, lo que es más importante, nos desarma, esto es, nos priva de la seguridad, la familiaridad y la normalidad que se derivan del flujo constante de lo natural en el orden de los acontecimientos y de lo esperable en el orden de los deseos. Naturalmente, existen diversos grados de intensidad con los que un evento fortuito puede irrumpir en la vida de un ser humano –una muerte accidental es incomparable con el encuentro fortuito con quien nos debe dinero-. Sin embargo, hemos de reconocer que el interés que despierta el azar aparece principalmente en casos extremos de implicaciones tanto positivas como negativas. Es frente a ellos que el ser humano queda desorientado y, por ende, demanda una explicación satisfactoria. [dlR08, p.46]

Agradecimientos

Liliana González agradece a la Fundación Universitaria Konrad Lorenz por abrir el espacio para este artículo y al Doc-

torado Interinstitucional en Educación DIE, sede Universidad Distrital Francisco José de Caldas por propiciar estas reflexiones.

Referencias.

- [Ari88] Aristóteles, *Política*, Gredos, Madrid, 1988. (M. García, Trad.)
- [Car03] J.M. Cardenoso y P. Azcárate, *Conocimiento profesional de referencia con relación al conocimiento probabilístico. Una aproximación a las ideas de los futuros profesores de primaria sobre el mismo*, en: Actas 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, Lérida, 2003, pp. 1-45.
- [Ben98] D.J. Bennett, *Ramdoness*, Harvard University Press, London, 1998.
- [Bis98] A.J. Bishop, *El papel de los juegos en educación matemática*, Uno (1998), no. 18, 19-30.
- [Cic99] M.T. Cicerón, *Sobre la adivinación. Sobre el destino. Timeo*, Gredos, Madrid, 1999. (Á. Escobar, Trad.)
- [Cor11a] F. Corbalán y G. Sanz, *La conquista del azar: la Teoría de probabilidades*, RBA Libros, S.A, Barcelona, 2011.
- [Cor11b] P. Corbal, *Jugando a definir. El juego como término y fenómeno cultural*, en: actas 9º Congreso Argentino de Educación Física y Ciencias 13 al 17 de junio de 2011, La Plata, 2011, pp. 1-8.
- [Dav55] F.N. David, *Studies in the History of Probability and Statistics. Dicing and Gaming (A Note on the History of Probability)*, *Biometrika* **42** (1955), no. 1/2, 1-15.
- [dlR08] I. de los Ríos, *La experiencia griega del azar y el concepto de Tyxh en la filosofía de Aristóteles*, Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Madrid, 2008.
- [Fer07] S. Fernández, *Los inicios de la Teoría de la Probabilidad*, *SUMA* **55** (2007), 7-20.
- [Gar70] R. Garaudy, *Introducción al estudio de Marx*, Ediciones ERA, S.A., México, 1970.
- [Ger80] L. Gernet, *Antropología de la Grecia Antigua*, Taurus ediciones, S.A., Madrid, 1980. (B. Moreno Carrillo, Trad.)
- [God86] M. Godelier, *The mental and material. Thought economy and society*, Verso, Bristol, 1986. (M. Thom, Trad.)
- [Gui19] D. Guillemette, *Histoire et enseignement-apprentissage des probabilités: quelques réflexions épistémologiques et didactiques*, en: V. Martin, M. Thibault et L. Theis (Eds.), *Enseigner les premiers concepts de probabilités: un monde de possibilités!*, Québec, 2019, pp. 19-42.
- [Hac95] I. Hacking, *El surgimiento de la probabilidad: un estudio filosófico de las ideas tempranas acerca de la probabilidad, la inducción y la inferencia estadística*, Gedisa editorial, Barcelona, 1995.
- [Heg95] G.E.F. Hegel, *Lecciones sobre la historia de la filosofía I*, Fondo de cultura económica. (Obra original publicada en 1833), México, 1995. (W. Rocas, Trad.)
- [Her09] D. Hernández, *Oráculo y ley: una aproximación a la influencia política de la adivinación en la Antigüedad*, *Espacio Tiempo y Forma. Serie II, Historia Antigua* **2** (2009), no. 22, 299-309.
- [Hom96] Homero, *Ilíada*, Gredos, Madrid, 1996. (E. Crespo, Trad.)
- [Hui54] J. Huizinga, *Homo Ludens*, Epublibre, 1954. (E. Imaz, Trad.)
- [Ine99] R. Ineichen, *Dadi, astragali e gli inizi del calcio delle probabilità*, Conferenza allá Facoltà di scienze economiche. Università della Svizzera italiana, Lugano, 1999.
- [Leo69] A.N. Leontiev, *El hombre y la cultura*, en: El hombre y cultura: problemas teóricos sobre educación, 1969, pp. 9-48.
- [LR17] L. López-Rabatel, *Las aportaciones de la arqueología a la historia de la democracia ateniense*, *Daimon Revista Internacional de Filosofía* (2017), no. 72, 81-102.
- [Mac59] R. Maciver y C. Page, *Society: An Introductory Analysis*, Macmillan Co. Ltd., London, 1959.
- [Mar03] K. Marx, *El 18 brumario de Luis Bonaparte*, Fundación Federico Engels. (Obra original publicada en 1852), 2003.
- [MA02] G. Mateos-Aparicio, *Historia de la Probabilidad (desde sus orígenes a Laplace) y su relación con la Historia de la Teoría de la Decisión*, Editorial AC., Madrid, en: F. J. Martín, 1ras jornadas de historia de la estadística y de la probabilidad, 2002.
- [Mos71] C. Mossé, *Las doctrinas políticas en Grecia*, A. redondo editor, Barcelona, 1971. (R. de la Iglesia, Trad.)
- [Par19] B. Parzys, *Des fréquences aux probabilités: apprendre à modéliser*, en: V. Martin, M. Thibault et L. Theis (Eds.), *Enseigner les premiers concepts de probabilités: un monde de possibilités!*, Québec, 2019, pp. 43-70.
- [Pom11] S. Pomeroy y S. Burnstein, *La Antigua Grecia: Historia política, social y cultural*, Crítica, Barcelona, 2011. (T. de Lozoya, Trad.)
- [Rad06] L. Radford, *Semiótica cultural y cognición*, en: R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama, y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano*, México, 2006, pp. 669-689.
- [Rad14] ———, *Cultura e historia: dos conceitos difíceis e controversias em aproximações contemporâneas na educação matemática [Culture and history: Two difficult and controversial concepts in current approaches to mathematics education]*, en: I. Abreu Mendes y C. Farias da Silva (Eds.), *Cultura, Práticas Sociais e Educação Matemática*, São Paulo, 2014, pp. 49-68.
- [Rad21] ———, *Teoria da objetivação: uma perspectiva Vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática*, Livraria da Física, São Paulo, 2021. (Tradução de B. Morey y S. Gobara).
- [Sta38] J. Stalin, *Sobre el materialismo dialéctico y el materialismo histórico*, Ediciones los Comuneros, 1938.
- [Sin11] Y. Sintomer, *Petite histoire de l'expérimentation démocratique. Tirage au sort et politique d'Athènes à nos jours*, La Découverte / Poche, Paris, 2011.
- [Sin17] ———, *Sorteo y Política: ¿de la democracia radical a la democracia deliberativa?*, *Daimon Revista Internacional de Filosofía* (2017), no. 72, 25-43.
- [Sue08] Suetonio, *Vida de los doce césares*, Epublibre, 2008. (A. Cuatrecasas, Trad.)
- [Ver91] J.P. Vernant, *Mito y religión en la Grecia antigua*, Editorial Ariel S.A., Barcelona, 1991. (S.M. del Carril, Trad.)

Acerca del autor: Liliana González es estudiante del Doctorado Interinstitucional en Educación DIE (con Énfasis en Educación Matemática), sede Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Actualmente se desempeña como docente de la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Disfruta pasar tiempo en familia y con amigos.

El Poder de la Ciencia en el Caos

En un mundo devastado por las consecuencias del cambio climático, donde los vestigios de lo que alguna vez fueron prósperas naciones ahora yacen sepultados bajo capas de polvo y desesperación; los ríos, antes caudalosos, ahora son puros hilos de agua sucia, contaminada y usada para calmar la sed de los pocos sobrevivientes que vagan entre ruinas y escombros; los campos que alguna vez fueron fértiles están ahora marchitos y muertos, incapaces de alimentar a una población que se reduce cada día más. Era indudable que la Madre Tierra estaba alzando su voz con un rugido ensordecedor, reclamando con ira lo que durante tanto tiempo había sido suyo y que, por culpa de su nobleza, fue ignorado y explotado sin piedad por la humanidad. La Madre Tierra llegó a su límite y tal vez, la única opción era reconocer su supremacía y comenzar a jugar según sus reglas.

A pesar de los avances tecnológicos que alguna vez fueron promesa de la salvación de la humanidad, las mentes más brillantes se enfrentaban a la realidad de que el daño causado al planeta era irreversible. Los poderosos, envueltos en su opulencia y rodeados de lujo, se enfrentaban a la dura verdad de que su dinero no podía comprar la salvación. Los refugios subterráneos contruidos con los más altos estándares de seguridad se convirtieron en tumbas para aquellos que alguna vez se consideraron intocables; mejor dicho, toda una ironía del destino, pues aquellos que alguna vez estuvieron en la cima de la sociedad ahora luchaban por sobrevivir en un mundo que los había dejado atrás; la desesperación y el miedo se apoderaban de todos, ricos y pobres por igual. Llegó la hora de aprender de nuevo a respetar el equilibrio delicado de la Madre Tierra y venerar su poder inquebrantable.

El ser humano, consciente de que cada movimiento en el tablero geopolítico podía ser una amenaza por agotar los recursos que de por sí ya eran escasos, también era consciente de que las tierras desiertas y estériles podrían contener la clave para la salvación, pues podía existir la posibilidad de que estas albergaran recursos inexplorados que podrían marcar la diferencia entre la supervivencia y la extinción. Para los países sobrevivientes, la esperanza de un futuro mejor superaba cualquier temor al costo que tendrían que pagar, por lo que Sionaya, una de las naciones sobrevivientes, inició una ofensiva para reclamar un territorio sin dueño, sabían que la guerra no era una opción sin consecuencias y que esta era una apuesta a raíz de la desesperación.

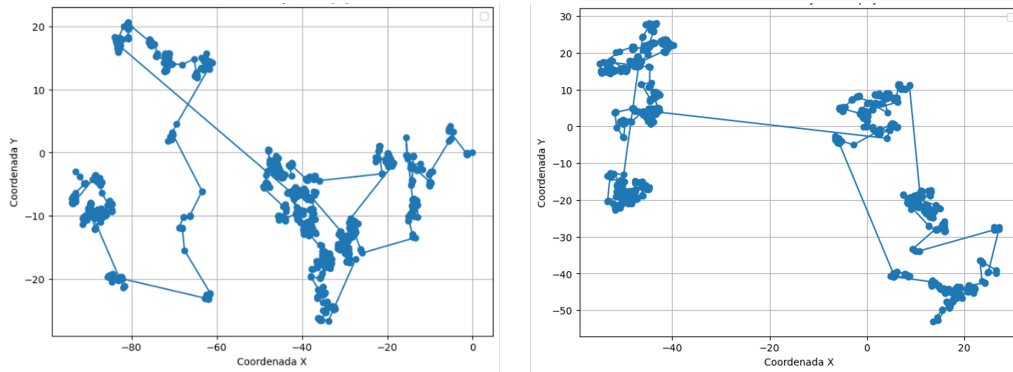
Sin embargo, en una carrera por la conquista de ese territorio, los ejércitos de Sionaya y otros países se encontraron con ataques de la misma naturaleza, ataques que nadie se

esperaba, pues tuvieron que enfrentarse a tormentas de arena que azotaban sin piedad, generando interferencias electromagnéticas que dificultaron las comunicaciones entre ejércitos y países. Cuando Sionaya logró pisar la tierra días después de lo esperado, pudo notar que no eran los únicos que se encontraban allí, pues ya estaba situado el ejército de Nolibá, que pelearía a toda costa con tal de que no le quitaran ni un centímetro de la tierra que ellos ya habían conquistado. Como ya llevaban un buen tiempo estudiando estos terrenos, el ejército nolibense logró resistir cada ataque de las fuerzas de Sionaya, utilizando tácticas guerrilleras, emboscadas y trampas ingeniosas. Mientras pasaban los días, el ejército de Sionaya se veía perdido, se equivocaron al pensar que habían iniciado una guerra, cuando ya otra nación la había iniciado mucho antes, dando un giro total a lo planeado, por lo que comenzaron a cuestionarse si valía la pena seguir arriesgando vidas y recursos. Sionaya se encontraba en una encrucijada.

Así, decidieron retroceder y transmitir a su nación la necesidad de una planificación más cuidadosa en la selección de territorios. La noticia llegó al gobierno de Sionaya, donde se puso en marcha el diseño de un nuevo plan. Esta vez, optaron por enviar drones y robots insectoides para explorar las tierras restantes, asegurándose de que no estuvieran habitadas por humanos que pudieran obstaculizar sus planes de conquista. Entre las numerosas ideas que surgieron, un grupo de biólogos observó con asombro cómo una familia de pájaros volaba hacia un horizonte lejano, una visión inusual después de los estragos del cambio climático que habían llevado a la extinción de muchas especies voladoras. Decidieron seguir el vuelo de estos pájaros durante varios días y descubrieron con sorpresa que siempre migraban a las mismas tierras, señalando la existencia de regiones donde la naturaleza aún prosperaba, lejos de su propio territorio. Este hallazgo encendió una luz de esperanza en medio del caos y la desolación, pues incluso en el mundo en el que estaban, estos pájaros mantenían su antiguo instinto para encontrar tierras fértiles y seguras.

Intrigados por este descubrimiento, los biólogos de Sionaya se sumergieron en una investigación más detallada sobre el comportamiento migratorio de los pájaros y las razones detrás de su elección de destino. Mapearon las rutas migratorias, estudiaron los patrones climáticos y analizaron la disponibilidad de recursos en las áreas de destino. Durante meses, los científicos observaron pacientemente el vuelo de las aves en las tierras a las que solían migrar, registrando meticulosamente las coordenadas de las aves en cada paso del tiempo.

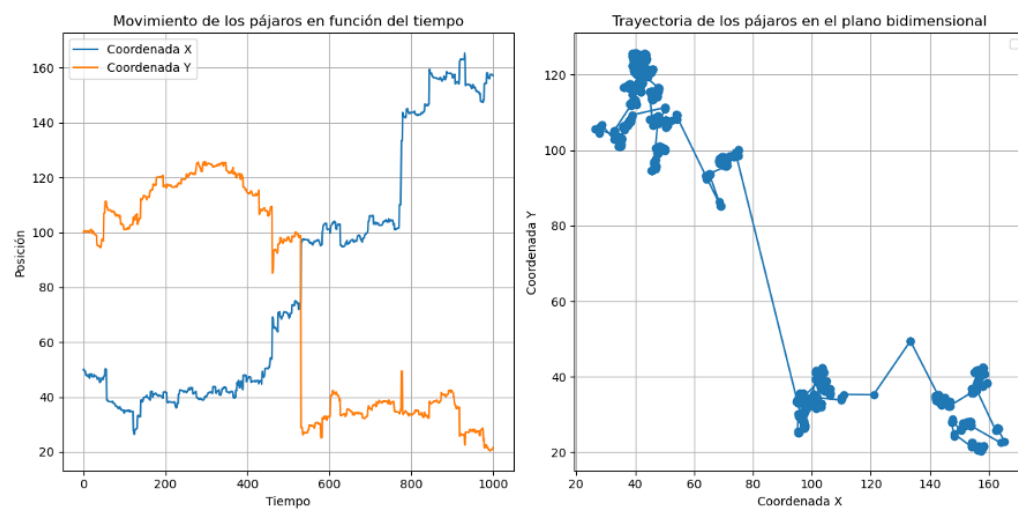
Cuando tabulaban estos resultados, se encontraban con gráficas como las siguientes:



De modo que comenzaron a notar un patrón intrigante en la forma en que los pájaros se desplazaban a través del cielo, pues en lugar de seguir una trayectoria predecible y uniforme, sus movimientos estaban marcados por saltos largos e infrecuentes, seguidos de períodos de calma relativa. Todo parecía

indicar que este comportamiento era consistente con el movimiento de Levy, una forma de movimiento aleatorio que se caracteriza por su naturaleza impredecible y sus saltos inusuales.

Además de analizar la trayectoria de los pájaros en el plano bidimensional, también analizaron su posición (metros) en función del tiempo (minutos), siendo más fácil para ellos el análisis de los datos registrados:



Emocionados, se propusieron utilizar la función matemática que modelara con la mayor precisión, la trayectoria de vuelo basada en el movimiento de Levy, logrando realizar simulaciones computarizadas que reproducían fielmente el vuelo de los pájaros. La función de densidad de probabilidad es descrita como

$$p(x, \mu, c) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \frac{1}{x^{3/2}} e^{\frac{c}{2(x-\mu)}},$$

siendo x la variable aleatoria, μ el punto central de la distribución y c el parámetro de estabilidad.

Dicha función no solo capturaba la aleatoriedad y los saltos inusuales en el movimiento de los pájaros, sino que también

proporcionaba información valiosa sobre la distribución de recursos en el área. Para ajustar μ , fue necesario fijar un punto en una de las regiones donde los pájaros solían emprender su migración, un punto que se equiparara a las coordenadas (0,0); y por el comportamiento de las trayectorias, c tendría un valor igual a 1,5, dando cuenta de los movimientos moderadamente recurrentes, pero con saltos de gran amplitud, que estos animales ejecutaban al explorar territorios dispersos en su búsqueda de sustento, mientras abarcaban distancias de significativa magnitud. Quién sabe, quizás en un porvenir cercano, este coeficiente descienda, porque los pájaros habrían discernido ya los recursos en áreas más acotadas pero precisas.

Estudiando esta función de densidad de probabilidad, los

científicos desenterraban valiosa información sobre las preferencias migratorias de estas aves y las posibles influencias ambientales que moldeaban sus desplazamientos; sin embargo, al analizar la relación de esta función con la dispersión de semillas en el suelo, encontraron una correlación sorprendente. Resultó que las áreas donde los pájaros exhibían saltos más frecuentes en su movimiento coincidían con regiones de alta densidad de semillas. Era como si el movimiento de Levy guiara los pasos de los pájaros para maximizar sus oportunidades de encontrar alimento, saltando de un área rica en recursos a otra.

Es así como Sionaya inició la preparación para una segunda incursión, esta vez ya equipados con un entendimiento más profundo y una estrategia más refinada, los científicos decidieron que, en lugar de realizar búsquedas aleatorias, podrían utilizar modelos matemáticos basados en la función de Levy para guiar sus drones y robots insectoides hacia las áreas más prometedoras. Al seguir los vuelos de estos pájaros, confiaban en que podrían desenterrar tierras de fertilidad y vida, trans-

formando así la adversidad en oportunidad y la incertidumbre en esperanza.

En lugar de revelar el secreto matemático de los pájaros y las semillas, el país decidió mantenerlo celosamente guardado, reconociendo su valor como un tesoro invaluable en medio del caos, sentían que era una revelación divina, producto de la fusión entre el poder de la ciencia y el instinto de la naturaleza. Además, reconocían que debían obrar bajo las leyes inquebrantables de la naturaleza; quizás este nuevo capítulo marcaría el comienzo del perdón de la Madre Tierra hacia la humanidad por sus transgresiones pasadas.

Leidy Catherine Sánchez Ascanio

leidyc.sancheza@konradlorenz.edu.co

Acerca de la autora: Leidy es ingeniera industrial y matemática. Es una amante de las novelas policíacas y del mundo profesional del crimen. Actualmente se encuentra trabajando como Model Validation Manager en ScotiaGBS del grupo Scotiabank.

PASKÍN-CHALLENGE

CONCURSO PARA ESTUDIANTES DE COLEGIO

Un recorrido óptimo por el centro de Bogotá

Una turista visita Bogotá con el objetivo de conocer el centro de la ciudad. Después de leer en internet sobre la ciudad, creó la siguiente lista de lugares que quería conocer, e incluyó el tiempo que deseaba permanecer en cada uno:

- La Plaza de Bolívar (45 minutos).
- El Museo del Oro (6 horas).
- La terraza de la Torre Colpatria (30 minutos).
- La plaza de la Perseverancia (2 horas).
- La exposición del Museo Botero (6 horas).
- La Biblioteca Luis Ángel Arango (7 horas).
- El cerro de Monserrate (5 horas).
- El Museo Nacional (6 horas).
- El Museo de Arte Moderno (150 minutos).

La turista se hospedará en el Hotel Tequendama, ubicado en la Carrera 10 # 26-21. Estando ahí, planea iniciar su recorrido a los lugares de interés a las 8:00 a.m. Después, almorzará todos los días entre las 12:00 y la 1:00 p.m., continuará su recorrido y regresará al hotel máximo a las 5:00 p.m. Dado que la turista realizará todos los recorridos caminando, consideraremos que se desplazará a una velocidad constante de 4.5 km/hora.

Con el objetivo de conocer todos lugares en el menor tiempo posible, ¿qué lugares deberá conocer cada día y en qué orden?

Para resolver el problema tenga en cuenta la siguiente información:

- El objetivo consiste en diseñar un cronograma detallado que minimice lo más posible el tiempo que la turista está por fuera del hotel.

- Para los recorridos podrá utilizar cualquier camino entre la carrera décima (sobre la que está ubicado el hotel) y la carrera segunda este (sobre la que está ubicada la entrada al cerro de Monserrate), así como entre las calles 31 (sobre la que está ubicada la Plaza de la Perseverancia) y la calle 11 (sobre la que está ubicada el inicio de la Plaza de Bolívar).

- Utilice la aplicación Google Maps para diseñar el mapa que la turista utilizará.

- No se deben considerar tiempos de desplazamiento para almorzar ni buscar restaurantes, ya que la turista almorzará siempre en alguna de las atracciones turísticas. Almorzar se puede hacer antes, durante o después de una visita. En cualquier caso, esa hora de almuerzo no se debe incluir como el tiempo de visita a un sitio.

- La turista puede regresar al hotel en cualquier momento del día, pero nunca después de las 5 pm. Por eso, el cronograma detallado de su visita debe también considerar los tiempos que toman los desplazamientos.

- Los tiempos de cada desplazamiento se deben redondear hacia abajo. Por ejemplo, si ir del punto A al punto B toma 3 minutos y 45 segundos, entonces se considera que el tiempo del desplazamiento es de 3 minutos.

- Cada lugar debe visitarse en un solo día y de manera continua. Por ejemplo, si la visita al sitio A es de 5 horas, la turista no puede pasar 3 horas un día y luego 2 horas otro día. El almuerzo, sin embargo, puede interrumpir la visita y es el único caso en el cual la visita a un sitio no es continua.

Bases del Concurso:

Elegibilidad:

Estudiantes menores de 18 años, de cualquier nacionalidad y pertenecientes a un colegio colombiano.

Duración:

El concurso finaliza un año después de la publicación del Paskín que presenta el problema, o hasta que haya una persona ganadora.

Documento Solución:

La solución debe presentarse de manera individual en un documento formal, escrito en español, en el que se explique de manera detallada la solución al problema planteado.

La primera página del documento debe contener por lo menos los siguientes seis elementos:

- (1) El nombre completo de la persona participante.
- (2) El curso de la persona participante.
- (3) La edad de la persona participante.
- (4) El nombre completo del colegio de la persona.
- (5) Municipio o ciudad de residencia.
- (6) Teléfono y correo electrónico de contacto.

El cuerpo del documento, que sigue a esta primera página, puede tener cualquier extensión para informar sobre la solución.

Los y las participantes pueden usar libros, blogs, computadores, internet, programas computacionales, pero no pueden consultar o interactuar con ninguna otra persona durante la solución. Ninguna contribución puede ser hecha por otra persona que no sea la persona que envía la solución.

Aunque los problemas estarán destinados a un análisis teórico, los participantes pueden realizar experimentos relevantes y presentar los datos resultantes en su trabajo si lo desean.

En caso de que se utilicen, cada solución debe incluir una lista de todas las referencias.

Las soluciones pueden usar algoritmos y herramientas computacionales existentes (que incluyen no solo herramientas disponibles gratuitamente, sino también herramientas dentro de sistemas como Matlab o Mathematica), siempre que se mencionen y citen correctamente y los métodos se expliquen claramente en la solución del problema. Cualquier código de programación, si se escribió uno, debe incluirse como un apéndice de la solución. Sin embargo, todos los algoritmos, métodos y resultados deben explicarse en el texto principal del documento para recibir consideración durante la evaluación.

Las soluciones enviadas pueden incluir ecuaciones, gráficos, figuras y tablas. Cada solución debe incluir como mínimo:

- (1) Una corta introducción del problema, tal como lo interpretó la persona participante.
- (2) Una explicación de todas las suposiciones y aproximaciones realizadas.
- (3) Justificación de todo el trabajo realizado.
- (4) Una breve discusión de las fortalezas y debilidades del enfoque adoptado.

Envío de la solución:

Las soluciones pueden enviarse como archivos .pdf, .odf, .doc o docx. Cada participante debe enviar su solución por correo electrónico a paskin@konradlorenz.edu.co y los documentos deben recibirse antes de que finalice el concurso. Si la solución no se recibe por correo electrónico durante la duración del concurso, la solución no será considerada. El documento completo debe incluirse como un archivo adjunto al correo electrónico. No envíe un enlace al documento en un servicio en la nube como Google Docs, Dropbox, etc. Una vez recibida la solución se le notificará la recepción en un plazo menor a cinco días hábiles. Si Ud. no recibe confirmación, comuníquese con el editor de la revista.

Resultados:

Toda solución recibida se irá evaluando en orden de llegada hasta la finalización del concurso. Cuando una solución sea correcta, la o el participante será invitada o invitado a exponer y justificar de manera verbal su solución de manera remota sincrónica utilizando alguna plataforma virtual como Teams, Zoom o Google Meets.

Premiación:

- La primera solución correcta será publicada en una siguiente edición del Paskín. Será una versión simplificada de la solución realizada en colaboración con el comité editorial, que incluirá una corta reseña de la persona ganadora.

- Certificado. Cada persona que participe y presente una solución correcta recibirá un certificado. El certificado se enviará por correo electrónico a la dirección utilizada para el envío de la solución. Espere varias semanas después de enviar su solución para recibir su certificado.

- La persona que envíe la primera solución correcta recibirá un bono virtual de regalo por un valor de **500.000 COP** (quinientos mil pesos colombianos). La persona ganadora puede escoger el establecimiento comercial que desee, siempre y cuando ofrezca bonos electrónicos y el comité editorial pueda adquirirlos.

Política Editorial

El Paskín Matemático es una producción del Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Está abierto a todos y todas. Si tienes interés en escribir un artículo con cualquier tipo de contenido matemático, reseñar a un personaje, comentar un problema o tienes comentarios sobre nuestra publicación, envía un mensaje a paskin@konradlorenz.edu.co

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

El Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz fue creado en 1998. Conoce más acerca de nuestro programa en nuestra página institucional

<https://www.konradlorenz.edu.co/programas/matematicas/>

Bogotá, Colombia. 2024

PASKÍN MATEMÁTICO

Volumen 6, No. 1, 2024

Contenido

- Juan Camilo Buitrago Cruz y Gonzalo Medina
Espacios de homomorfismos entre cuádruplas indescomponibles1
- Daniel Arias Mutis
Introducción a los origamis matemáticos y el paso de un origami plano a un origami en papel esférico11
- Samuel Alberto Luna A.
Curvas que rellenan el espacio y su uso en el análisis de imágenes digitales25
- Liliana González
Azar: algunas huellas de su constitución histórico-cultural34
- Leidy Catherinne Sánchez Ascanio
MateKuento.....45
- John A. Arredondo y Alejandro Cárdenas
Paskín Challenge48

La belleza es el primer test, no hay lugar permanente en este mundo para las matemáticas feas.

G. H. Hardy

