



EDICIÓN ESPECIAL
DÍA INTERNACIONAL DE LA MUJER
EN LA MATEMÁTICA
Mayo 12 2022

e-ISSN
2665-2471

PASIN MATEMÁTICO

 **KONRAD
LORENZ**
FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

Vol. 4

No. 2

$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

PASKÍN MATEMÁTICO

<https://editorial.konradlorenz.edu.co/paskin-matematico.html>

e-mail: paskin@konradlorenz.edu.co

Editor

John A. Arredondo

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co

Comité Editorial

Ruth Alejandra Torres

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
rutha.torresr@konradlorenz.edu.co

Julián Jiménez Cárdenas

Universidad de los Andes
jo.jimenezc1@uniandes.edu.co

Camilo Ramírez Maluendas

Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales
camramirezma@unal.edu.co

Andrés Mauricio Rivera

Pontificia Universidad Javeriana, Sede Cali
amrivera@javerianacali.edu.co

Esta publicación puede ser difundida y reproducida con fines académicos y científicos por todos aquellos que tengan a bien hacer un correcto uso de su contenido.

ISSN 2665-2471

Fundación Universitaria Konrad Lorenz: Tel: (57 1) 347 23 11, Carrera 9 Bis No. 62-43 Bogotá – Colombia, email: info@konradlorenz.edu.co. **Carácter académico:** Institución Universitaria. Personería Jurídica por Resolución 18537 del 4 de noviembre de 1981 del Ministerio de Educación Nacional. Institución de Educación Superior sujeta a inspección y vigilancia por el Ministerio de Educación Nacional (Art. 2.5.3.2.10.2, Decreto 1075 de 2015).

EDITORIAL

Desde el año 2018, celebramos en un día especial del año los diversos logros de las mujeres en el ámbito matemático; de mujeres que durante siglos permanecieron en la sombra y tuvieron obstáculos incluso para poder acceder a la educación formal. Hoy en día, en pleno siglo XXI, a pesar de haber visitado el espacio, tener supercomputadoras a nuestro servicio diario, estar inmersos en el desarrollo y explotación de la inteligencia artificial y ver que los automóviles se empiezan a conducir solos, estos logros de las mujeres en algunos escenarios continúan siendo subvalorados y muy poco reconocidos; esto, sin duda, habla muy mal de la sociedad en que vivimos y habla peor del medio científico en el que tantos desarrollos se han logrado.

A pesar de esto, debemos tomar acciones precisas para que las cosas cambien, para que hablar de inclusión deje de estar de moda para ser regla, y no por una mera presión social, sino porque de verdad se entiende que la mujer es un activo de muy alto valor científico, con una lógica diferente a la del hombre, que en todo caso sumará y dará diversidad a aquello que es la base de cualquier desarrollo científico, la discusión.

Desde el Paskín Matemático es un placer y un honor que en el día internacional de la mujer en la matemática, Ana, Angélica, Adriana, Liliam, Blanca, Catalina, Sofia y Liliana, nos compartan una muestra de su trabajo en las matemáticas, una muy pequeña muestra del amplio y constante aporte de miles de Lauras, Marías, Alejandras, Katherinees... todas ellas no solo nos dejan importantes teoremas, trabajan día a día para que en la sociedad y la ciencia en general se imponga el símbolo máximo de las matemáticas, la igualdad.

Comité editorial
Paskín Matemático
Mayo 12 de 2022

1. Introducción.

Jean-Victor Poncelet (1788 - 1867) fue un matemático e ingeniero francés. En 1807, entró a la École Polytechnique, donde recibió su educación matemática de personajes de la talla de André-Marie Ampère, Louis Poinsot, Gaspard Monge, Charles Julien Brianchon, entre otros. Una vez graduado, se incorporó al cuerpo de ingeniería y estudió en la École d'Application, donde obtuvo el grado de teniente. En junio de 1812 fue llamado a formar parte del ejército de Napoleón, durante la invasión francesa a Rusia. Fue en noviembre de este mismo año que Poncelet fue capturado en el campo de batalla en Krasnoi y trasladado después a una prisión en Saratov, donde permaneció cautivo hasta junio de 1814. Durante este tiempo en Saratov, para mitigar su aislamiento, Poncelet pasó sus días tratando de recordar las matemáticas que había aprendido en la École Polytechnique ([Cox03]). Posterior a su salida de prisión, publicó su trabajo titulado *Traité des propriétés projectives des figures*, en el cual Poncelet sentó las bases de la geometría proyectiva moderna.

En el presente artículo hablaremos un poco sobre uno de los teoremas más famosos de Poncelet, su relación con los billares, y abordaremos algunas preguntas que aún quedan sin resolver, a más de 200 años de que Poncelet obtuviera este teorema.

2. Porisma de Poncelet.

El *teorema de Poncelet* (también conocido como *porisma de Poncelet*) establece lo siguiente:

Teorema 2.1. Fije γ y Γ dos elipses en el plano $\mathbb{R}^2$, con γ en el interior de Γ . Elija un punto arbitrario p_1 en Γ , y seleccione ℓ_1 una de las dos tangentes a γ que pasan por p_1 . Llame p_2 al nuevo punto de intersección de ℓ_1 y Γ . Repita la construcción anterior para obtener p_3 , p_4 , y así sucesivamente. Suponga que existe un número natural n para el cual $p_{n+1} = p_1$. Entonces, para cualquier otro punto inicial q_1 en Γ , si $q_2, q_3, \dots$ son obtenidos usando la construcción descrita previamente, sucede que $q_{n+1} = q_1$ (ver Figura 1).

En resumidas cuentas, el teorema de Poncelet nos dice que si un polígono P está inscrito en una elipse Γ , y

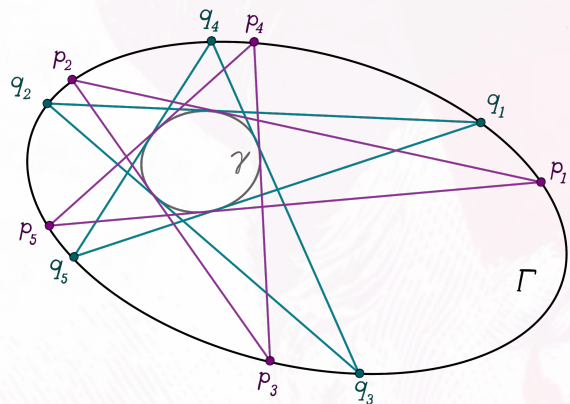


Figura 1: Las elipses γ, Γ admiten una familia de pentágonos de Poncelet.

circunscrito a otra elipse γ , entonces existe toda una familia continua de polígonos P_i inscritos a Γ y circunscritos en γ . A dichos polígonos los llamamos *polígonos de Poncelet*.

A continuación presentamos una prueba un poco más “alternativa” del teorema de Poncelet (para una prueba mas “clásica”, vea [Fuc07]). La idea es usar el marco propuesto por Harris y Griffiths en [Gri78]. Lo que haremos será complexificar y proyectivizar; es decir, aunque nuestros objetos de estudio originalmente forman parte de $\mathbb{R}^2$, permitiremos que las coordenadas tomen valores complejos, y añadiremos los puntos al infinito. Las elipses, líneas y puntos que consideremos son ahora parte de $\mathbb{CP}^2 := \mathbb{C}^2 \cup \mathcal{L}_\infty$. La ventaja de este enfoque es que tenemos a nuestra disposición las herramientas que ofrecen el álgebra y el análisis complejo.

Demostración. Notemos que cualquier cónica en $\mathbb{CP}^2$ es isomorfa a $\hat{\mathbb{C}}$ vía proyección estereográfica. Dadas dos elipses γ y $\Gamma \in \mathbb{CP}^2$, consideremos el conjunto de *banderas*, $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} := \{(p, \ell) : p \in \Gamma, p \in \ell \text{ tangente a } \gamma\}.$$

La proyección $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \Gamma$ dada por $\phi(p, \ell) = p$ es un mapeo dos-a-uno, con puntos de ramificación de la forma (q, ℓ) donde $q \in \gamma \cap \Gamma$. Por el teorema de Bézout, $|\gamma \cap \Gamma| = 4$, y por lo tanto ϕ tiene 4 puntos de ramificación. Usando la fórmula de Riemann-Hurwitz para calcular la característica de Euler obtenemos:

$$\chi(\mathcal{E}) = 2\chi(\Gamma) - 4 = 0.$$

*The Pennsylvania State University, Mathematics Department

Así que $\mathcal{E}$ es topológicamente un toro. Más aún, $\mathcal{E}$ es una curva elíptica.

Consideremos las siguientes dos involuciones en el espacio de banderas $\mathcal{E}$ (utilice la Figura 2 como referencia):

$$\sigma(p_1, \ell_1) = (p_2, \ell_1), \quad \tau(p_2, \ell_1) = (p_2, \ell_2).$$

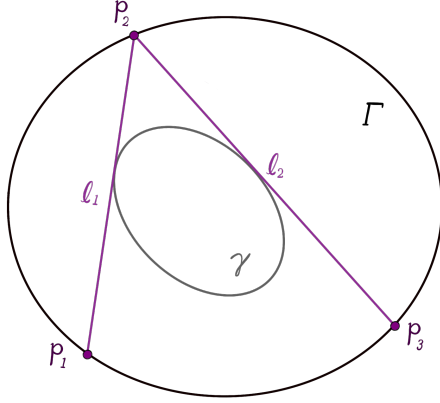


Figura 2: Los puntos p_i pertenecen a Γ y las líneas ℓ_i son tangentes a γ .

Llamaremos *mapeo de Poncelet* a la composición $T := \tau \circ \sigma$. Dado que τ y σ son involuciones, $\mathcal{E}$ admite un parámetro t tal que la composición de τ y σ es una translación en el toro; es decir $T(t) = t + c$, para alguna constante c . Así que, si existe un punto inicial p_1 y tangente ℓ_1 tal que $p_{n+1} = \pi(T^n(p_1, \ell_1)) = p_1$, entonces lo mismo debe ocurrir para cualquier otro punto inicial $q_1 \in \Gamma$. $\square$

3. Billares.

En el caso particular en el que las elipses γ y Γ son confocales, la dinámica descrita en el teorema de Poncelet es la misma que la del movimiento de una partícula que obedece la ley de la reflexión: es decir, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión (ver Figura 3). En dicho caso, γ es llamada *cáustica*: los rayos reflejados son siempre tangentes a la cáustica.

La teoría de los billares matemáticos, en el marco de la teoría de los sistemas dinámicos, es una de las teorías más populares (Google Scholar arroja hoy (abril del 2022) alrededor de 63.800 resultados relacionados con la palabra “billiards”). Y no es de extrañarse, ya que es una teoría que se presta a ser estudiada y desarrollada no solo desde el punto de vista matemático, sino también desde la física hasta la experimentación computacional. Para más referencias, el autor recomienda [Tab05] y [Fuc07].

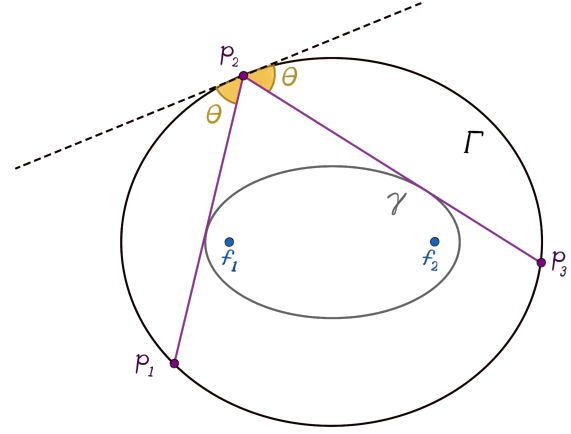


Figura 3: Los puntos f_1, f_2 son focos de γ y Γ .

4. Invariantes y órbitas.

Aunque el teorema de Poncelet fue probado hace más de 200 años, hay un montón de cosas que hemos descubierto sobre familias de polígonos de Poncelet en años recientes.

Los siguientes dos resultados fueron observados por Dan Reznik, Ronaldo García y Jair Koiller a partir de experimentos computacionales, y probados posteriormente en [Ako20] (en el caso n impar) y [CC21] (en el caso n par).

Teorema 4.1. Sea $P = (p_1, \dots, p_n)$ un polígono de Poncelet inscrito a Γ y circunscrito por γ , donde γ y Γ son dos elipses concéntricas. Sea P' el polígono formado por las tangentes a Γ que pasan por p_i (ver Figura 5).

- Si n es impar, entonces

$$\frac{\text{área}(P)}{\text{área}(P')} \quad (1)$$

permanece constante dentro de la familia de polígonos de Poncelet inscritos a Γ y circunscritos por γ .

- Si n es par, entonces

$$\text{área}(P) \cdot \text{área}(P') \quad (2)$$

permanece constante dentro de la familia de polígonos de Poncelet inscritos a Γ y circunscritos por γ .

No daremos los detalles de la demostración de este resultado, pero sí podemos dar un esbozo de la misma, para ilustrar la ventaja de usar el marco Griffiths-Harris descrito previamente.

Esbozo de demostración. El área de un polígono $P = (p_1, \dots, p_n)$ puede expresarse en términos de las coordenadas de los vértices $p_i = (x_i, y_i)$ como:

$$A(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i \quad (3)$$

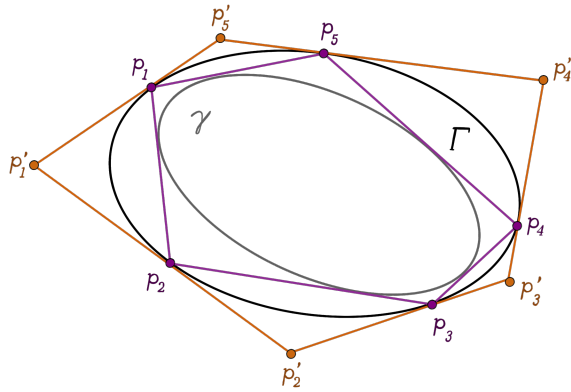


Figura 4: Las elipses γ y Γ son concéntricas. El pentágono P con vértices p_i es de Poncelet, y P' es un polígono cuyos lados son tangentes a Γ , y pasan por p_i .

Note que cada bandera $(p, \ell) \in \mathcal{E}$ da lugar a un polígono de Poncelet. El grupo generado por σ y τ es precisamente el grupo diédrico D_{2n} . Considere $Z_n < D_{2n}$ el grupo cíclico de orden n . Dado que la fórmula (3) es un polinomio, las expresiones (1), (2) y (3) son funciones meromorfas, Z_n -invariantes, definidas en toro $\mathcal{E}$, y por lo tanto, son funciones elípticas.

Para concluir con la prueba, basta demostrar que las funciones elípticas (1) (si n es impar) y (2) (si n es par) no tienen polos o ceros, lo cual significaría, gracias al teorema de Liouville, que dichas funciones son constantes.

Los siguientes párrafos contienen las ideas esenciales, pero sin muchos detalles técnicos necesarios. Para el lector ávido de dichos pormenores, el autor recomienda consultar [CC21].

Para (2): la función elíptica correspondiente no tiene polos si P o P' tienen puntos al infinito (de otra forma, el área de ambos es finita). Aplicando una transformación equiafin, podemos asumir que γ es un círculo, y que tanto γ como Γ están centradas en el origen. Supongamos que P' tiene un vértice en el infinito. Dado que n es par, y que el mapeo de Poncelet conmuta con respecto a la reflexión en el origen, tenemos que para todo i :

$$p_i = -p_{i+n/2}. \quad (4)$$

Si P' tiene un vértice al infinito (digamos p'_j), entonces las líneas $T_{p_j}\Gamma$ y $T_{p_{j+1}}\Gamma$ son paralelas. Eso ocurre si y solo si

$$p_j = -p_{j+1}. \quad (5)$$

De las ecuaciones (4) y (5) podemos concluir que $n = 4$, con $p_1 = p_4$ y $p_2 = p_3$. El área tiene un polo simple en P' pero un cero simple en P , por lo que (2) no tiene polos en este caso.

El otro caso a estudiar es cuando P tiene un vértice en el infinito (pero todos los vértices de P' son finitos). La conclusión es que tanto P' como P son polígonos degenerados: el

polo de la función de área en P es simple, mientras que P' es un cero simple, de forma que podemos concluir de nuevo que (2) no tiene polos.

El caso (1) puede ser probado de manera similar, estudiando los casos en los que $\text{area}(P) = 0$, o bien cuando $\text{area}(P')$ tiende a infinito. $\square$

Por otro lado, podemos explorar el lugar geométrico de diferentes centros de masa para polígonos de Poncelet. Esto fue hecho por R. Schwartz y S. Tabachnikov en [Sch16].

Definición 4.1. Dado un polígono $P = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i = (x_i, y_i)$, definimos

- El centro de masa 0-dimensional $CM_0(P)$ como el promedio de los vértices, es decir:

$$CM_0(P) = \frac{1}{n} (p_1 + \dots + p_n).$$

- El centro de masa 1-dimensional $CM_1(P)$ como el centro de masa de las aristas del polígono P , donde la masa está distribuida uniformemente a lo largo de las aristas. Si ℓ_i es la longitud del i -ésimo lado $p_i p_{i+1}$, y $L(P)$ es el perímetro de P , entonces:

$$CM_1(P) = \frac{1}{2L(P)} \sum_{i=1}^n \ell_i (x_i + x_{i+1}, y_i + y_{i+1}).$$

- El centro de masa 2-dimensional $CM_2(P)$ como el centro de masa de P , considerando a P como una lámina homogénea. En términos de las coordenadas de P , CM_2 se expresa como:

$$CM_2(P) = \frac{1}{6A(P)} \sum_{i=1}^n d_i (x_i + x_{i+1}, y_i + y_{i+1}),$$

donde $d_i = (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$, y $A(P)$ es el área de P .

- El Circuncentro de Masa $CCM(P)$. Si $\mathcal{T} = \{T_i\}$ es una triangulación de P , y C_i es el circuncentro de T_i , entonces

$$CCM(P) = \sum_i \frac{\text{área}(T_i)}{\text{área}(P)} C_i.$$

El Circuncentro de masa no depende de la triangulación, ya que puede ser expresada en términos de las coordenadas mediante la siguiente fórmula:

$$CCM(P) = \frac{1}{4A(P)} \left(\sum_{i=1}^n y_i (x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2 - x_{i+1}^2 - y_{i+1}^2), \sum_{i=1}^n -x_i (x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2 - x_{i+1}^2 - y_{i+1}^2) \right).$$

Para más información relacionada con el Circuncentro de masa, consulte [Tab14].

Usando el marco de Griffiths-Harris, en [Sch16] se prueba el siguiente resultado:

Teorema 4.2. Sea $\{P_t\}_t$ una familia de polígonos de Poncelet inscritos en Γ y circunscritos a γ . Los lugares geométricos $CM_0(P_t)$ y $CM_2(P_t)$ son elipses homotéticas a Γ . Sin embargo, $CM_1(P_t)$ no es una elipse.

Y sobre el Circuncentro de Masa, en [CC21] se demuestra:

Teorema 4.3. Sea $\{P_t\}_t$ una familia de polígonos de Poncelet inscritos en Γ y circunscritos a γ . El lugar geométrico $CMM(P_t)$ es una elipse.

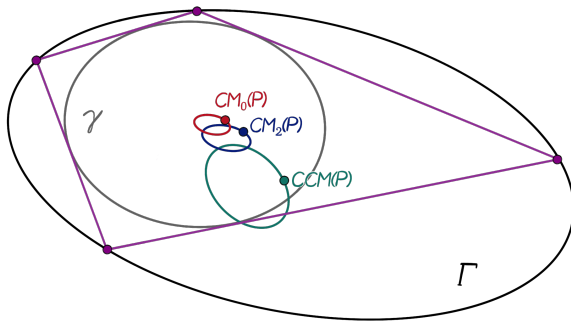


Figura 5: Si P_t es una familia de polígonos de Poncelet, los lugares geométricos descritos por $CM_0(P_t)$, $CM_2(P_t)$ y $CMM(P_t)$ son elipses. El siguiente enlace contiene una animación donde se puede observar el movimiento de estos centros conforme variamos P_t : <https://www.geogebra.org/m/g8pvrxeq>.

Naturalmente la lista no termina aquí. Dan Reznik y sus colaboradores continúan descubriendo invariantes a través de experimentos computacionales. En [Rez21] podemos encontrar una lista de 50 nuevos invariantes en billares periódicos, muchos de los cuales están a la espera de ser demostrados. Tal vez la mejor forma de estar al tanto de los nuevos avances es a través del canal de YouTube del mismo Dan: <https://www.youtube.com/user/dreznik>.

Agradecimientos.

A mi asesor, Sergei Tabachnikov, quien sugirió este tema como parte de mi tesis de doctorado, y quien, junto con Richard Schwartz han contribuido en gran medida al tema. A Dan Reznik y sus colaboradores por compartirnos los resultados que han obtenido.

Referencias.

- [O'C08] J.J and Robertson O'Connor E.F., *Jean Victor Poncelet - Biography* (2008).
- [Gri78] Phillip and Harris Griffiths Joseph, *On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism.*, Enseign. Math, 1978.
- [Cox03] Harold Scott Macdonald Coxeter, *Projective Geometry*, Springer Science & Business Media, 2003.
- [Tab05] Serge Tabachnikov, *Geometry and billiards*, Vol. 30, American Mathematical Society, 2005.
- [Fuc07] Dmitry and Tabachnikov Fuchs Serge, *Mathematical Omnibus*, American Mathematical Society, 2007.
- [Tab14] Serge and Tsukerman Tabachnikov Emmanuel, *Circumcenter of Mass and generalized Euler line* **51(4)** (2014), 815–836.
- [Sch16] Richard and Tabachnikov Schwartz Serge, *Centers of mass of Poncelet polygons, 200 years after* **38** (2016), 29–34.
- [Ako20] Arseniy and Schwartz Akopyan Richard and Tabachnikov, *Billiards in ellipses revisited* (2020), 1–15.
- [Rez21] Dan and Garcia Reznik Ronaldo and Koiller, *Fifty new invariants of N-periodics in the elliptic billiard* **7(3)** (2021), 341–355.
- [CC21] Ana C. Chavez-Caliz, *More about areas and centers of Poncelet polygons* **7(1)** (2021), 91–106.

Acerca de la autora: Ana Chávez Cáliz estudió la licenciatura (pregrado) en Ciencias Físico-Matemáticas en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH). Posteriormente, obtuvo el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas por parte del Centro de Ciencias Matemáticas, un programa de posgrado conjunto entre la UMSNH, el Instituto de Física y Matemáticas (IFM), y la Universidad Autónoma de México (UNAM). Ana es ahora Doctor en Matemáticas por parte de la Universidad Estatal de Pensilvania, donde trabajó bajo la supervisión del Dr. Sergei Tabachnikov. Ahora está por iniciar una estancia postdoctoral en el centro de investigación de Geometría y Dinámica, en el Instituto Matemático de la Universidad de Heidelberg, Alemania. Cuando no está trabajando con polígonos y geometría proyectiva, a Ana le gusta andar en bicicleta y dibujar en acuarela. De hecho, el año pasado Ana colaboró con Sergio Zamora y Anton Petrunin en el arte de la portada de su nuevo libro “*What is differential geometry? Curves and surfaces*”.

GEOMETRÍA ALGEBRAICA Y TRIANGULACIÓN DE LÍNEAS EN VISIÓN ARTIFICIAL

Angélica Marcela Torres Bustos^{*}
amt@kth.se

1. Introducción.

Visión artificial o visión por computador es el área de Inteligencia Artificial que estudia cómo un computador percibe y procesa imágenes. Esta área se ha desarrollado ampliamente en las últimas décadas gracias a la evolución tanto de las cámaras, como de la capacidad computacional para procesar y almacenar imágenes. En este artículo vamos a explorar desde el punto de vista algebraico uno de los principales problemas en visión por computador: triangulación de líneas en reconstrucción tridimensional de imágenes.

El problema de reconstrucción tridimensional de imágenes consiste en crear un modelo tridimensional de un objeto a partir de diferentes imágenes. El modelo tridimensional está compuesto por la posición relativa de las cámaras, y la posición del objeto fotografiado en el espacio. Un ejemplo de un modelo tridimensional del coliseo romano está ilustrado en la Figura 1.

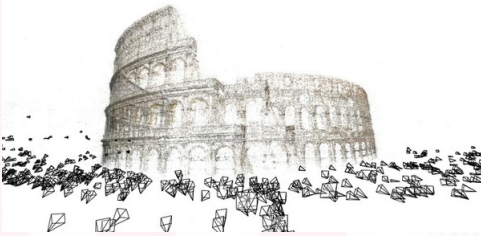


Figura 1: Esta Figura fue desarrollada en el proyecto Reconstructing Rome [Aga10] en el que Agarwal et al. utilizaron imágenes de licencia libre, tomadas por turistas y visitantes en Roma, para reconstruir la ciudad.

En general el proceso de reconstrucción tiene 4 etapas:

1. *Recolección de imágenes.* El proceso de reconstrucción tiene una fuerte dependencia en el modelo de cámara utilizado para recolectar las imágenes. En esta etapa es importante establecer el modelo de cámara para todo el proceso de reconstrucción.
2. *Identificación de características comunes en pares de imágenes.* Mediante algoritmos de análisis de imágenes se identifican puntos y líneas comunes a dos o más

imágenes. El output de estos algoritmos son correspondencias de puntos o líneas que representan la imagen del mismo punto o línea tridimensional en todas las imágenes.

3. *Estimación de la posición de las cámaras.* Después de identificar correspondencias de puntos o líneas, solo esta información geométrica se usa para estimar la posición relativa de las cámaras. Uno de los métodos más utilizados para esta estimación es RANSAC (Random SAmple Consensus).
4. *Triangulación de puntos o líneas.* Dadas una cámaras fijas, el proceso de triangulación consiste en encontrar las coordenadas tridimensionales del punto o línea cuya fotografía es una correspondencia específica detectada en las imágenes.

En este proceso la información obtenida en el paso 2 es puramente geométrica, es decir, los datos necesarios para estimar la posición de las cámaras están dados por correspondencias de líneas o de puntos, que pueden ser estudiados con herramientas de Geometría Algebraica. En particular, el proceso de triangulación puede ser modelado mediante variedades algebraicas y funciones racionales. Esto es precisamente lo que veremos en el resto del artículo.

Para nuestro trabajo asumiremos que las imágenes han sido tomadas con cámaras estenopeicas, cuya principal característica es que fotografían toda la escena en el mismo instante. Esto implica que la cámara puede ser modelada como una proyección desde un espacio de dimensión 3 en un espacio de dimensión 2. Formalmente, una cámara estenopeica está definida por una matriz C de tamaño 3×4 y rango completo, y se considera como la función $C : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^2 : P \longmapsto CP$, del espacio proyectivo al plano proyectivo. Cabe aclarar que otros modelos de cámaras incluyen las cámaras de obturador rodante (Rolling Shutter cameras) que fotografían una línea a la vez y hacen un barrido de la escena para obtener una fotografía completa, y cámaras proyectivas calibradas que están definidas como una matriz de rotación y una traslación. Estos y más modelos de cámaras pueden ser estudiados en [Stu11].

Dadas m cámaras distintas $\mathcal{C} := (C_1, \dots, C_m)$, la función $\Phi_{\mathcal{C}} : \mathbb{P}^3 \longrightarrow (\mathbb{P}^2)^m : P \longmapsto (C_1P, \dots, C_mP)$ modela el proceso de fotografía de un punto con m cámaras, y cada elemento del conjunto $\text{Im}(\Phi_{\mathcal{C}})$ es precisamente una correspondencia de puntos para el conjunto de cámaras $\mathcal{C}$.

^{*}Department of Mathematics, School of Engineering Sciences, KTH Royal Institute of Technology

El conjunto $\text{Im}(\Phi_{\mathcal{C}})$ ha sido estudiado a profundidad. En [Har04], Hartley hace una introducción a la geometría multivisión y establece las bases para el estudio de las correspondencias de puntos con dos o tres cámaras. Uno de los principales objetivos es encontrar relaciones polinómicas entre las entradas de las correspondencias de puntos en $\text{Im}(\Phi_{\mathcal{C}})$, que en términos algebraico-geométricos se traduce en encontrar la clausura de Zariski de $\text{Im}(\Phi_{\mathcal{C}})$, denotada $\mathcal{V}_{\mathcal{C}}$ y llamada la *variedad multivisión*. Las ecuaciones que definen la variedad multivisión para m cámaras han sido estudiadas en [Fau95, THP15, AHaKA96] y han sido de gran utilidad en la implementación de algoritmos de reconstrucción.

Nuestro objetivo en este artículo es revisar cómo se pueden tratar las correspondencias de líneas usando herramientas de geometría algebraica. Para ello primero presentaremos los conceptos necesarios para formalizar el problema de triangulación de líneas (personas con experiencia en Geometría Algebraica pueden omitir los preliminares). En la sección 3 formalizamos la noción de cámara estenopeica y de la variedad multivisión para líneas. Finalmente establecemos un conjunto de polinomios definiendo la variedad multivisión para líneas y presentamos algunas de sus propiedades.

2. Preliminares.

Notación: Durante el artículo denotaremos por $K^{m \times n}$ al conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en K , y para una matriz $A \in K^{m \times n}$ su transpuesta es denotada A^T . Trabajaremos en general con vectores columna. Dado un subespacio W de V , denotamos por $W^\vee$ las ecuaciones lineales que lo definen, estas ecuaciones son un subespacio del dual de V . El anillo de polinomios en $n+1$ variables sobre un cuerpo K se denota por $K[x_0, \dots, x_n]$.

2.1. Espacio proyectivo.

Dado un espacio vectorial K^{n+1} , donde $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$, definimos sobre sus elementos no nulos la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \iff x = \lambda y \quad \text{para algún } 0 \neq \lambda \in K.$$

El cociente $(K^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ se denomina espacio proyectivo de dimensión n y se denota $\mathbb{P}^n$. La clase de equivalencia de $(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1}$ se denota $[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n$. La función

$$\pi : K^{n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$(x_0, \dots, x_n) \longmapsto [x_0 : \dots : x_n], \quad (1)$$

es la función que a cada elemento de K^{n+1} lo envía a su clase de equivalencia, y los elementos de $\mathbb{P}^n$ se denominan *coordenadas homogéneas*.

Los casos relevantes en visión artificial son $n = 2$ y $n = 3$ y nos referiremos a ellos como plano y espacio proyectivo respectivamente.

Para un espacio vectorial V de dimensión $n+1$, definimos su proyectivización de forma análoga a la definición de $\mathbb{P}^n$.

La proyectivización de V , denotada $\mathbb{P}(V)$ es el cociente de $(V \setminus \{0\})/\sim$, donde $\sim$ es la misma relación de equivalencia mencionada anteriormente.

Ejemplo 2.1. Sea $V = \mathbb{C}^{m \times n}$ el espacio vectorial de matrices de tamaño $m \times n$ con entradas complejas. Este espacio se puede identificar con $\mathbb{C}^{mn}$, lo que induce una identificación de $\mathbb{P}(V)$ con $\mathbb{P}^{mn-1}$. Cada elemento $[A] \in \mathbb{P}(V)$ contiene todas las matrices $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ tales que $B = \lambda A$ para algún $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$.

Aunque todo polinomio $f \in K[x_0, \dots, x_n]$ define una función sobre K^{n+1} , esto no es cierto sobre $\mathbb{P}^n$ (en general la evaluación de un polinomio en un elemento $P \in \mathbb{P}^n$ depende del representante de la clase de equivalencia). Sin embargo para polinomios homogéneos se satisface que si

$$[p_0 : \dots : p_n] = [q_0 : \dots : q_n]$$

entonces

$$f(p_0, \dots, p_n) = f(\lambda q_0, \dots, \lambda q_n) = \lambda^d f(q_0, \dots, q_n),$$

donde d es el grado de f , debido a que

$$(p_0, \dots, p_n) = \lambda (q_0, \dots, q_n)$$

para algún $\lambda \neq 0$. Esta propiedad nos permite definir variedades algebraicas proyectivas.

Definición 2.1. Sea $f \in K[x_0, \dots, x_n]$ un polinomio homogéneo en $n+1$ variables. Decimos que $[p_0 : \dots : p_n] \in \mathbb{P}^n$ es un cero de f si $f(p_0, \dots, p_n) = 0$.

La definición anterior no depende del representante de la clase pues

$$f(q_0, \dots, q_n) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \lambda^d f(p_0, \dots, p_n) = 0,$$

y por lo tanto $[p_0 : \dots : p_n]$ es un cero de f si, y solo si, $[q_0 : \dots : q_n]$ lo es.

Definición 2.2. Un conjunto $X \subseteq \mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica proyectiva si existe un conjunto finito $S \subseteq K[x_0, \dots, x_n]$ de polinomios homogéneos tales que X es el conjunto de ceros de los elementos de S , es decir, X es una variedad algebraica proyectiva (o simplemente variedad algebraica) si

$$X = \{[p_0 : \dots : p_n] \in \mathbb{P}^n \mid f(p_0, \dots, p_n) = 0 \text{ para todo } f \in S\}.$$

Observación: La definición anterior sigue la convención dada en [JH95, AG19]. En referencias como [Har77] los conjuntos dados en la definición anterior se denominan conjuntos algebraicos, y las variedades algebraicas se refieren a conjuntos algebraicos irreducibles. Nosotros nos referiremos a estos últimos conjuntos como variedades irreducibles.

Ejemplo 2.2. Sea $K[x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{m,n}]$ el anillo de polinomios en mn variables. Si definimos una matriz genérica con entradas

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,n} \end{bmatrix}$$

los menores de tamaño $k \times k$ de X son polinomios homogéneos en $K[x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{m,n}]$. Estos polinomios definen la variedad de matrices de rango menor o igual a $k - 1$.

Ejemplo 2.3. De forma análoga al ejemplo anterior, sea $K[x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{n,n}]$ el anillo de polinomios en n^2 variables y sea X la matriz cuadrada

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Las matrices simétricas son una variedad definida por las ecuaciones $\{x_{i,j} - x_{j,i} = 0 \mid i = 1, \dots, n \text{ y } j = 1, \dots, n\}$, y las matrices antisimétricas están definidas por las ecuaciones $\{x_{i,j} + x_{j,i} = 0 \mid i = 1, \dots, n \text{ y } j = 1, \dots, n\}$.

Es posible definir una topología sobre $\mathbb{P}^n$ donde los conjuntos cerrados son las variedades algebraicas. Esta topología se llama *Topología de Zariski* y es una herramienta fundamental en Geometría Algebraica. Con esta topología definimos la clausura de Zariski de un subconjunto $Y \subseteq \mathbb{P}^n$.

Definición 2.3. Sea $Y \subseteq \mathbb{P}^n$. La clausura de Zariski de Y , denotada $\bar{Y}$, se define como la variedad algebraica más pequeña que contiene a Y .

Para la definición formal de la topología de Zariski y un estudio profundo de sus propiedades remitimos al lector a [JH95, AG19].

2.2. Grassmanianos.

Sobre V definimos el Grassmaniano $\text{Gr}(k, n)$ como el conjunto de subespacios lineales de V de dimensión k .

Ejemplo 2.4. Para $V = \mathbb{R}^n$, los Grassmanianos $\text{Gr}(1, n)$ y $\text{Gr}(2, n)$ son los conjuntos de líneas y planos que pasan por el origen respectivamente.

Esta definición se puede extender a los espacios proyectivos, que son la herramienta principal en este artículo.

Definición 2.4. El Grassmaniano $\mathbb{G}(k-1, n-1)$ de $\mathbb{P}^{n-1}$ está formado por los conjuntos $L \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ tales que $\pi^{-1}(L) \in \text{Gr}(k, n)$, donde π es la proyección definida en la Ecuación (1).

Ejemplo 2.5. Los elementos de $\mathbb{G}(1, n)$ se denominan líneas proyectivas. Dados $u, v \in \mathbb{P}^n$, la línea proyectiva que pasa por u y v se define como

$$L_{u,v} = \{p \in \mathbb{P}^n \mid p = tu + sv \text{ para } s, t \in K\}.$$

Es un ejercicio clásico en geometría proyectiva demostrar que $\pi^{-1}(L_{u,v})$ es un elemento de $\text{Gr}(2, n+1)$. En la Figura 2 presentamos la intuición geométrica detrás de los elementos de $\mathbb{G}(1, 2)$.

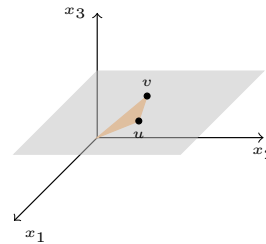


Figura 2: $\mathbb{P}^2$ se define a partir de elementos de K^3 . En esta figura los puntos indicados en gris son los representantes elementos de $\mathbb{P}^2$ de la forma $[x_1 : x_2 : 1]$. La línea que une los puntos u y v indicados en la figura es una línea proyectiva pues $\pi^{-1}(L_{u,v})$ es un subespacio de dimensión 2 de K^3 . Este subespacio está indicado en la figura por el triángulo naranja.

Nos enfocamos ahora solo en los conjuntos $\mathbb{G}(1, 2)$ y $\mathbb{G}(1, 3)$. Estos conjuntos corresponden a las líneas proyectivas en 2 y 3 dimensiones respectivamente y en visión por computador modelan las líneas en las imágenes y en el espacio tridimensional respectivamente.

Proposición 2.1. El Grassmaniano $\mathbb{G}(1, 3)$ es una variedad algebraica.

Para probar esta Proposición vamos a identificar $\mathbb{G}(1, 3)$ con una variedad algebraica en $\mathbb{P}^5$ usando el *embebimiento de Plücker*.

Definición 2.5. La función

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{G}(1, 3) &\longrightarrow \mathbb{P}^5 \\ L_{u,v} &\longmapsto u \wedge v \end{aligned} \quad (2)$$

donde $u, v \in \mathbb{P}^3$ y $u \wedge v = uv^T - vu^T \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^{4 \times 4})$, se denomina el *embebimiento de Plücker*.

El embebimiento de Plücker está bien definido: Si $L_{u,v} = L_{x,y}$ entonces $\pi^{-1}(L_{u,v}) = \pi^{-1}(L_{x,y})$, es decir, los espacios vectoriales generados por $\hat{u}, \hat{v}$ y $\hat{x}, \hat{y}$, donde $\hat{u} \in \pi^{-1}(u), \hat{v} \in \pi^{-1}(v), \hat{x} \in \pi^{-1}(x)$ y $\hat{y} \in \pi^{-1}(y)$, son iguales. Podemos escribir entonces $\hat{x} = a\hat{u} + b\hat{v}$ y $\hat{y} = c\hat{u} + d\hat{v}$ para escalares $a, b, c, d \in K$ y

$$\begin{aligned} \hat{x} \wedge \hat{y} &= (a\hat{u} + b\hat{v}) \wedge (c\hat{u} + d\hat{v}) \\ &= (ad - bc)\hat{u} \wedge \hat{v}. \end{aligned}$$

Proyectivamente tenemos entonces que $u \wedge v = x \wedge y$.

Lema 2.1. El embebimiento de Plücker (2) es inyectivo.

Demostración. Sean $L_{u,v}$ y $L_{x,y}$ dos elementos de $\mathbb{G}(1, 3)$ tales que

$$u \wedge v = \rho(L_{u,v}) = \rho(L_{x,y}) = x \wedge y.$$

Si probamos que el espacio vectorial generado por $\{\hat{u}, \hat{v}\}$ es igual al generado por $\{\hat{x}, \hat{y}\}$, tenemos que $L_{u,v} = L_{x,y}$ y

por lo tanto ρ es inyectiva. Si $u = [u_0 : u_1 : u_2 : u_3]^T$ y $v = [v_0 : v_1 : v_2 : v_3]^T$, podemos tomar $\hat{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)^T$ y $\hat{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3)^T$, y obtenemos que $\hat{u} \wedge \hat{v}$ es igual a la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & u_0v_1 - u_1v_0 & u_0v_2 - u_2v_0 & u_0v_3 - u_3v_0 \\ -u_0v_1 + u_1v_0 & 0 & u_1v_2 - u_2v_1 & u_1v_3 - u_3v_1 \\ -u_0v_2 + u_2v_0 & -u_1v_2 + u_2v_1 & 0 & u_2v_3 - u_3v_2 \\ -u_0v_3 + u_3v_0 & -u_1v_3 + u_3v_1 & -u_2v_3 + u_3v_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz es antisimétrica y de rango 2. El espacio fila de $\hat{u} \wedge \hat{v}$, denotado $\text{Row}(\hat{u} \wedge \hat{v})$, es generado por dos filas de la matriz, por ejemplo las dos primeras, y es igual al espacio vectorial generado por $\{\hat{u}, \hat{v}\}$. Como asumimos que $u \wedge v = x \wedge y$, tenemos que $\pi^{-1}(L_{u,v}) = \pi^{-1}(L_{x,y})$ y por lo tanto $L_{u,v} = L_{x,y}$ que era lo que queríamos demostrar. $\square$

Demostración de la Proposición 2.1. Como ρ es una función inyectiva, $\mathbb{G}(1,3)$ está en biyección con $\rho(\mathbb{G}(1,3))$ que es el conjunto de matrices antisimétricas de rango menor o igual a 2. Esta biyección preserva además la estructura algebraica de estos dos conjuntos, es decir, si un elemento $y \in \rho(\mathbb{G}(1,3))$ es solución de ciertas ecuaciones polinomiales, entonces $\rho^{-1}(y)$ también es solución de ecuaciones polinomiales. Esto implica que si $\rho(\mathbb{G}(1,3))$ es una variedad algebraica, entonces $\mathbb{G}(1,3)$ también lo es, pero esto es precisamente lo que vimos en los ejemplos 2.2 y 2.3. Concluimos entonces que $\mathbb{G}(1,3)$ es una variedad algebraica. $\square$

Observación: El Grassmaniano $\mathbb{G}(1,3)$ es una variedad irreducible y tiene dimensión 4. Para una demostración de estas propiedades, remitimos al lector a [JH95].

Proposición 2.2. El Grassmaniano $\mathbb{G}(1,2)$ es isomorfo al espacio proyectivo $\mathbb{P}^2$.

Demostración. Cada elemento $L_{u,v} \in \mathbb{G}(1,2)$ satisface por definición que $\pi^{-1}(L_{u,v})$ es un subespacio de K^3 de dimensión 2. En general, los subespacios bidimensionales de un espacio vectorial de dimensión 3 están completamente caracterizados por su complemento ortogonal con respecto al producto interno euclidiano (hermitiano) para $K = \mathbb{R}$ ($K = \mathbb{C}$), que corresponde precisamente a un subespacio de dimensión 1 de K^{n+1} , es decir, a un elemento de $\mathbb{P}^n$. $\square$

Observación: Aunque aquí nos enfocamos solo en los Grassmanianos relevantes para visión artificial, los resultados presentados pueden generalizarse. Por ejemplo, la definición del embebimiento de Plücker se puede extender para $\mathbb{G}(k,n)$. Esto permite demostrar que los Grassmanianos siempre son variedades algebraicas.

3. Reconstrucción de líneas.

Nos enfocamos ahora en la interacción entre los conceptos algebraico-geométricos presentados anteriormente y el proceso de triangulación de líneas. En particular, buscamos entender cuáles son las relaciones polinomiales que definen el conjunto de correspondencias de líneas con m cámaras estenopeicas. De ahora en adelante asumimos $K = \mathbb{C}$.

3.1. Cámaras estenopeicas.

Definición 3.1. Una cámara estenopeica es una función $\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2 : x \mapsto Cx$ definida por una matriz $C \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ de rango completo.

Una cámara C está definida en todos los puntos de $\mathbb{P}^3$ excepto en el núcleo de C . Notemos que $c := \ker(C)$ es un subespacio de dimensión 1 de $\mathbb{C}^4$, es decir, un elemento de $\mathbb{P}^3$, denominado el centro de la cámara. Estas definiciones están ilustradas en la Figura 3

Definición 3.2. Una cámara estenopeica C induce la función

$$\begin{aligned} \phi_C : \mathbb{G}(1,3) &\longrightarrow \mathbb{G}(1,2) \\ L_{u,v} &\longmapsto L_{Cu,Cv}. \end{aligned} \quad (3)$$

Esta función modela el proceso de fotografía de líneas en $\mathbb{P}^3$ con la cámara C .

Usando la Proposición 2.2 la función ϕ_C puede escribirse como

$$\begin{aligned} \phi_C : \mathbb{G}(1,3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ L &\longmapsto L^\vee := CL. \end{aligned} \quad (4)$$

La función ϕ_C está bien definida. Supongamos que $L_{u,v} = L_{x,y}$ para $\{u, v\} \neq \{x, y\}$. Como $\pi^{-1}(L_{u,v}) = \pi^{-1}(L_{x,y})$ existen escalares $a, b, d, e \in \mathbb{C}$ tales que

$$x = au + bv \quad y = du + ev,$$

entonces

$$Cx = aCu + bCv \quad y = dCu + eCv,$$

y por lo tanto $L_{Cx,Cy} = L_{Cu,Cv}$ en $\mathbb{G}(1,2)$.

Como la definición de ϕ_C no depende de los elementos u, v , de ahora en adelante omitiremos los subíndices y denotaremos los elementos de $\mathbb{G}(1,3)$ simplemente por L . En la Figura 3 ilustramos la intuición detrás de este modelo de cámaras estenopeicas.

De ahora en adelante nos referiremos a la cámaras estenopeicas simplemente como cámaras y denotaremos tanto la función como la matriz que la define como C .

Definición 3.3. Dadas m cámaras $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_m)$ definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{C}} : \mathbb{G}(1,3) &\longrightarrow (\mathbb{P}^2)^m \\ L &\longmapsto (C_1L, \dots, C_mL), \end{aligned} \quad (5)$$

conocida en la literatura como *joint camera map*.

La función definida anteriormente codifica el proceso de fotografiar una línea con m cámaras. El subconjunto $\text{Im}(\Phi_{\mathcal{C}})$ de $(\mathbb{P}^2)^m$ contiene todas las posibles correspondencias de líneas obtenidas con las cámaras $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_m)$.

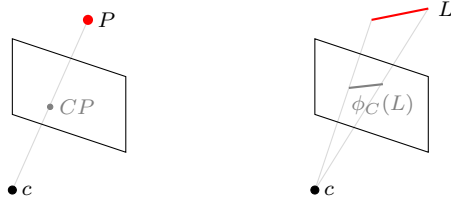


Figura 3: La figura izquierda ilustra la función $C : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$, donde c denota el centro de la cámara. La figura derecha ilustra la función inducida sobre $\mathbb{G}(1, 3)$ que modela el proceso de fotografía de una línea. El punto P y la línea L , representados en rojo, son elementos en el espacio proyectivo. Sus imágenes por C y ϕ_C respectivamente, están representados en gris.

3.2. Variedad multivisión.

En el proceso de triangulación el punto de partida es la información obtenida en las imágenes, es decir, dadas m imágenes tomadas con las cámaras $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_m)$, la información inicial para la triangulación es una tupla $\ell := (\ell_1, \dots, \ell_m) \in (\mathbb{P}^2)^m$ y el objetivo es encontrar una línea $L \in \mathbb{G}(1, 3)$ tal que $\Phi_{\mathcal{C}}(L) = \ell$. Para entender el conjunto $\text{Im}(\Phi_{\mathcal{C}})$ encontraremos el conjunto algebraico más pequeño que lo contiene, que en términos algebraicos se traduce en encontrar la clausura de Zariski de $\text{Im}(\Phi_{\mathcal{C}})$ denotada $\mathcal{V}_{\mathcal{C}}$. Este último conjunto es una variedad algebraica y se denomina la *variedad multivisión para líneas*.

Para $m = 3$ la variedad multivisión para líneas fue estudiada por Joseph Kileel como parte de su tesis doctoral [Kil17], donde demostró el siguiente resultado.

Teorema 3.1. Sea $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3)$ un arreglo de tres cámaras cuyos centros son linealmente independientes en $\mathbb{P}^3$. La variedad multivisión para líneas $\mathcal{V}_{\mathcal{C}} := \text{Im}(\Phi_{\mathcal{C}})$ está definida por los menores maximales de la matriz

$$M(\ell) := [C_1^T \ell_1 \quad C_2^T \ell_2 \quad C_3^T \ell_3]$$

donde ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 denotan las coordenadas de una tripla genérica $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in (\mathbb{P}^2)^3$.

El teorema anterior nos dice que una tupla $\ell^* = (\ell_1^*, \ell_2^*, \ell_3^*) \in (\mathbb{P}^2)^3$ está en la variedad multivisión si esa tupla es un cero de los menores maximales de la matriz $M(\ell^*)$. Equivalentemente, $(\ell_1^*, \ell_2^*, \ell_3^*)$ está en la variedad multivisión si la matriz

$$[C_1^T \ell_1^* \quad C_2^T \ell_2^* \quad C_3^T \ell_3^*]$$

tiene rango menor o igual a 2.

Notemos que para $\ell_i^* \in \mathbb{P}^2$ fijo, $C_i^T \ell_i^*$ es un elemento de $\mathbb{P}^3$. En el siguiente lemma resaltamos la importancia de este elemento.

Lema 3.1. Sea $\phi_C : \mathbb{G}(1, 3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ una cámara y sea $\ell \in \mathbb{P}^2$ fijo. El conjunto $\phi_C^{-1}(\ell)$ corresponde a todas las líneas

contenidas en el plano proyectivo definido por

$$H := \{P \in \mathbb{P}^3 : P^T C^T \ell = 0\}.$$

Demostración. Dividimos esta prueba en dos partes: Primero probamos que toda línea contenida en H , pertenece a $\phi_C^{-1}(\ell)$, y luego mostramos que toda línea en $\phi_C^{-1}(\ell)$ está contenida en H .

Sea $L \subset H$ una línea generada por los puntos $u, v \in \mathbb{P}^3$. Por definición $\phi_C(L_{u,v}) = L_{Cu,Cv}$, pero como $L \subset H$ los puntos u y v satisfacen

$$u^T C^T \ell = 0 = (Cu)^T \ell$$

y

$$v^T C^T \ell = 0 = (Cv)^T \ell.$$

Estas últimas identidades implican que $Cu \in \ell$ y $Cv \in \ell$ (recordemos que con nuestra notación cada línea en $\mathbb{G}(1, 2)$ está identificada con su dual en $\mathbb{P}^2$), por lo tanto $L_{Cu,Cv} = \ell = \phi_C(L_{u,v})$. Esto prueba que para toda línea $L \subset H$, $L \in \phi_C^{-1}(\ell)$. Nos queda probar que toda línea $L \in \phi_C^{-1}(\ell)$ está en H , pero esto se tiene por la definición de ϕ_C y de H . Específicamente, si $L_{u,v} \in \phi_C^{-1}(\ell)$, entonces $\phi_C(L_{u,v}) \in \ell$, y por tanto Cu y Cv están en ℓ o, equivalentemente, $(Cu)^T \ell = 0 = (Cv)^T \ell$. Esta última identidad implica que $u \in H$ y $v \in H$, y si dos puntos están contenidos en el plano H , la línea $L_{u,v}$ que los une también está contenida en H , que es precisamente lo que queríamos probar. $\square$

Este Lema indica que la columna i de la matriz $M(\ell)$ en el Teorema 3.1, es el punto en $\mathbb{P}^3$ definiendo la preimagen de la entrada ℓ_i bajo la función ϕ_{C_i} . Notemos además que un elemento $P \in \ker(M(\ell)^T)$ es un punto de $\mathbb{P}^3$ que satisface simultáneamente las ecuaciones de las preimágenes definidas por las columnas de $M(\ell)$, es decir, es un punto que está en $\phi_{C_1}^{-1}(\ell_1) \cap \phi_{C_2}^{-1}(\ell_2) \cap \phi_{C_3}^{-1}(\ell_3)$. Entonces para determinar si existe una línea en $\mathbb{P}^3$ que pueda ser proyectada a (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) , la dimensión de $\ker(M(\ell)^T)$ debe ser al menos 1. Esto es equivalente a que la matriz $M(\ell)$ tenga rango menor o igual a 2. En la Figura 4 tenemos una representación gráfica de la preimagen de un elemento $\ell \in \mathbb{P}^2$ para una cámara, y en la Figura 5 la intuición geométrica de una tupla en la variedad multivisión.

En el manuscrito [Bre22], Breiding, Rydell, Shehu, y Torres prueban que la descripción de la variedad multivisión dada por Kileel se puede extender a m cámaras cuando las cámaras están en posición general. Específicamente, prueban el siguiente teorema:

Teorema 3.2. Sea $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_m)$ un arreglo de m cámaras. La variedad multivisión para líneas $\mathcal{V}_{\mathcal{C}} := \text{Im}(\Phi_{\mathcal{C}})$ está definida por los menores de tamaño 3×3 de la matriz

$$M(\ell) := [C_1^T \ell_1 \quad \dots \quad C_m^T \ell_m]$$

donde $\ell_1, \dots, \ell_m$ denotan las coordenadas de una tupla genérica $(\ell_1, \dots, \ell_m) \in (\mathbb{P}^2)^m$, si y solo si, no hay cuatro cámaras con centros colineales.

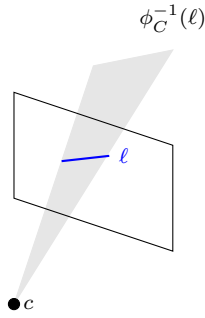


Figura 4: La línea azul ℓ representa una línea en $\mathbb{P}^2$ y $\phi_C^{-1}(\ell)$ es el plano indicado en gris. Este plano pasa por el centro de la cámara C y contiene todas las líneas cuya imagen mediante la cámara C es ℓ .

Con este resultado se tiene una descripción sencilla de la variedad multivisión en términos de determinantes. Esta descripción permite estudiar otras propiedades de la variedad.

Proposición 3.1. *Suponga que $m \geq 3$ y que no hay 4 cámaras con centros colineales. Los puntos singulares de la variedad multivisión están dados por*

$$\mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\text{sing}} = \{\ell \in \mathcal{V}_{\mathcal{C}} \mid \text{rank} M(\ell) = 1\}.$$

Para lectores con experiencia en Geometría Algebraica, este resultado es natural, pues los puntos singulares de la variedad de matrices con rango menor o igual a k son precisamente los puntos donde el rango es estrictamente menor. Sin embargo, en el contexto de la variedad multivisión los puntos singulares tienen una interpretación interesante: Las tuplas $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_m)$ tales que $\text{rank} M(\ell) = 1$ aparecen cuando los centros de las cámaras son coplanares y la línea ℓ_i es la línea que pasa por los puntos $\phi_{C_i}^{-1}(c_j)$ para $j \neq i$ (recordemos que c_j es el centro de la cámara C_j). Este fenómeno se ilustra en la Figura 6. Las tuplas singulares son las únicas tuplas en que la reconstrucción no es única.

Si las cámaras no están en posición general, es decir, hay 4 o más cámaras colineales, las ecuaciones provenientes de los menores de la matriz $M(\ell)$ no son suficientes para describir la variedad multivisión, y la descripción completa está dada en términos de la intersección de variedades de Schubert [Eis16]. Este caso, aunque no sucede en la práctica, es teóricamente interesante y los autores de [Bre22] también lo estudian. Para el lector interesado en variedades de Schubert esta es una excelente introducción al uso de estas variedades en problemas aplicados.

4. Discusión.

En las secciones anteriores vimos cómo el problema de triangulación de una línea proveniente de visión artificial

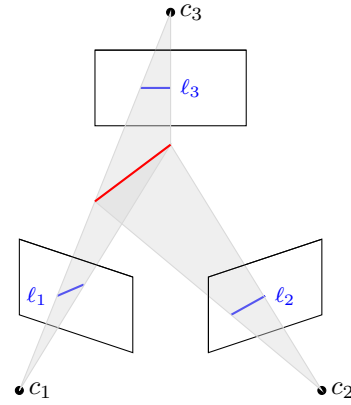


Figura 5: Esta es la situación en la que el Teorema 3.1 aplica: Tres cámaras con centros no colineales. Una tupla (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) , ilustrada en azul, está en la variedad multivisión si la intersección $\phi_{C_1}^{-1}(\ell_1) \cap \phi_{C_2}^{-1}(\ell_2) \cap \phi_{C_3}^{-1}(\ell_3)$ tiene dimensión mayor o igual a 1. En la figura, la intersección está indicada en rojo.

es modelado con conceptos básicos de Geometría Algebraica, como los Grassmanianos y las variedades determinantes. Este problema no es el único en que la Geometría Algebraica provee herramientas poderosas para desarrollar la teoría detrás de problemas de visión artificial. Otros problemas incluyen triangulación de puntos [Har04, THP15, Aga19], solución de problemas minimales con visibilidad completa [Duf19], problemas minimales con visibilidad parcial [Duf20], y el estudio de las variedades multivisión con otros modelos de cámaras.

Esta fuerte interacción entre Geometría Algebraica y visión artificial da lugar a un área llamada Visión Algebraica, que empezó a crecer a partir de 2014 gracias a Sameer Agarwal, Chris Aholt, Joe Kileel, Hon-Leung Lee, Max Lieblich, Bernd Sturmfels, y Rekha Thomas quienes abordaron problemas de visión artificial con ideas algebraicas innovadoras, y que es una excelente opción para matemáticos con experiencia en geometría algebraica e interés en aplicaciones.

Agradecimientos.

Angélica Torres agradece a la Fundación Universitaria Konrad Lorenz por abrir el espacio para este artículo, y a Beatriz Pascual-Escudero y los editores de esta publicación por sus comentarios en previas versiones del manuscrito. Angélica Torres is supported by the Knut and Alice Wallenberg Foundation within their WASP (Wallenberg AI, Autonomous Systems and Software Program) AI/Math initiative.

Referencias.

- [Aga10] Sameer and Furukawa Agarwal Yasutaka and Snavely, *Reconstructing Rome*, Computer **43** (2010), no. 6, 40-47.

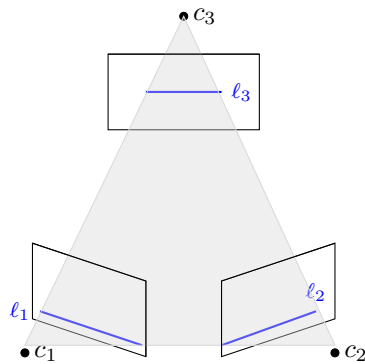


Figura 6: La tupla (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) , ilustrada en azul, satisface que $\phi_{c_1}^{-1}(\ell_1) \cap \phi_{c_2}^{-1}(\ell_2) \cap \phi_{c_3}^{-1}(\ell_3)$ tiene dimensión 2. Por definición, esta tupla está en la variedad multivisión, sin embargo la triangulación de esta tupla no es única. Cualquier línea contenida en el plano señalado en gris, que no pase por ningún centro de cámara, puede ser considerada como la triangulación de ℓ . Esta tupla es un punto singular de la variedad multivisión.

- [Duf20] Timothy and Kohn Duff Kathlén and Leykin, *PLIP - Point-Line Minimal Problems Under Partial Visibility in Three Views*, Computer Vision – ECCV 2020: 16th European Conference, Glasgow, UK, August 23–28, 2020, Proceedings, Part XXVI, 2020, pp.–192@, DOI 10.1007/978-3-030-58574-7_11.
- [Duf19] Timothy and Kohn Duff Kathlén and Leykin, *PLMP - Point-Line Minimal Problems in Complete Multi-View Visibility*, 2019.
- [THP15] Matthew Trager, Martial Hebert, and Jean Ponce, *The joint image handbook*, 2015.
- [Har04] Richard I. and Zisserman Hartley Andrew, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Second, Cambridge University Press, ISBN: 0521540518, 2004.
- [AG19] Andreas Gathmann, *Algebraic Geometry*, 2019/20. Class Notes TU Kaiserslautern. Available at <https://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/de/algeom.php>.
- [Aga19] Sameer and Pryhuber Agarwal Andrew and Thomas, *Ideals of the multiview variety*, IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence (2019).
- [JH95] Joe Harris, *Algebraic Geometry: A First Course*, Springer-Verlag, 1995.
- [Max20] Laurentiu G. and Rodríguez Maxim Jose I. and Wang, *Euclidean Distance Degree of the Multiview Variety*, SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry **4** (2020), no. 1, 28–48, DOI 10.1137/18M1233406, available at <https://doi.org/10.1137/18M1233406>.
- [Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [Kil17] Joseph David Kileel, *Algebraic Geometry for Computer Vision*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2017. Thesis (Ph.D.)–University of California, Berkeley.
- [Dra16] Jan and Horobeț Draisma Emil and Ottaviani, *The Euclidean distance degree of an algebraic variety*, Foundations of computational mathematics **16** (2016), no. 1, 99–149.
- [AHaKA96] Anders Heyden and Kalle Aström, *Algebraic varieties in multiple view geometry*, In European Conf. Computer Vision, 1996.

- [Lim21] Lek-Heng and Wong Lim Ken Sze-Wai and Ye, *The Grassmannian of affine subspaces*, Foundations of Computational Mathematics **21** (2021), no. 2, 537–574, DOI 10.1007/s10208-020-09459-8.
- [Stu11] Peter and Ramalingam Sturm Srikumar and Tardif, *Camera Models and Fundamental Concepts Used in Geometric Computer Vision*, Foundations and Trends in Computer Graphics and Vision **6** (2011), no. 1-2, 1–183, DOI 10.1561/06000000023.
- [Fau95] Olivier and Mourrain Faugeras Bernard, *On the geometry and algebra of the point and line correspondences between n images*, Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision, 1995, pp. 951–956.
- [Aga10] Sameer and Furukawa Agarwal Yasutaka and Snavely, *Reconstructing rome*, Computer **43** (2010), no. 6, 40–47.
- [Bre22] Paul and Rydell Breiding Felix and Shehu, *Line Multiview Varieties*, arXiv, 2022.
- [Eis16] Davis and Harris Eisenbud Joe, *3264 and all that: a second course in algebraic geometry*, Cambridge University Press, 2016.

Acerca de la autora: Angélica Torres es investigadora postdoctoral en el Departamento de Matemáticas de KTH Royal Institute of Technology. Su área de investigación es Geometría Algebraica aplicada y ha desarrollado proyectos en Redes de Reacciones Químicas, programación semidefinida y visión por computador. Además de su trabajo académico Angélica está interesada en la danza y en los beneficios del baile en la salud mental. Algún día le gustaría viajar a las islas Faroe y hacer senderismo allí.

DE SITTER SPECIAL RELATIVITY. SOME GENERAL ASPECTS

Adriana Victoria Araujo Salcedo ^{*}
adriana.araujo02@usa.edu.co

1. Introduction.

Our understanding of elementary particle physics is intimately related to both group representations and special relativity. In fact, all particles of nature can be classified according to the irreducible representations of the Poincaré group $\mathcal{P}$, the kinematic group of special relativity. This property suggests that the symmetry of special relativity must be considered as an exact symmetry of nature. Therefore, there is no reason to replace Poincaré as the kinematic group of spacetime. However, when one tries to stick together, elementary particle physics or quantum field theory with gravitation, one faces conceptual problems related to the existence of a limit length scale, given by the Planck length. This scale, shows up as the threshold of a new physics, represented by quantum gravity, means that the Planck length or some fundamental scale related to it must remain invariant under the relevant kinematics ruling the high-energy physics near to the Planck scale. Since in ordinary special relativity a length will contract by Lorentz transformations, the invariance requirement of such length scale seems to indicate that either the Lorentz symmetry must be broken down or the action of the Lorentz group $\mathcal{L}$ —in particular the boosts—must in some way be modified, i.e near the Planck scale, the Poincaré group must be replaced by a more general group, which will preside over the high-energy kinematics.

The emergence of a new theory, or even a reformulation of one that already exists, is a direct consequence of the impossibility of the currents one to bring statements in order to explain some experimental facts. Newton's theory enjoyed its greatest success when it was used to predict the existence of Neptune based on motions of Uranus, facts that could not be accounted for by the actions of the other planets. Nevertheless, a discrepancy in Mercury's orbit pointed out flaws in Newton's theory. From the kinematic point of view, the Newton's theory is invariant under the Galilean transformation; a group of transformation that ruled a physics based on an absolute time and space. Nevertheless, at the end of the 19th century, the wave theory of light as a disturbance of a "light medium" or luminiferous ether was widely accepted, reaching its most developed form in the work of James Clerk Maxwell. According to Maxwell's theory, all optical and electrical phenomena propagate through that medium, which suggested that it should be possible to experimentally determine motion relative to the hypothetical medium. The inconsistency around the Newtonian Mechanics with the Maxwell equations and

the lack of prediction of the motion near to the speed of light, lead to correct the existing theory and develop the Einstein special relativity theory, which is adopted as a theory that allows to describe any movement at any speed scale, even close to the speed of light. However, one problem with the theory arises in the impossibility to deal with phenomena at the Planck scale due to the incompatibility between a scale-invariant length and the Lorentz transformation. The Poincaré group is the group of symmetries of the Einstein special relativity which is a semidirect product of the Lorentz group $\mathcal{L}$ and the 4-dimensional translations T^4 . The Lorentz group is responsible for the rotation, boosts and the equivalence between framework; nevertheless, the cornerstone of Einstein's special relativity is the Lorentz symmetry. The problem is that the Lorentz group is believed not to allow the existence of an invariant length parameter and given the existence of a physical fundamental scale determined by the Planck length $l_p \approx 10^{-33} \text{ cm}$, it is understandable to think that, at the Planck scale the Lorentz symmetry must be broken or there must exist another relativistic theory near to that energy scale. So, the thing is how to get a theory that can describe physical phenomena at any energy scale, even at the Planck scale without violating the Lorentz symmetry.

In 1998, a work reported by Amelino-Camelia, Jonh Ellis *et al* [AC98], proposed that high-energy light from distant active galaxies could be used to check the effect of the gravity at some quantum scale. They gave a theoretical approach that at least some gamma-ray bursts (GRBs) at some cosmological distance increase the possibility that the observations could provide interesting constraints on the fundamental laws of physics, suggesting that at the Planck energy scale it must exist some interaction that disturbs in some way the structure of the spacetime.

In 2005, the Major Atmospheric Gamma-ray Imaging Cherenkov telescope (MAGIC), analyzed two flares from the Markarian 501 (MRK 501), between May and July 2005. The intense portions of the flares were quantified using four different energy bands. On June 30 the flare appeared in the energy band of 0.25–0.6 Tev, and the determinants results were found in the flare of July 9 in an energy band of 1.2–10 Tev with a time lag about 4 min; those results seemed to match with the facts proposed by Amelino-Camelia and Jonh Ellis [AJaa08].

Some scientist assumed that such a delay in the emission that came from the MRK 501 was a consequence of some perturbation made by something intrinsic of the source, for example, an acceleration by some magnetic field near of the center of the galaxy. So, would be interesting to try to look for some

^{*}Departamento de Matemática, Universidad Sergio Arboleda

explanations about what could cause this delay. This experimental fact constitutes a clear evidence that at those energies regimens, there must exist a theory capable to describe such as interaction with the spacetime; a fact that cannot be answered under the statements of the Einstein special relativity. In the light of this one then must look for a modified special relativity.

The attempt to reformulated the Einstein special relativity was in the last years implemented by the work of Amelino-Camelia [ACG02, ACG02] followed by João Magueijo and Lee Smolin [MJasL02], called *double special relativity*. This theory is obtained by introducing into the dispersion relation of the special relativity scale-suppressed term of high order in the momentum and like this, the existence of an invariant length at the Planck scale is allowed. The dispersion relation is of the type

$$E^2 - c^2 p^2 - c^4 m^2 + f(E, p, m, l_p) = 0. \quad (1)$$

Now, what is actually relevant in this theory is the fact that this high-order term is controlled by a parameter κ , which changes the kinematics group of special relativity from Poincaré to a κ -deformed Poincaré in which the Lorentz symmetry is explicitly violated. What happens is that, as far as the theory goes away from the Planck scale, the Lorentz symmetry is recovered and the relativity effect returns to be described by the ordinary special relativity.

So, in the light of the latter and having in mind the Planck length, how from the perspective of the Einstein special relativity can be answered fact like the one exposed? or how could l_p plays a role in the structure of the spacetime without violating Einstein special relativity?. The answer is twofold, or the Lorentz symmetry is violated from the beginning in order to consider the role of the Planck length in the quantum structure of the spacetime or the Einstein special relativity is reformulated with the purpose to consider such a facts, but *without violating the Lorentz symmetry*—given the relationship between the Lorentz symmetry and causality [ZEC64].

There exists a solution for this, it is known that the Lorentz transformations do not change the curvature of the homogeneous spacetimes in which they performed and considering that the scalar curvature R of any homogeneous spacetimes is of the form

$$R \sim \pm l^{-2}, \quad (2)$$

with l the pseudo-radius—of the hyperboloid in this case—then, the Lorentz transformations are found to leave the length parameter l invariant. This is a geometric characteristic that is not notorious in Minkowski spacetime, because in this case, what is left invariant will be an infinite length. However, in de Sitter and anti de Sitter space—that is the reason of the $\pm$ signal—the pseudo-radius is finite and from these spacetimes, one then sees that contrary to the usual belief, the Lorentz transformation leaves invariant the length parameter related to the scalar curvature of the homogeneous spacetime. Now here is the thing, it could be possible to think that if the Planck length l_p is to be invariant under Lorentz transformations, then

taking it to represent the pseudo-radius, the scalar curvature turns

$$R \sim \pm l_p^{-2} \sim \pm 10^{66} \text{ cm}^{-2}, \quad (3)$$

predicting indeed, that even at the Planck scale the Lorentz symmetry and the causality [ZEC64] are preserved. So, as one moves away from the Planck scale the l pseudo-radius becomes greater and the physics pass to be described by the Einstein special relativity—which is ruled by the Poincaré group. So as it is possible to see the Einstein special relativity as a generalization of Galileo relativity for velocities close to the speed of light, de Sitter-ruled special relativity—the kinematics will be ruled by the de Sitter group—can be seen as a generalization of the Einstein special relativity for any energy scale, even at the Planck scale.

The de Sitter special relativity is a theory that seems to live between two limit case, specific scenarios determined by the behavior of the Eq.(2) in the limit for great and small values of l . This is traduced in the non-cosmological and the infinity cosmological limits, two scenarios where it is possible to study different physics configurations [ARaPJG98]. During the past ten years, this geometric-relativistic theory is gaining attention even when this approach is not as new as it is believed, the first ideas about de-Sitter special relativity are due to L. Fantappiè, who in 1952 introduced what he called *Projective Relativity*, a theory that was further developed by G. Arcidiacono (for details [LaCL09]).

The large pseudo radius parametrization has already been shown to bear algebraic, geometric and thermodynamic properties that fit with what one would expect for the current cosmological observation [PSao99, RAGao98, dBao00]. Also in [ARaPJG09], it is explored the fact that the re-scaling factor of the de Sitter metric can be used as refractive index and under the optical geometric approximation, this scenario gives an acceptable numerical estimation about the photons-delay reported by the MAGIC experiment; representing a crucial point in the sense that it could be used as an experimental fact of the de Sitter-invariant special relativity. But, the de Sitter special relativity has been used also in other fields. Some recent works [KMaCCB16] show that the conformal geometry of the 4D-de Sitter space dS_4 represented by the hyperboloid helps to deal with the quark-confinement problem, taking into account the hypothetical relationship between the conformal symmetry and the color confinement. By other hand, under the infinite cosmological term, the underlying de Sitter spacetime contracts to the four-dimensional homogeneous conic spacetime [ARaJaPJ06], such a spacetime seems also to present the geometric and thermodynamic properties that fit with what one expect for an initial condition of a big bang Universe, what actually plays an important role in the Penrose's Conformal Cyclic Cosmology [A.JHPJSAaSL15].

The article is focuses on exploring the geometrical base of this theory as well as some of the physical implications in the large pseudo radius parametrization given the cosmological implications of it. For more details of the possible implications in the case of the infinite cosmological term [A.JHPJSAaSL15].

2. de Sitter special relativity, foundations and construction.

As it was said, the attempt to reformulated the Einstein special relativity was in the last years implemented by the work Amelino-Camelia [ACG02, ACG02] followed by João Magueijo and Lee Smolin [MJasL02], who focused on the invariance of Planck length in a very high energy. In this kind of theory, Lorentz symmetry is deformed through of a dimensional parameter κ , proportional to the Planck length, with the purpose to construct a theory capable of achieving ultrahigh energy regimes, *nevertheless at the moment to introduce such parameter automatically the theory loses the invariance under the Lorentz group*.

The Galilei group is one of the first well studied group, given the fact that Newtonian mechanics is invariant under its transformations; nevertheless, by the end of the nineteenth century, inconsistencies between Newtonian mechanics and the theory of electromagnetism have triggered the search for another kinematics group, another relativistic theory. The search ends once the Einstein special relativity was established. Einstein special relativity is a theory developed in Minkowski space and whose kinematics are ruled by the Poincaré group—the Lorentz symmetry plus the 4-D translations. But, even when all the elementary particles of the nature are described by representations of this group, the physics is again facing intricate consistency problems, two examples are

- the impossibility to find a role of the Planck length in the gravitation theory
- the acceleration in the universe expansion rate, known as the dark energy problem.

Could these statements mean that a new relativistic theory is needed? Well, there exist arguments suggesting that the Poincaré symmetry might break down at ultrahigh energies. An alternative to the double special relativity theory, is a proposal where the Poincaré group is replaced by another symmetry group defining like this, a new special relativity theory with a new kinematics group, in order that it incorporates two invariant quantities in a natural way : the speed of light c —which is a fundamental constant of the nature—and a Lorentz invariant length without breaking the Lorentz invariance preserving in that way, the causality of the theory [ZEC64], this theory is the de Sitter-ruled special relativity, a generalization of the ordinary special relativity for energies comparable to the Planck energy.

This approach is not as new as it is believed, the first ideas about de-Sitter special relativity are due to L. Fantappiè, who in 1952 introduced what he called *Projective Relativity*, a theory that was further developed by G. Arcidiacono (for details [LaCL09]). The de Sitter special relativity, naturally incorporates an invariant length parameter, this theory can be interpreted as an example of the so-called doubly special relativity; nevertheless, there is a fundamental difference, though: whereas in all doubly special relativity models the Lorentz

symmetry is violated, in de Sitter-ruled special relativity it remains as a physical symmetry¹.

3. de-Sitter Cartan geometry.

The geometry of the de Sitter space is part of a generalization of the Euclidean geometry, the Klein geometry. It describes homogeneous spaces defined in terms of the symmetries of the Lie groups, giving a starting point for the study of theories that will not require anymore the Minkowski space describes the local geometry².

In his so-called *Erlanger Programm*, Felix Klein aimed to systematize all geometries/spaces known at the time. The idea is to investigate groups of transformations of a space onto itself or to adjoin to any geometry a group of transformations that leave the geometry invariant. Thus, the geometry of a manifold is characterized as the theory of invariants of a transformation group of that manifold. This yields an one-to-one relationship between a **symmetry group and a geometry/space**.

The symmetry group associated to a geometry is called the isotropy group or its group of motion. Bacry and Levy-Leblond [BHaLLJ68] showed that all kinematical groups admit a four-dimensional spacetime interpretation. This is basically true because by assumption rotations and boosts form a subgroup of each of the kinematical groups. Thus, for every kinematical group, one can define a four-dimensional homogeneous space as the quotient of the group by the six-dimensional subgroup. In the case of the de Sitter groups and the Poincaré group, this six-dimensional group is the Lorentz group.

Now, just to have an idea of those theories, some general facts are going to be explored. The Cartan geometry generalizes the Riemannian geometry; means that for each point p of the manifold M , the geometry of the manifold is not described anymore by the Riemannian geometry. The geometry instead of being represented locally by an open set defined for each $p \in M$; it passes to be represented by a symmetry group. In the present work physics quantities are going to be constructed taking into account that the spacetime-manifold is no longer anymore locally represented by a Minkowski space but for a de Sitter spacetime, so from now and on the theory is considered as *the de Sitter-Cartan geometry*.

4. Aspects of the de Sitter special relativity, definitions and construction.

The de Sitter special relativity is a first principles theory based on the fact to replace the Poincaré-invariance group by the de-Sitter group like this, it is expected to explore aspects of the geometry and the group itself.

¹For details of the relationship between doubly special relativity, de Sitter space and general relativity [DKW10] by Derek Wise.

²It is important to note, that when a homogeneous space, describes the spacetime of the physics theory, the group of symmetry is also called the kinematics group.

4.1. The de Sitter Space.

The de Sitter Space is a homogeneous and a maximally symmetric spacetime, a quotient space defined as

$$dS(4, 1) = SO(4, 1)/\mathcal{L}, \quad (4)$$

with the Lorentz group as a sub-group of de Sitter group. The significant changes in contrast with the Poincaré group yield in the total replacement of how are defined or represented the translation in the kinematics group. The four-dimensional translations are replaced by a combination of the ordinary-Poincaré translations plus the conformal transformations. The Lorentz group is maintained as the responsible for the isotropy and the equivalence between the inertial frames. Keeping the Lorentz group into the kinematics of the theory will provide some advantages, for example as homogeneous space the de Sitter spacetime has constant sectional curvature given by

$$R \sim l^{-2}, \quad (5)$$

where l is the de Sitter length parameter or pseudo-radius. Now, by definition the Lorentz transformations do not change the curvature of the homogeneous spacetime in which they are performed and by (5) *Lorentz transformations are found to leave the length parameter l invariant*, which gives to the relativistic theory invariant under the de Sitter group—the de Sitter special relativity—special and suitable conditions, this theory counts with the speed of light and a length parameter without violating Lorentz symmetry, which leaves a theory capable to reach even the Planck scale given the fact that, if the Planck length l_p is to be invariant under Lorentz transformation, then taking it to represent the pseudo-radius, the scalar curvature turns

$$R \sim l_p^{-2} \sim 10^{66} \text{ cm}^{-2}, \quad (6)$$

predicting indeed, that even at the Planck scale the Lorentz symmetry and the causality [ZEC64] are preserved.

4.2. The geometry.

The de Sitter spaces can be defined as a hyper-surfaces embedded into the pseudo-Euclidean spaces $\mathbb{E}^{4,1}$, with metric

$$\eta_{AB} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1), \quad (A, B = 0, \dots, 4), \quad (7)$$

whose points in Cartesian coordinates

$$(\chi^A) = (\chi^\mu \chi^4); \quad \mu = 0, \dots, 3 \quad (8)$$

satisfies

$$\eta_{AB} \chi^A \chi^B = -l^2 \quad (9)$$

or equivalent in four dimensional coordinates

$$\eta_{\mu\nu} \chi^\mu \chi^\nu - \chi^4 = -l^2, \quad (10)$$

with l the de Sitter length parameter. Even when in the following the geometries and physical quantities will be expressed in stereographic coordinates—this represent just a fact

of the interest in this part of the work—the de Sitter spacetime can be represented in more than one coordinate system [HSaE.74].

Through the stereographic projection, the 5-dimensional coordinates are carrying to 4-dimension as follow

$$\chi^a \equiv h_\mu^a x^\mu, \quad h_\mu^a = \Omega(x) \delta_\mu^a,^3 \quad (11)$$

then

$$\chi^a = \Omega(x) x^\mu, \quad \chi^4 = -l^2 \Omega(x) \left(1 + \varepsilon \frac{\sigma^2}{4l^2} \right) \quad (12)$$

where

$$\Omega(x) = \frac{1}{1 + \sigma^2/4l^2} \quad (13)$$

and $\sigma^2 = \eta_{ab} x^a x^b$, is the Lorentz quadratic form. Finally in this coordinate system the metric turns to be represented as

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2(x) \eta_{\mu\nu} \quad (14)$$

which leave us a conformally flat metric.

4.3. Curvature parameters in conformal space.

As the de Sitter space is a curved spacetime, it is natural to look for how are defined the curvatures tensor, such as the Riemann tensors, Ricci tensor and the scalar curvature.

The corresponding Christoffel connection is

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\Omega}{2l^2} (\delta_\mu^\lambda \eta_{\nu\alpha} x^\alpha + \delta_\nu^\lambda \eta_{\mu\alpha} x^\alpha - \eta_{\mu\nu} x^\lambda), \quad (15)$$

the Riemann tensor given by

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \frac{\Omega^2}{l^2} (\delta_\rho^\mu \eta_{\nu\sigma} - \delta_\sigma^\mu \eta_{\nu\rho}), \quad (16)$$

and the Ricci and the scalar curvature are consequently,

$$R_{\nu\sigma} = \frac{3\Omega^2}{l^2} \eta_{\nu\sigma} \quad \text{and} \quad R = \frac{12}{l^2}. \quad (17)$$

5. The de Sitter group and the algebra.

As Poincaré, the de Sitter group $SO(4, 1)$ [ARaPJG16], has also a well-defined algebra. In order to study the de Sitter algebra, one should start with the Lorentz group generators L_{ab} $a, b = 0, \dots, 3$ which includes rotations and boosts and satisfied the commutation relations [ARaPJG16]

$$[L_{ab}, L_{cd}] = \delta_{bc} L_{ad} + \delta_{ad} L_{bc} - \delta_{bd} L_{ac} - \delta_{ac} L_{bd}, \quad (18)$$

By another hand, the generators of infinitesimal de Sitter transformations in Cartesian coordinates x^A are given by

$$J_{AB} = \eta_{AC} x^C \frac{\partial}{\partial x^B} - \eta_{BC} x^C \frac{\partial}{\partial x^A}, \quad (19)$$

³ h_μ^a is a tetrad field, which allows to establish a bridging between the spacetime and the tangent space.

satisfying the commutations relations

$$[J_{AB}, J_{CD}] = \eta_{BC} J_{AD} + \eta_{AD} J_{BC} - \eta_{BD} J_{AC} - \eta_{AC} J_{BD}. \quad (20)$$

In stereographics coordinates $\{x^\mu\}$ (19) end up express as

$$J_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} x^\rho P_\nu - \eta_{\nu\rho} x^\rho P_\mu, \quad J_{\mu 4} = l P_\mu - (4l^2)^{-1} K_\mu. \quad (21)$$

where

$$P_\mu = \partial_\mu \quad \text{and} \quad K_\mu = (2\eta_{\mu\nu} x^\nu x^\rho - \sigma^2 \delta_\mu^\rho) \partial_\rho \quad (22)$$

are the generators of ordinary translations and proper conformal transformations respectively [CGCSCaRJ70]. At this point is important to note that the $L_{\mu\nu}$ refers to the generators of the Lorentz transformation—means the Lorentz group remains unchanged—meanwhile the elements $L_{4\mu}$ defines the transitivity on the homogeneous space. So from Eq. (21) it follows that the de-Sitter spacetime is transitive under a combination of ordinary translations and proper conformal transformations — usually called de Sitter “translations”.

In terms of these generators the de-Sitter algebra (20) assumes the form

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = \eta_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma}, \quad (23)$$

$$[J_{4\mu}, J_{\nu\rho}] = \eta_{\mu\nu} J_{4\rho} - \eta_{\mu\rho} J_{4\nu}, \quad [J_{4\mu}, J_{4\nu}] = l^{-2} J_{\mu\nu}. \quad (24)$$

revealing that the commutation rules related to the translation part are involved with the de Sitter length parameter.

Everything previously developed represented the foundations of this relativistic theory because now the local symmetry of the theory and in consequence, all the facts related to it will be changed accordingly to this. The de-Sitter special relativity is a combination of two kinds of relativistic theory, one related to the symmetries of the Poincaré-translation and another related to some kind of *proper conformal transformations* as it is going to be shown in the following. This theory lies between two limits, one of them describes a spacetime with a vanished cosmological constant and the another will be a limit related to an infinity cosmological constant; this last brings important cosmological implications, for more details [A.JHPJSAaSL15].

6. Inönü Wigner contraction of de Sitter group.

Among of the kinematics groups, the most discussed in the literature are the Galilean and Poincaré group. The group's structure of each one of them is totally described through its algebra. It is often mentioned that the Galilean group is the non-relativistic or low-velocity limit of the Poincaré group.

There exist a mathematical procedure name *The Inönü Wigner group contraction* [GF64], from which it is possible to obtain a group's algebra of some specific group through another one. In this method, the generators of the

transformation of some group are re-defined according to the limit—the *contraction limit*—that wants to be performed. So, as it was already said, in the following, in order to perform the contraction limit from the de Sitter algebra, the generators must be re-defined being the de Sitter length l the parameter that will allow performing the contraction group.

6.1. The contraction limit ($l \rightarrow \infty$).

In order to explore the non-cosmological limit ($l \rightarrow \infty$), one should re-write (21), as follows

$$J_{\mu\nu} \equiv L_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} x^\rho P_\nu - \eta_{\nu\rho} x^\rho P_\mu, \quad (25)$$

where $L_{\mu\nu}$, is identified as the Lorentz generators, which follows the commutation relations

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = \eta_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} L_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma} L_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho} L_{\nu\sigma}. \quad (26)$$

By other hand defining a new quantity as

$$\Pi_\mu \equiv \frac{J_{\mu 4}}{l} = \left(P_\mu - \frac{1}{4l^2} K_\mu \right), \quad (27)$$

together with (26) the commutations relations (23, 24) turns

$$[\Pi_\mu, L_{\nu\rho}] = \eta_{\mu\nu} \Pi_\rho - \eta_{\mu\rho} \Pi_\nu, \quad [\Pi_\mu, \Pi_\nu] = l^{-2} L_{\mu\nu}. \quad (28)$$

Now, under the limit $l \rightarrow \infty$,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} L_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \Pi_\mu = P_\mu, \quad (29)$$

means that, the Lorentz sector of the kinematics group does not change, and the modified translation operator goes to the Poincaré translational operator. Meanwhile, the commutation rules turn

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = \eta_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} L_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma} L_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho} L_{\nu\sigma}, \quad (30)$$

$$[P_\mu, L_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\sigma} P_\rho - \eta_{\mu\rho} P_\sigma, \quad [P_\mu, P_\sigma] = 0. \quad (31)$$

What is actually happening is that under this contraction process the de-Sitter algebra is transformed into the Poincaré algebra, and de Sitter space is transformed into the Minkowski space

$$dS = SO(4, 1)/\mathcal{L} \longrightarrow M = \mathcal{P}/\mathcal{L}, \quad (32)$$

which is transitive under ordinary translation.

As it is expected the Riemann, Ricci tensor and also the scalar curvature vanishes under this limit [ARaPJG16]:

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \rightarrow 0, \quad R_{\nu\sigma} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow 0; \quad (33)$$

as expected, because in this limit, the de Sitter space goes asymptotically to Minkowski spacetime and the de Sitter group is deformed to the Poincaré group—the respective algebra in the strict sense.

The next section will explore how this theory can be the base to a new gravitational theory.

7. The Einstein equation in locally de Sitter spacetimes.

The theory of general relativity is a geometric theory that studies how the curvature and matter interact with each other. This relationship is established in a suitable way through the Einstein's field equation,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (34)$$

The symmetries are determinant, both to define the new conserved quantities and to define how is locally represented the spacetime for each observed. The local symmetry of the theory of general relativity is described by the Poincaré group and the underlying spacetime is described by Minkowski. This, in very formal way to say, is what it is known as the *strong equivalence principle of general relativity*

In the presence of a gravitational field, it is always possible to find a local coordinate system in which the laws of physics reduces to those of special relativity,

which means that when it is chosen a frame where the local inertial effects can be compensated by the effects of the gravity; in that region, the spacetime is represented by the Minkowski space and the symmetry ruled by the Poincaré group. On the other hand, under the observational facts[PSao99, RA-Gao98, dBPao00] about the expansion and acceleration of the Universe, one should consider the cosmological constant Λ into the Eq. (34) ⁴

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (35)$$

In this case, the second Bianchi identity implies that Λ must be constant:

$$\nabla_\mu \Lambda = \partial_\mu \Lambda = 0. \quad (36)$$

This fact represents a serious restriction in its prospective use for explaining the evolution of the of the Universe. For example, a possible explanation for the acceleration of the Universe expansion rate is to suppose that the cosmological term Λ is bigger today than it was a few billion years ago. However, since Einstein equation does not allow Λ to evolve, one cannot make use of it in cosmology. In order to circumvent this problem, many different models have been used in the literature for mimicking an evolving cosmological term.

Solutions to Eq. (34) in the vacuum are spacetimes that outside of the strong regimen of the gravitational source of gravity, the spacetime is represented by Minkowski spacetime. The replacement of the underlying Poincaré-ruled kinematics by a de Sitter-ruled kinematics does not change the dynamics of the gravitational field—the Einstein field equation for the spacetime-metric are the same—but what actually is changed is the strong equivalence principle, which in those coordinates system where the gravity effect is compensated

by the inertial effect the spacetime will describe the de Sitter space. Previously was showed that as homogeneous space the de Sitter space has the scalar curvature directly related to the length parameter l —as with the cosmological constant—so when the Einstein field equation is defined the cosmological parameter is already encoded into the equation—it does not appear explicitly in the equation—besides to the fact of counting with a new definition for the stress-energy tensor.

The Einstein-Hilbert action of general relativity in a locally-de Sitter spacetime is written as

$$S_g = \int R \sqrt{-g} d^4x, \quad (37)$$

where R is the scalar curvature. Despite similarities to the Einstein-Hilbert lagrangian, there is a fundamental difference, *The Riemann tensor $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ represents now both the dynamical curvature of general relativity and the kinematic curvature of the underlying de Sitter spacetime*

Now, considering the total action integral

$$S = S_g + S_m, \quad (38)$$

the invariance of S under the diffeomorphism yields the de Sitter-modified Einstein equation

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}\Pi_{\mu\nu}. \quad (39)$$

This is the equation that replaces the ordinary Einstein equation when the Poincaré-invariant special relativity is replaced by a de Sitter-invariant special relativity where $\Pi_{\mu\nu}$ represents the new energy-momentum tensor invariant under de Sitter translations. At this point there are two important facts: first, in contrast with others modified-gravity theories where they change the way to define the general action field S_g , here what is present came entirely from first-principles. One has just to replace the Poincaré-invariant Einstein special relativity by a de Sitter-invariant special relativity—what is changing is the special relativity theory—and second, since both the dynamical curvature of general relativity and the kinematic curvature of the underlying de Sitter spacetime are now included in the Riemann tensor $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$, the (contracted form of the second) Bianchi identity,

$$\nabla_\mu (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R) = 0, \quad (40)$$

does not require Λ to be constant. Certainly, the latter statement represents a change in the way to think and to consider the cosmological constant. So, given the relationship between the way to define in homogeneous space the cosmological constant and the necessity of such local Λ to comply with the local symmetry of spacetime—now ruled by the de Sitter group.

This local value for the cosmological constant will indeed bring some interesting fact for the overcoming studies and in order to do so, one interesting thing to do is analyze the Newtonian limit of the modified Einstein field equation (39).

⁴Considering Λ to be responsible for the acceleration of the expanding Universe.

8. The weak field limit of de Sitter-modified Einstein's equation and some implications.

The non-relativistic Newtonian limit of the ordinary-Einstein field equation is the Poisson equation

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (41)$$

where ρ is the mass density. Its solution for a point particle of mass m is given by

$$\phi = -\frac{Gm}{r}. \quad (42)$$

which represent the static Newtonian gravitational potential, knowing that the latter equation and in consequence, its solution is obtained under a small perturbation of the metric/spacetime. Under the same statements the modified-Einstein equation Eq. (39) is linearized in order to look for the analogous Poisson equation and with that obtains what is going to be the modified Newtonian potential which is expected that this new modified Newtonian potential provides a good approach to deal with problems such as the dynamics of the rotation curve for galaxies and the dark energy problem.

8.1. The new modified Newtonian potential and some physical consequences.

In a locally de Sitter spacetime, the spacetime metric is expanded according to

$$g_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (43)$$

where $\hat{g}_{\mu\nu}$ represents the background de Sitter metric and $h_{\mu\nu}$ is the gravitational perturbation. After some calculations and taking into account, the usual Newtonian limit is obtained when the gravitational field is weak and the particle velocities are small. In the presence of a cosmological term Λ , however, it has some additional subtleties. In the process of group contractions, the Galilei group is obtained from Poincaré in the contraction limit $c \rightarrow \infty$. The Newton-Hooke group, on the other hand, does not follow straightforwardly from the de Sitter group through the same limit. The reason is that, under such limit, the boost transformations are lost. In order to obtain a physically acceptable result, one has to simultaneously consider the limits $c \rightarrow \infty$ and $\Lambda \rightarrow 0$, but in such a way that $c^2 \Lambda = \tau^{-2}$, with τ a time parameter. This means that the usual weak field condition of Newtonian gravity must be supplemented by the small Λ condition [GWGaCEP03]

$$\Lambda r^2 \ll 1. \quad (44)$$

In this limit, and identifying

$$h_{00} = 2\phi/c^2, \quad (45)$$

with ϕ the gravitational scalar potential, the de Sitter modified Einstein equation assumes the form

$$\hat{\Delta}\phi + 2\phi \hat{R}_{00} = \frac{4\pi G}{c^2} \Pi_{00}, \quad (46)$$

where $\hat{\Delta}$ is the Laplace operator in the background de Sitter metric $\hat{g}^{ij}$, and

$$\Pi_{00} = \xi_0^0 T_{00}, \quad (47)$$

with ξ_0^0 the zero-component of the Killing vectors of the de Sitter “translations” and $T_{00} = \rho c^2$. The solution of equation (46) yields the de Sitter modified Newtonian potential [AAaLDFaPG17]

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r} - \frac{GMA}{6} r, \quad (48)$$

where we have used the relation $\Lambda = 3/l^2$. In the limit of a vanishing cosmological term $\Lambda \rightarrow 0$, it reduces to the ordinary Newtonian potential. It is important to reinforce that, whereas the Newtonian potential has a dynamic origin, the de Sitter correction is essentially kinematic.

8.2. Physical consequences.

The de Sitter modified general relativity also was used in order to approach to some mainstream problems in cosmology and astrophysics. Observationally, the corresponding density parameter for mass and dark energy in the Universe are well known. Assuming a flat Universe Perlmutter *et al* found $\Omega_m = 0,28 \pm 0,04$, thus showing that about 70 % of the energy density of the present Universe consists of dark energy. Nevertheless, from the theoretical point of view, the critical density associated to Λ does not report the same. According to the de Sitter-modified general relativity, any physical system with energy-momentum tensor induces in spacetime a local cosmological constant term

$$\Lambda = \frac{4\pi G}{c^4} \epsilon_m,$$

in regions where no matter is present, both the mass density ϵ_m and the cosmological term will not contribute. Now thinking about the observational values reported in the Supernova cosmology project, for a universe as a whole, ϵ_m produces a cosmological term Λ , with a dark energy density ϵ_Λ , which in the Newtonian limit was found to be related as [AAaLDFaPG17]

$$\epsilon_\Lambda = \frac{\Lambda \mathcal{R}^2}{6} \epsilon_m.$$

At the moment to be applied to the present-day universe, it gave a good account of the observed relation between those, seeing that the present theory provided a natural explanation for the coincidence problem.

Having performed the Newtonian limit of the modified Einstein field equation, one could also verify their prediction for the galactic rotation curves problem. The dependence of the cosmological constant on the local matter content and its relation to the extra term of the modified potential, gave a constraint about what it is the expression for the cosmological function, in order to achieve a flat rotation curve of galaxy—in the Keplerian region— without the necessity of supposing the existence of dark matter. Through the de Sitter modified

Newtonian force it was found a mass density profile presenting a small correction to the power law $\rho(r) \sim \rho_0(r_0/r)$ —which is within the class of physically acceptable profiles. The flat portion of the galaxy rotation curve was found directly related to the local value of the cosmological constant and giving the correct order of magnitude for the circular velocities of the stars, without the constraint of the existence of dark matter [AALDFaPJG19] and even more now, given the latest result in the *XENON100-experiment* where it was reported—so far—the non-evidence for dark matter [EA' 16].

Referencias.

- [ACG02] Amelino-Camelia. G, *Relativity in space-times with short distance structure governed by an observer independent (Planckian) length scale*, Int.J.Mod.Phys (2002), 35-60.
- [AC98] G. Amelino-Camelia Ellis. J. R., *Tests of quantum gravity from observations of gamma-ray bursts*, Nature (1998), 763-765.
- [ACG02] Amelino-Camelia. G, *Doubly special relativity*, Nature (2002), 34-35.
- [AJaa08] Albert J at all, *Probing Quantum Gravity using Photons from a flare of the active galactic nucleus Markarian 501 Observed by the MAGIC telescope* (2008).
- [ARaPJG16] Aldrovandi R and Pereira J G, *An introduction to Geometrical Physics, Second edition*, World Scientific Singapore, 2016.
- [ARaPJG98] Aldrovandi. R. and Pereira. J. G., *A Second Poincare group*, Conference on Topics in Theoretical Physics II: Festschrift for A.H. Zimmerman Sao Paulo, Brazil, November 20, 1998.
- [ARAJaPJ06] Aldrovandi. R. Almeida. J.P. and Pereira. J.G., *A Singular conformal universe*, J.Geom.Phys. (2006), 1042-1056.
- [ARaPJG09] Aldrovandi R and Pereira J G, *de Sitter Relativity: A New Road to Quantum Gravity?*, Found. Phys (2009), 1.
- [A.JHPJSaSL15] Araujo .A Jennen. H Pereira. J Sampson. A and Savi. L, *On the spacetime connecting two aeons in conformal cyclic cosmology* (2015), 151.
- [AAaLDFaPG17] Araujo. A and Lopez D. F. and Pereira.J. G., *de Sitter-invariant special relativity and the dark energy problem*, Class. Quant. Grav. (2017), 115014.
- [AALDFaPJG19] Araujo A Lopez D F and Pereira J G, *de Sitter invariant special relativity and galaxy rotation curves*, Gravitation and Cosmology (2019).
- [BHLLJ68] Bacry. H and Lévy. L. J, *Possible Kinematics*, Journal of Mathematical Physics (1968), 1605-1614.
- [CGCSCaRJ70] Curtis. G. C. Sidney. C and Roman. J, *A new improved energy-momentum tensor*, Annals of Physics (1970), 42 - 73.
- [dBPa00] de Bernardis. P. and others, *A Flat universe from high resolution maps of the cosmic microwave background radiation*, Nature (2000), 955-959.
- [DKW10] Derek K Wise, *MacDowell Mansouri gravity and Cartan geometry*, Classical and Quantum Gravity (2010), 155010.
- [EA' 16] E. Aprile, *XENON100 Dark Matter Results from a Combination of 477 Live Days*, Phys. Rev. D (2016).
- [GF64] Gursey. F, *In group theoretical concepts on methods in elementary particles physics* (1964).
- [GWGaCEP03] G. W. Gibbons and C. E. Patricot, *Newton-Hooke space-times, Hpp-waves and the cosmological constant*, Class. Quantum Grav (2003).
- [HSaE.74] Hawking. S and Ellis .G, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.
- [KMaCCB16] Kirchbach. M. and Compean. C. B., *Modelling duality between bound and resonant meson spectra by means of free quantum motions on the de Sitter space-time dS₄*, Eur. Phys. J. (2016), 210.
- [MJSL02] Magueijo. J and Smolin. L, *Lorentz invariance with an invariant energy scale*, Phys.Rev.Lett. (2002), 190403.
- [PSao99] Perlmutter. S. and others, *Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae*, Astrophys.J. (1999,) 565-586.
- [RAGao98] Riess. Adam G. and others, *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astron. J. (1998), 1009-1038.
- [LaCL09] Licata.I and Chiatti. L, *The Archaic Universe: Big Bang, Cosmological Term and the Quantum Origin of Time in Projective Cosmology* (2009), 1003-1018.
- [ZEC64] Zeeman. E. C., *Causality Implies the Lorentz Group*, Journal of Mathematical Physics. (1964), 490–493.

Acercas de la autora: Adriana tiene un pregrado en Matemática con Maestría en Física de la Universidad Centrocidental Lisandro Alvarado en Barquisimeto Venezuela, PhD del Instituto de Física Teórica (IFT) de la Universidad Estatal Paulista, Sao Paulo, Brasil. Profesora del Departamento de Matemática y directora del Semillero de Investigación en Matemática y Astronomía de la Universidad Sergio Arboleda. Investigadora del grupo de Relatividad y Astrofísica de Universidad Industrial de Santander e Investigadora de Cuerpos Menores del Sistema Solar. Le gustan las manualidades, y ver documentales. Le gustaría conocer la India y Egipto. Así mismo, ha deseado hacer un Post Doc en ciencias planetarias.

MATEMÁTICA

FLORENCE NIGHTINGALE: UNA ENFERMERA ILUMINANDO EL CAMINO DE LA ESTADÍSTICA

Liliam Cardeno Acero*
liliam.cardeno@udea.edu.co

1. Introducción

El 12 de mayo del 2020 se conmemoraron los 200 años del natalicio de Florence Nightingale, una notable mujer que aparece referenciada en muchas de sus biografías como enfermera y estadística. Si bien, esta es una combinación de profesiones que puede parecer poco común, la pandemia del coronavirus nos ha mostrado la importancia de la toma de decisiones basada en la información proporcionada por los datos, cuando se presentan situaciones que afectan a la salud poblacional.

Florence Nightingale es reconocida como una reformadora social, una defensora del acceso de la mujer a la educación y, especialmente, una muy buena matemática. En el campo de la salud, es conocida por ser fundadora de la enfermería moderna y por su contribución a la reforma de las condiciones sanitarias de los hospitales militares. Su papel en este campo es clave porque fue una gran impulsora de la reforma sanitaria a nivel mundial, en un momento en que las condiciones sanitarias hospitalarias no eran la prioridad.

En este texto, vamos a resaltar una faceta de Florence Nightingale que es más desconocida: los aportes que le dio a la estadística para conseguir tan loables objetivos.

2. Formación matemática de Florence

Florence Nightingale nació en Florencia, Italia, en el año 1820 y creció en el seno de una familia inglesa acomodada, junto a su hermana Parténope. El solvente estado económico de su padre, posibilitó a la familia recorrer varios países durante la niñez y juventud de Florence.

El padre de Florence, formado en Cambridge, siempre transmitió a sus dos hijas el respeto por la educación y les dio acceso a los clásicos griegos. Obviamente en esa época, como en muchas otras, las niñas eran educadas para el matrimonio, y sus padres no pensaban diferente. Sin embargo, después de muchas ruegos, Florence consiguió convencerlos de permitirle profundizar en su interés por las matemáticas.

Florence Nightingale pudo estudiar aritmética, geometría y álgebra con su tutor James Joseph Sylvester (1814-1897), quien es conocido en las matemáticas por desarrollar los invariantes junto a Arthur Cayley (1821-1895). También se interesó por el análisis de datos que estaba desarrollando el

estadístico Adolphe Quetelet (1796-1874), con quien mantuvo correspondencia. Quetelet estaba aplicando métodos estadísticos a datos de diversos ámbitos.

A los 17 años, impulsada por lo que ella interpretó como un “mensaje divino” informó a su familia su decisión de consagrar su vida a Dios y a los demás. Durante este tiempo daba tutorías a niños en áreas de matemáticas. A partir de 1844, concentró todos sus esfuerzos a la labor de la enfermería. En esa época, la enfermería estaba asociada a mujeres de la clase trabajadora y no era considerada una labor adecuada para una joven culta como Florence, a quien su familia la tenía destinada para casarse.

En los años siguientes, siguiendo su vocación, durante los viajes que realizaba junto a su familia y allegados, fue aprendiendo sobre la labor de las enfermeras y los sistemas hospitalarios en los países que visitaba. Francia, Italia, Alemania, Egipto, Suiza y Grecia fueron algunos de sus destinos. Florence siempre acostumbraba anotar detalles sobre los datos de las poblaciones y los hospitales que recorría. En algunos de estos fue voluntaria en el cuidado de enfermos.

3. La dama de la lámpara en la Guerra de Crimea

La Guerra de Crimea, ocurrida entre octubre de 1853 y febrero de 1856, fue un conflicto bélico entre Inglaterra, Francia y Turquía, contra Rusia. El motivo fue el reparto del declinante imperio otomano. La mayor parte de esta guerra ocurrió en la península de Crimea, en el mar Negro. Las tropas británicas se trasladaron a Crimea para proteger a Turquía de las agresiones rusas.

A Londres llegaban noticias de que el ejército británico vencía a los rusos, pero, también informaban que las enfermedades estaban derrotando a los soldados británicos. En Crimea, no contaban con médicos, ni medicinas, ni cuidados suficientes.

Sidney Herbert, el entonces secretario de guerra, era un antiguo conocido de la familia Nightingale y le propuso a Florence que asumiera el puesto de *Superintendente de Enfermería de los Hospitales Ingleses en Turquía* y su función sería la de supervisar la incorporación de nuevas enfermeras en los hospitales militares.

El 4 de noviembre de 1854, Florence junto a un grupo de 38 enfermeras voluntarias, muchas de ellas inexpertas, lle-

*Instituto de Matemáticas, Universidad de Antioquia

garon a la base de operaciones británica de Scutari (actual Üsküdar, en Estambul). Allí encontró que las condiciones de los soldados eran lamentables. Había pocos suministros médicos, la higiene escaseaba, no tenían cocinas apropiadas para procesar alimentos y la comida era insuficiente.

Durante su trabajo en el Hospital militar de Crimea, ella observó que muchas de las muertes de los soldados eran causadas por enfermedades infecciosas. Para verificar esta conjetura, Florence se centró en recopilar y analizar los datos sobre mortalidad, buscando demostrar que gran parte de las muertes de los soldados se debían a malas condiciones sanitarias y, por tanto, eran evitables.

El trabajo de Florence en Crimea fue extensamente difundido por la prensa británica. Esto ayudó en la consecución de apoyos para mejorar las condiciones de los soldados en los hospitales. A partir de un artículo del *Times*, publicado el 8 de febrero de 1855, Florence Nightingale fue conocida como “La Dama de la Lámpara”:

“Sin exageración alguna, es un ángel guardián en estos hospitales, y mientras su grácil figura se desliza silenciosamente por los corredores de estos hospitales, la cara del desdichado se suaviza con gratitud a la vista de ella. Cuando todos los oficiales médicos se han retirado ya y el silencio y la oscuridad descienden sobre tantos postrados dolientes, puede observársela sola, con una pequeña lámpara en su mano, efectuando sus solitarias rondas.”

En febrero de 1856, cuando la guerra terminó, Florence regresó a Londres e inmediatamente solicitó audiencia con la reina Victoria para insistirle en la necesidad de subsanar las condiciones higiénicas en los hospitales. Apoyada en sus notas, Florence consiguió que en mayo de ese mismo año se expidiera una *Real Orden* para investigar los desastres de la guerra e instaurar medidas preventivas en los hospitales.

4. El Diagrama de la Rosa

La estadística fue la principal arma con la que Florence Nightingale pudo sustentar sus pedidos de reformas hospitalarias. Ella analizó y clasificó con cuidado todos sus datos y tuvo el ingenio de hacer comprensibles sus estadísticas usando diagramas que resumían de manera clara la información recolectada.

En 1858, Florence Nightingale publicó *Notes on matters affecting the health, efficient and hospital administration of the British army* (Notas sobre asuntos que afectan la salud, eficiencia y administración del hospital militar británico). Este fue un trabajo enviado de manera privada a la Secretaría del Estado de Guerra, donde Florence presentó sus observaciones sobre la salubridad en los hospitales que consideraba urgentes de reformas.

Este trabajo incluía un gráfico estadístico conocido como el *Diagrama de la Rosa* o *Diagrama del área polar*, que fue

diseñado por ella y titulado *Diagram of the Causes of Mortality in the Army of the East* (Diagrama de las causas de mortalidad del ejército del Este). Ver Figura 1.

La presentación de información en tablas ya era un recurso muy usado en su época. Sin embargo, el Diagrama de la Rosa fue una idea novedosa que le dio un vuelco a la Estadística Aplicada. Con este recurso, Florence pretendía, según sus propias palabras, “*lograr a través de los ojos lo que no somos capaces de transmitir a las mentes de los ciudadanos a través de sus oídos insensibles a las palabras*”.

En enero de 1859, Florence publicó y distribuyó un trabajo en el que presentaba los resultados oficiales obtenidos en ese periodo llamado *A contribution to the sanitary history of the British Army during the late war with Russia* (Una contribución a la historia sanitaria del ejército británico durante la última guerra con Rusia), donde también incluyó el Diagrama de la Rosa.

En el gráfico original, Florence presenta una explicación en la parte inferior izquierda: “*Cada una de las áreas azules, rojas y las secciones negras, están medidas utilizando el centro como vértice común. Las secciones azules medidas desde el centro del círculo representan, área por área, las muertes por enfermedades zoonóticas, desde prevenibles hasta mitigables. Las secciones rojas medidas desde el centro representan las muertes por heridas. Las secciones negras medidas desde el centro representan las muertes por otras causas.*”

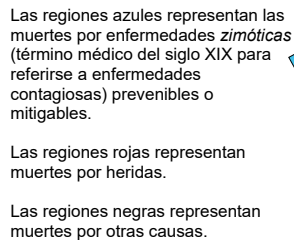
Los dos círculos (llamados *Rosas*) están divididos en doce regiones, cada una correspondiendo a uno de los meses desde abril de 1854 a marzo de 1856. Las regiones están codificadas por colores: el azul representa la cantidad de muertes por enfermedades prevenibles o mitigables, el rojo por heridas de batalla y el negro por otras causas.

La Rosa mayor representa el antes y la Rosa menor el después de la llegada de la comisión sanitaria dirigida por Florence en marzo de 1855.

En la rosa que representa los datos antes de la llegada de Florence, es notable la diferencia entre el tamaño de las regiones azules y las regiones rojas, mientras que, en la rosa que representa los datos a partir de la intervención de la comisión sanitaria se observa una notoria disminución del tamaño de estas áreas.

La cantidad de muertes de los soldados en los hospitales militares británicos alcanzó su valor máximo en enero de 1855, cuando, de los 32.393 soldados con los que contaba el ejército, murieron en total 3.168, de los cuales 2.761 murieron de enfermedades contagiosas prevenibles, 83 por heridas en el campo de batalla y 324 por otras causas. Con esta información, Florence calculó una tasa de mortalidad de 1.174 por cada 10.000, de los cuales 1.023 de cada 10.000 fueron a causa de enfermedades contagiosas. Si esta tasa no se hubiera atenuado, el ejército británico habría sido exterminado rápidamente.

Desde el punto de vista estadístico, el Diagrama de la Rosa fue un gráfico absolutamente novedoso para su época. En este diagrama se representan tres variables: el tiempo (cada sector es un mes), el número de muertes (que corresponde al área



del sector) y la causa de la muerte (diferenciada por el color). Hasta entonces, los gráficos más usados, principalmente gráficos de barras y de sectores, representaban solo una o dos variables.

En 1874 se convirtió en miembro honorario de la American Statistical Association y en 1883, la reina Victoria le concede la medalla de la Cruz Roja Real por sus aportes a la salud.

Acerca de la autora: Liliam Cardeño es Matemática y Magíster en Matemáticas de la Universidad de Antioquia. Hizo su doctorado en Estadística en la Universidad de São Paulo, Brasil. Disfruta de su trabajo como profesora del área de probabilidad en el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Antioquia. En sus ratos libres le gusta leer, especialmente sobre la vida de los matemáticos famosos. Por eso, a veces, también dicta el curso de Historia de las Matemáticas.

MÚSICA Y ALGORITMOS MATEMÁTICOS

Blanca María Parra Mosqueda *
bparramosqueda@gmail.com

1. Introducción.

Comprender cómo las matemáticas se relacionan con otras disciplinas ayuda a proporcionar contexto y a dar sentido de realidad y de pertinencia a conceptos y algoritmos que proponemos a los estudiantes. Resaltar las conexiones de las matemáticas con el mundo real y con tantos campos de conocimiento como sea posible es crucial para hacer de cada curso algo comprensible/tangible para los estudiantes de modo que puedan apreciar el valor que tienen las matemáticas en todos los ámbitos, potenciando su interés en la materia, animándolos a generar preguntas y a responderlas entre ellos mismos, con apoyo de todo tipo de recursos. La música es uno de esos campos, y el interés en la construcción de escalas musicales tan perfectas como sea posible desvela algunos algoritmos fundamentales en la construcción del conocimiento matemático, previos al establecimiento del cálculo.

En este texto hablaremos primero de la relación documentada entre matemáticas y música y posteriormente nos referiremos a un tema muy particular que se puede plantear muy simplemente como la imposibilidad de afinar perfectamente un piano, lo que nos llevará a recordar algunos de los algoritmos fundamentales en matemáticas.

2. Música y matemáticas: Un poco de historia.

Para introducir las relaciones de las matemáticas con el arte -particularmente el trabajo pitagórico en la música-, los deportes, los juegos y la naturaleza, un punto de partida ameno es el video *Donald en el país de las matemáticas* [Dis59]. El mismo Cédric Villani, quien ha recibido el Premio Henry Poincaré (2009), el Premio Fermat (2009) y la Medalla Fields (2010), en una conferencia ofrecida en la Universidad de Guanajuato, en 2015, destacaba que “cuando tenía 10 años veía esto, no son matemáticas profundas. . . «El pato Donald en la tierra de las matemáticas». Pero lo hallé fascinante, quizá me influenció para convertirme en matemático. ¿Quién sabe? Nadie en realidad sabe de dónde viene la vocación. Entonces en esta caricatura animada había énfasis en dos conexiones entre matemáticas y arte. Cuando quieran comunicar la ciencia. . . siempre es bueno encontrar relaciones con cosas con las que las personas estén familiarizadas o que les gusten, como la música, las películas o pintura o lo que sea” [Dio19].

Por su parte, Henry Martin cita a Leibniz, en “Las matemáticas y la música” [Mar71]: “La música es un ejercicio de aritmética secreta y el que se entrega a ella ignora que maneja números”; Martin añade “y el que practica el clavecín ignora que maneja logaritmos”. Lo cierto es que hay una relación estrecha entre matemáticas y música y esta relación se remonta, explícitamente, a las investigaciones de Pitágoras sobre el sonido. Los pitagóricos crearon una división del currículo en “Quadrivium, que consta de las cuatro Artes Liberales de número, geometría, música y cosmología, estudiadas desde la antigüedad hasta el Renacimiento como una forma de vislumbrar la naturaleza de la realidad” [Mar10], y el trivium (gramática, retórica y dialéctica). La historia señala que los discípulos de Pitágoras estudiaban el Quadrivium o Tetraktys, alrededor del año 500 AC, en una comunidad en la que todos los individuos, hombres y mujeres, eran iguales, material y moralmente.

Para el análisis de los sonidos producidos por una cuerda, dependiendo de las tensiones y de la posición entre los dos puntos fijos que la sostienen, se utiliza el monocordio; la Figura 1 muestra los elementos fundamentales.

3. Pitágoras y la escala musical.

La música permaneció como un subconjunto de las matemáticas durante la Edad Media. Unos mil años después de Pitágoras, Boecio fue uno de los estudiantes del Quadrivium, y es a través de él que conocemos acerca de la teoría musical pitagórica y la creación de la escala musical, derivada del estudio del monocordio [Boe09].

De acuerdo con Boecio, Pitágoras, obsesionado por explicar matemáticamente los intervalos musicales, al pasar por una herrería quedó sorprendido por el sonido rítmico del golpe de los martillos en el yunque. Entró, observó y experimentó utilizando cinco martillos. Comprobó que uno, que rompía la escala perfecta de sonidos, tenía un peso sin relación numérica con el resto, por lo que lo eliminó. Con los restantes, obtuvo las siguientes conclusiones:

- Sus pesos estaban en la proporción 12, 9, 8 y 6.
- El mayor (12), de peso doble del más pequeño (6), producía un sonido (una octava) más bajo que el menor.
- El peso de los otros dos martillos (9 y 8) correspondía a la media aritmética y armónica respectivamente de los de peso (12 y 6), por lo que dedujo que darían las otras notas fijas de la escala.

*Escuela Nacional de Estudios Superiores (ENES) UNAM León. Profesora Invitada Permanente

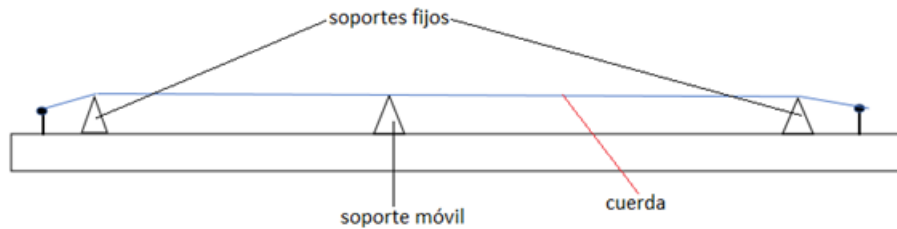


Figura 1: Esquema simple del monocordio de Pitágoras.

Dado que el instrumento solo dispone de una cuerda, el afinado consiste en aplicarle una tensión que produzca la nota deseada de la escala. Al modificar la tensión sobre la cuerda se modifica la altura o frecuencia de la nota emitida. Alternativamente, al modificar la longitud de la cuerda, moviendo el soporte móvil entre los dos puntos fijos de la cuerda y manteniendo la misma tensión, se modifica el tono producido.

La experimentación pitagórica y la de quienes siguieron experimentando con monocordios y otros instrumentos de cuerdas condujo a las siguientes leyes, formuladas por Mersenne en su *Harmonie Universelle* de 1936, según cita Sir James Jean [Jea69]:

1. Cuando una cuerda y su tensión permanecen inalterados, pero se varía su longitud, el período de la vibración es proporcional a la longitud (Ley de Pitágoras).
2. Cuando una cuerda y su longitud permanecen inalterados, pero se varía su tensión, la frecuencia de la vibración es proporcional a la raíz cuadrada de la tensión.
3. Para cuerda distintas de la misma longitud e igual tensión el período de la vibración es proporcional a la raíz cuadrada del peso de la cuerda.

Período y frecuencia están relacionados, independientemente de la fuente de la onda: un período de onda es el tiempo en segundos entre dos picos de onda y es inversamente proporcional a la frecuencia. El tono o altura que escuchamos depende de la frecuencia de la vibración de la onda sonora. Las notas de la escala musical que conocemos varían en la altura (frecuencia) y la duración relativa del sonido. Entre más vibre la cuerda, más agudo será el sonido; entre menos vibre, más grave.

La frecuencia de afinación del piano se consigue partiendo del sonido la 440 que produce una vibración a 440 Hz a 20 grados centígrados y sirve como estándar de referencia para afinar la altura musical de todos los instrumentos de cuerda. Dice Luis Miravalles [Mir15] que “La 440 es la nota la o A que se encuentra cinco teclas blancas a la derecha del do o C central del piano”.

La relación entre matemáticas y música puede no ser evidentes en estos tiempos tecnológicos, con moduladores de sonido adecuados para modificar tanto como se quiera y sea posible los sonidos producidos por la voz y los instrumentos musicales, particularmente; estos aparatos permiten modificar

las propiedades de la onda sonora que emite el cuerpo que produce el sonido.

Las propiedades de la forma de la onda, susceptibles de ser modificadas utilizando los recursos tecnológicos incluyen:

- Frecuencia
- Amplitud
- Timbre
- Longitud de onda
- Tiempo
- Fase

para producir efectos de movimiento y de profundidad, particularmente. Un texto muy ameno sobre el análisis del sonido, muy didáctico, ricamente ilustrado y al alcance de cualquier persona con conocimientos de trigonometría, es el publicado por la Language Research Foundation, *Who is Fourier?* [Lan95]. Pero la música considera otros dos elementos principales:

- la armonía, que depende de la relación entre las frecuencias de dos sonidos,
- el ritmo, de naturaleza aritmética, evidente cuando aprendemos a bailar contando los pasos y creando secuencias con ellos.

Es decir, los sonidos generados por algún instrumento musical, particularmente, además de la frecuencia principal producen sonidos armónicos, generalmente con volúmenes más bajos; esos sonidos guardan una relación matemática con el sonido principal y esta relación puede ser el doble, el triple, cuatro veces la frecuencia del sonido principal, etc. Algunas de las relaciones armónicas que disfrutamos están en proporciones simples, como $2/1$ y $3/2$, particularmente.

En la Figura 2 ilustramos el efecto de recortar la cuerda a la mitad, particularmente. La nota que se produce es la misma que la original, pero el sonido es más agudo -una octava más alto-. Su frecuencia es doble de la original. La quinta se obtiene al recortar la cuerda a $2/3$ de su longitud original, con lo que su frecuencia es $3/2$ de la original.

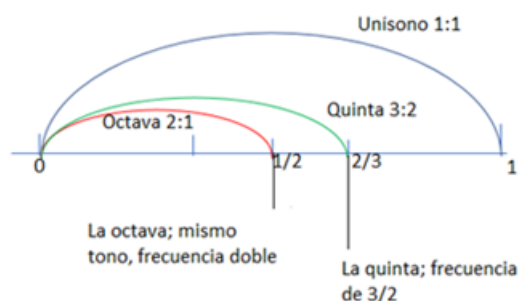


Figura 2: Modificación de la frecuencia de una nota al reducir su longitud.

Se llama C o do, dependiendo de si se utiliza la notación anglosajona o latina, respectivamente, a la primera nota musical de la escala diatónica de do mayor, que es la única escala mayor que no posee alteraciones y por tanto es considerada la base del sistema tonal [Soc16].

El teclado de un piano, sus notas y su frecuencia se ilustran, completos, en “Intervalo de Octava Musical”[Oll22]. La afinación del piano toma como punto de partida el C o do central, al que se asigna una frecuencia de 1; el C o do una octava arriba del central tiene una frecuencia de 2. Triplicando la frecuencia se mueve a la quinta perfecta en la siguiente octava. Siguiendo a Pitágoras, con estas dos reglas basta para construir “todas las notas”, es decir, una escala cromática completa.

Dice Rafael Fernández [Fer09] que “Los intervalos justos o perfectos son los más consonantes entre sí, los que mejor se ¡¡funden!! cuando sus dos notas suenan a la vez. Es el caso del unísono (misma frecuencia) y de la octava (frecuencia doble), y también (al menos desde el punto de vista matemático) de la quinta (frecuencia $3/2$ veces mayor) y la cuarta (frecuencia $4/3$ veces mayor)”.

En la entrada “Quinta” [Wikib], se dice que “desde la Grecia clásica se observó que mediante el encadenamiento de quintas puede alcanzarse un número infinito de notas diferentes sin que lleguen nunca a coincidir de nuevo con el unísono o la octava. Son subconjuntos de esta espiral de quintas la escala pentatónica (con 5 notas consecutivas), la diatónica (con 7) y la cromática (con 12)”.

3.1. Construcción de escalas, afinación de pianos y algunas matemáticas asociadas.

Mencionamos que la afinación de los instrumentos de cuerda se suele basar en la quinta pura, que es el intervalo $\frac{3}{2}$. Este intervalo es relativamente fácil de producir experimentalmente, dicen los que saben de música. Veamos a qué nos conduce esta facilidad experimental, que seguramente depende de las habilidades musicales de cada uno.

En términos musicales, se trata de comparar la nota resultante al subir doce quintas perfectas con la nota que está siete octavas arriba de la original. Es decir: cambiar la frecuencia inicial de 1 a $(\frac{3}{2})^{12}$ y que eso sea igual a 2^7 .

Sabemos ya que las octavas se obtienen por duplicación y las quintas por triplicación.

La imposibilidad de afinar perfectamente un piano está ilustrada en el video *A mathematical proof that every piano is out of tune* [math16] y ahí se expone una muy elemental demostración sintetizada en la afirmación que se observa en la captura de pantalla, tomada del video Figura 3.

Dicho en otras palabras: $(\frac{3}{2})^{12} = 2^7$ conduce a $3^{12} = 2^{19}$ y sabemos que todas las potencias de 3 son impares mientras que todas las potencias de 2 son pares. De ahí resulta la imposibilidad de afinar perfectamente un piano.

Podemos enunciarlo diciendo que el encadenamiento sucesivo de factores de frecuencia iguales a $3 : 2$ (la quinta) nunca produce un valor que se pueda reducir a la relación $2 : 1$ (la octava); ningún número es al mismo tiempo potencia de 3 y de 2, salvo la unidad -que corresponde a la potencia cero de cada uno- y que representa el unísono.

Si bien es imposible afinar perfectamente un piano (u otro instrumento de cuerda), hay técnicas para lograr una afinación tan perfecta como sea posible, y hay quienes tienen un oído capaz de notarlo.

3.2. Matemáticas asociadas con el problema de afinar un piano.

3.2.1. La ecuación de los músicos.

Nos interesa conocer un poco de las matemáticas que se relacionan con este problema de afinación. Sabemos ya que $(\frac{3}{2})^{12} = 2^7$ no es una afirmación verdadera, pero nos centraremos en el análisis de la ecuación

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2^y.$$

Siguiendo la afirmación de que “que mediante el encadenamiento de quintas puede alcanzarse un número infinito de notas diferentes sin que lleguen nunca a coincidir de nuevo con el unísono o la octava” [Wikib] asignemos valores enteros positivos a cada uno de los elementos de la pareja, los cuales utilizaremos como exponentes para las frecuencias de la quinta perfecta y de la octava; de esta manera generamos las fracciones de la forma $(\frac{3}{2})^x$ y las de la forma 2^y . Resulta entonces la “ecuación de los músicos” a saber:

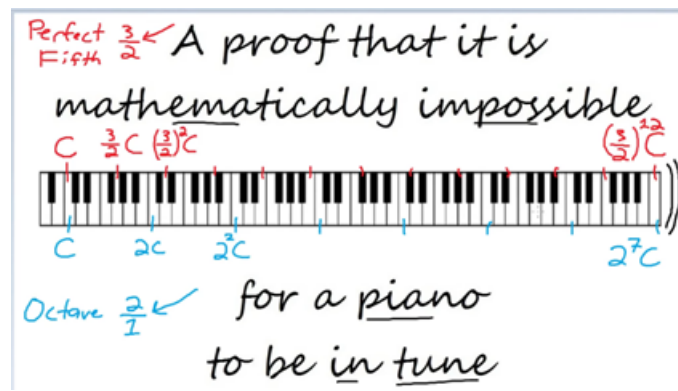


Figura 3: Captura de pantalla de [math16].

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2^y.$$

Con $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, es imposible excepto por la solución trivial $(x, y) = (0, 0)$, algo que quedó demostrado en el video previo. El hecho era conocido por Pitágoras y su grupo, quienes observaron que $\frac{3^{12}}{2^{19}}$ tiene un valor muy próximo a 1, es decir, que $(x, y) = (12, 7)$ es una muy buena solución aproximada. Se llama “coma pitagórica” al intervalo musical que resulta de la comparación entre doce quintas perfectas y siete octavas. Su expresión numérica es

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \div 2^7 = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} = 1,0136432647705078125.$$

El número resulta ser, efectivamente, suficientemente cercano a 1 para efectos prácticos y bastaría para asegurar un razonable ajuste a las cuerdas del piano de manera de lograr las armonías deseadas.

3.2.2. Recursos tecnológicos actuales para resolver la ecuación.

Podemos replantear el problema como la búsqueda de las parejas ordenadas en $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$, tales que

$$3^x = 2^y.$$

Si calculamos los logaritmos base 2 de las expresiones en los dos lados de la ecuación, obtenemos:

$$\log_2 3^x = \log_2 2^y.$$

La aplicación de las reglas de los logaritmos conduce a

$$x \log_2 3 = y \log_2 2 = y,$$

es decir:

$$y = x \log_2 3$$

o bien

$$\log_2 3 = \frac{y}{x}.$$

Sabemos, sin embargo, que $\log_2 3$ no es un número racional, mientras que es un hecho que el cociente de dos números racionales es racional.

De nuevo, encontramos que la ecuación que propusimos no tiene solución en $\mathbb{Q}^2$. Sin embargo podemos calcular un valor aproximado para $z = \log_2 3$. Recordemos que calcular el valor de significa que buscamos el valor de z tal que $2^z = 3$. Al utilizar *Wolfram Alpha* para resolver esta última ecuación obtuvimos una solución aproximada, con un buen número de dígitos:

$$z = \log_2 3 = 1,584962500721156181453739.$$

Con esto podemos saber cuántas octavas se requieren para alcanzar una quinta perfecta. Sabemos que $2^z = 3$ y tenemos que $\frac{2^z}{2} = \frac{3}{2}$ o, lo que es lo mismo, $2^{z-1} = \frac{3}{2}$. Es decir: el número exacto de octavas para alcanzar una quinta perfecta, calculado con el muy actualizado software de *Wolfram Alpha*, es

$$z - 1 = 0,584962500721156181453739.$$

3.2.3. Fracciones continuas para aproximar números racionales.

La cuestión es que antes de la aparición de las modernas calculadoras y de las facilidades de cálculo integradas en procesadores, aplicaciones y hojas de cálculo los cálculos eran bastante complejos y requerían del conocimiento de métodos de aproximación.

Cada método de aproximación está generado en los algoritmos conocidos en su momento. Los métodos de afinación de los instrumentos musicales, particularmente, son anteriores al surgimiento del cálculo y todo lo que trajo, incluidas las series de Fourier.

Uno de los métodos de aproximación es el uso de fracciones continuas, el cual se fundamenta en el algoritmo de Euclides para determinar el máximo común divisor de dos enteros positivos. Courant, Robbins y Stewart [Cou96] muestran cómo el algoritmo de Euclides utilizado para encontrar el máximo común divisor de dos números enteros lleva inmediatamente al método para representar el cociente de dos enteros como una fracción continua. Dicen:

“Aplicado a los números 840 y 611, por ejemplo, el algoritmo euclidiano conduce a la siguiente serie de ecuaciones,

$$\begin{aligned} 840 &= 1 \cdot 611 + 229, & 611 &= 2 \cdot 229 + 153, \\ 229 &= 1 \cdot 153 + 76, & 153 &= 2 \cdot 76 + 1. \end{aligned}$$

en donde, incidentalmente, se muestra que el máximo común divisor de 840 y 611 es 1. De esas ecuaciones podemos derivar las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{840}{611} &= 1 + \frac{229}{611} = 1 + \frac{1}{611/229}, \\ \frac{611}{229} &= 2 + \frac{153}{229} = 1 + \frac{1}{229/153}, \\ \frac{229}{153} &= 1 + \frac{76}{153} = 1 + \frac{1}{153/76}, \\ \frac{153}{76} &= 2 + \frac{1}{76}. \end{aligned}$$

Combinando esas ecuaciones obtenemos el desarrollo del número racional $\frac{840}{611}$ en la forma

$$\frac{840}{611} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{76}}}}.$$

Una expresión de la forma

$$a = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots \frac{1}{a_n}}}},$$

donde las a 's son enteros positivos, se llama una *fracción continua*”.

Para un número racional escrito en formato decimal tenemos la opción de reescribirlo como el cociente de dos enteros y entonces aplicaríamos el método descrito previamente. Pero hay maneras equivalentes, como el algoritmo que ilustraremos enseguida con un ejemplo mientras simultáneamente vamos describiendo, grosso modo, el método general.

Supongamos que queremos encontrar la fracción continua asociada con $x = 3,17$. El algoritmo que emplearemos considera los siguientes tres pasos, los cuales se repiten a partir de (2) tantas veces como nos interese, para aproximarnos al valor del número. El algoritmo va de la siguiente manera:

1. Tomamos la parte entera del número x , representada por $[x]$; en nuestro ejemplo, $[x] = 3$.
2. Hacemos $[x] = a_0$ y redefinimos x como $x = a_0 + x_0$; en nuestro ejemplo. $x = 3,17 = a_0 + x_0 = a_0 + 0,17$. Es decir que $x_0 = 0,17$.
3. Calculamos y representamos el recíproco de x_0 como $\frac{1}{x_0} = a_1 + x_1$ con $0 \leq x_1 < 1$. En nuestro ejemplo, $\frac{1}{x_0} = a_1 + x_1 = \frac{1}{0,17} = 5,88235294$; de lo que obtenemos $a_1 = [5,88235294] = 5$ y $x_1 = [0,88235294]$.

Repetimos el paso (2) para encontrar a_2 y x_2 , con las mismas condiciones. Obtenemos

$$a_2 = [1,133333] = 1 \quad \text{y} \quad x_2 = 0,133333.$$

Reiterando el proceso, obtenemos

$$a_3 = [7,50000] = 7 \quad \text{y} \quad x_3 = 0,5000001875.$$

El proceso puede continuar tanto como se quiera. En este caso, con los valores calculados, podemos escribir 3,17 como una fracción continua:

$$3,17 = 3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \dots}}}$$

Los valores consecutivos que resultan al calcular las primeras fracciones son: $3, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{115}{36}, \dots$ que convergen a 3,17. Una fracción continua se suele representar por los numeradores sucesivos que aparecen en el desarrollo. En nuestro ejemplo es $3,17 = [3; 5, 1, 7, \dots]$.

3.2.4. Fracciones continuas de números irracionales.

Courant, Robbins y Stewart [Cou96] retoman el tema de las fracciones continuas, ahora para números irracionales, y muestran los desarrollos para $\sqrt{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, e y $\frac{\pi}{4}$.

Como nota curiosa: la fracción continua asociada con el número de oro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se representa como $\phi = [1; 1, 1, 1, \dots]$, y tiene como sucesión de valores que convergen a ϕ las fracciones $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \dots$; en esta sucesión de fracciones observamos que los numeradores por un lado, y los denominadores por el otro, son números consecutivos de la sucesión de Fibonacci.

Para determinar la fracción continua cuyos valores sucesivos convergen a un número irracional se requiere del conocimiento de la naturaleza de ese número y de los valores ya calculados para él. Para el cálculo de $\log_2 3$, que sabemos es irracional, es requisito conocer su valor aproximado por medio de tablas de logaritmos, por ejemplo, y las propiedades de los logaritmos, en general.

Partiendo de que $\log_2 3 = z$ significa que buscamos el valor de z tal que $2^z = 3$, y calculando el logaritmo base 10 de ambos miembros de la última ecuación, resulta que

$$z = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Desde tiempo lejanos existen tablas con muchos decimales y muchas están disponibles en línea; en unas muy antiguas tablas de logaritmos conservadas como curiosidad [Hun10], encontramos que:

$$\log 3 = 0,4771, \quad \text{y} \quad \log 2 = 0,3010$$

de manera que

$$z = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,585049.$$

Utilizando el método recursivo para calcular la fracción continua asociada, obtenemos $[1; 1, 1, 2, 2, 3, 1, \dots]$. Por supuesto, con tablas de logaritmos más precisas la aproximación al número que nos interesa es gradualmente mejor.

La pregunta siguiente es sobre el origen de los logaritmos y cómo se construyeron tablas de logaritmos.

3.3. Logaritmos.

Una buena parte del conocimiento matemático más antiguo proviene, sin duda, de los matemáticos sumerios (situados en Babilonia, en lo que ahora es Irak). En lo que respecta a los logaritmos, O. Neugebauer [Neu69] señala que “hay mucha evidencia de las habilidades de los escribas del antiguo período babilónico, es el período que va de 1800 a 1600 antes de Cristo” –alrededor del reinado de Hammurabi–. Luego establece que “No solamente es claro de los problemas que tienen que ver con interés compuesto sino también de las tablas numéricas para las potencias consecutivas de números dados. Por otro lado, se tienen textos que tienen que ver con la determinación de los exponentes de números dados. En otras palabras, se había experimentado realmente con casos especiales de logaritmos sin alcanzar un uso general de esta función.”. Posteriormente, en las notas del capítulo 2 del libro señala que “Las tablas para α^n y las correspondientes a los logaritmos aparecen en documentos sumerios”, los cuales aparecen “ilustrados con fotografías, copias, transcripciones, traducciones y comentarios”, en dos de sus libros previos cuyos acrónimos son MKT y MCT.

Esos cálculos sumerios son alrededor de 1000 años anteriores a Pitágoras, de quien se sabe que viajó por tierras de Egipto, por lo menos. Si los conoció y utilizó o no en sus investigaciones sobre la música, particularmente, es algo que no sabemos. Los logaritmos, como los conocemos actualmente, se deben a John Napier –matemático, físico y astrónomo, quien vivió entre 1550 y 1617–, pero su historia se extiende desde Babilonia hasta Newton, y un número considerable de problemas interesantes y soluciones ingeniosas se pueden encontrar en el camino.

Tres elementos distintos pero no separables contribuyeron al descubrimiento de Napier: su conocimiento de la trigonometría y su trabajo como cartógrafo y astrónomo; cada uno de estos dominios de conocimiento, por sí mismo, merece atención para comprender la magnitud del descubrimiento de los logaritmos como regla general, y sus aplicaciones a cálculos trigonométricos con números muy grandes, como los resultados de las observaciones en astronomía la cual requiere del registro de datos precisos de manera continuada. Napier se benefició, además, de todo el conocimiento griego de Pitágoras a Euclides, incluyendo a Arquímedes, por supuesto, y del conocimiento algebraico desarrollado por los matemáticos islámicos y los europeos de los siglos que le anteceden. Particularmente, dice Itard [Ita84], “Recordemos que Nicolas Oresme ya utilizaba exponentes fraccionarios, que Chuquet utilizaba exponentes negativos y nulos”. Además, dice, fueron numerosos los matemáticos que establecieron la estrecha relación

entre las series aritmética y geométrica, particularmente Chuquet y Stifel.

Sin embargo fue Napier quien proporcionó al mismo tiempo una teoría sólida y un método práctico del cálculo de logaritmos. Su idea de la construcción de tablas de logaritmos era la de crear tablas que permitieran multiplicar números sin realizar realmente esa operación, sino utilizando la suma (de los logaritmos de los números). Napier construye sus tablas de logaritmos mediante la extracción sucesiva de raíces cuadradas abreviadas y con comentarios sensatos. La base de los logaritmos utilizada por Napier, sin embargo, no fue ni 10 ni e . Por alguna razón, dice Ian Stewart [Ste07], Napier escogió una razón ligeramente menor que 1, a saber 0,9999999, de esa manera, su sucesión geométrica iba recorriendo hacia atrás una serie de números de los muy grandes a los más pequeños. De hecho, continúa Stewart, “comenzó con 10,000,000 y entonces multiplicó por potencias sucesivas de 0,9999999. Si escribimos $Nap \log x$ para el logaritmo de Napier de un valor x , se tiene que

$$Nap \log 10,000,000 = 0, \quad Nap \log 9,999,999 = 1.$$

Y se satisface la ecuación

$$Nap \log(10^7 xy) = Nap \log(x) + Nap \log(y).$$

Posteriormente, después de visitar a Napier y con su acuerdo, Henry Briggs, un matemático británico, desarrolló nuevas tablas de logaritmos, haciendo que el logaritmo de la unidad fuera cero y que el de 10 fuera 1 y calculó los logaritmos vulgares o decimales de los primeros 31000 enteros, con una precisión de hasta 14 decimales, relata el mismo Itard [Ita84].

La construcción de las reglas de cálculo está basada en el conocimiento y uso de los logaritmos; la regla de cálculo fue un instrumento indispensable para los estudiantes de ciencias exactas todavía en 1980 e incluso para quienes estaban a cargo de controlar las misiones espaciales de la NASA, como puede observarse en la película *Apolo XIII* -de la que se hace un breve análisis en el Foro Histórico de las Telecomunicaciones [Foro]- y también en otras películas del mismo tema y situadas en esa época.

Pero el uso de los logaritmos no ha terminado. Con el cálculo surgió el estudio de las funciones logarítmicas y exponenciales, particularmente, las cuales se aplican en muchas situaciones actuales. Por ejemplo, en criptografía son de mucha utilidad los *logaritmos discretos*, es decir valores enteros k que satisfacen que $b^k = a$, para a y b reales; se dice entonces que $\log_b a = k$. Al final de su artículo, Antoine Joux y Cécile Pierrot [Joux16] dan cuenta del estado actual del estudio de los logaritmos discretos y los problemas que permanecen abiertos.

4. A modo de conclusión.

Hemos tirado de uno de los “hilos” presentados en la película *Donald en el país de las matemáticas* y lo hemos seguido grosso modo, hasta nuestros días. Aplicaciones, teóricas unas y aplicadas otras. ¿Qué resultaría si analizáramos un

poquito otra de las relaciones de las matemáticas con el resto de las artes, o con la naturaleza, o...? ¿Cuántas puertas iríamos abriendo?

Agradecimientos.

La autora de este muy sencillo texto agradece a la Sociedad Colombiana de Matemáticas, en conjunto con la Comisión de Equidad y Género y la Fundación Universitaria Konrad Lorenz, por su muy atenta y especial invitación a colaborar en este número del Paskín Matemático en apoyo de la divulgación de las matemáticas. Agradezco muy particularmente a la Dra. Isabel C. García por su atenta invitación y apoyo constante. Agradezco también a mis entrañables amigos, el Dr. César Cristobal Escalante, al Maestro Elías Loyola Campos y la Dra. Laura Acosta Torres por la lectura del borrador y sus recomendaciones.

Referencias.

- [Dis59] Walt Disney Studios. Donald en el país de las matemáticas. 1959. Disponible en <https://youtu.be/JOkVfu2FxpA>
- [Dio19] Diosques, N. (2019). Cédric Villani en Guanajuato, Conferencia - El Arte Vivo de Las Matemáticas - (Transcript) PDF. Entropía — Péndulo. En: <http://www.scribd.com/document/406603957/Cedric-Villani-en-Guanajuato-conferencia-El-arte-vivo-de-las-matematicas-Transcript-pdf>
- [Mar71] Martin, Henry. Las matemáticas y la música. Lecturas universitarias. Antología de matemáticas. Primera edición. Universidad Nacional Autónoma de México. Pág. 162-169. 1971.
- [Mar10] Martienau, J. et al. Quadrivium: The Four Classical Liberal Arts of Number Geometry Music and Cosmology. Wooden Books Ltd. 2010.
- [Boe09] Boecio. Sobre el fundamento de la música. Introducción, traducción y notas de Jesús Luque, Francisco Fuentes, Carlos López, Pedro R. Díaz y Mariano Madrid. Editorial Gredos SAU. p. 93-101. 2009. Disponible en https://kupdf.net/download/boecio-sobre-el-fundamento-de-la-musica-gredospdf_5a63d5aee2b6f54c41e54b04_pdf.
- [Fer09] Rafael Fernández de Larrinoa. El oído armónico. Clasificación de los intervalos. Blog. 2015. Disponible en <http://www.bustena.com/conceptos-previos/2-clasificacion-de-los-intervalos/>
- [Jea69] Sir James Jeans. Matemáticas de la Música en Sigma: el mundo de las matemáticas. Vol. 6. Editado por Newman, James R. Ediciones Grijalbo S.A. Barcelona. pp. 214-244. 1969.
- [Soc16] SocialMusik. La revolución del monocordio. <http://socialmusik.es/la-revolucion-del-monocordio>. 2016.
- [Mir15] Luis Miravalles. La 440. Historia de la electricidad en clave de salsa. Editores. Revista ACYEDE. Número 4. 2015. p. 50. Disponible en https://www.editores-srl.com.ar/sites/default/files/ac4_miravalles_la_440.pdf
- [Lan95] Language Research Foundation. Who Is Fourier?: A Mathematical Adventure. Transnational College of Lex. 1995. Nota bene: Una traducción al español, de Gutiérrez Sánchez, José Luis, fue publicada por la Dirección General de Publicaciones y Fomento Editorial de la UNAM con el título Aventuras con Fourier, en 2008.
- [Oll22] Juan Olalla. Entre88teclas. Afinación y mantenimiento del piano. Frecuencias de afinación del piano. 2022. <https://www.entre88teclas.es/el-piano/afinacion-y-mantenimiento-del-piano/15-frecuencia-sonido>.
- [Wikib] Quinta- Wikipedia, la enciclopedia libre. <https://es.wikipedia.org/wiki/Quinta>. 2022.
- [math16] mathAHA. A mathematical proof that every piano is out of tune. 2016. <https://youtu.be/PZxHX2wAF3U>
- [Cou96] Richard Courant, Howard Robbins and Ian Stewart. What is Mathematics. Second Edition. 1996. Oxford University Press.
- [Hun10] E.V. Huntington, Four Places Tables of Logarithms and Trigonometric Functions. Houghton Mifflin Company. The Riverside Press Cambridge. p. 16. 1910.
- [Neu69] O. Neugebauer. The Exact Sciences in Antiquity.. New York: Dover. 2nd ed., pp. 34, 44, 49, 51. 1969.
- [Ita84] Jean Itard. Essais d'histoire des mathématiques. Édité par Rušdi Hafni Rāšid. Paris. Librairie scientifique et technique Albert Blanchard. pp. 73-75. 1984.
- [Ste07] Ian Stewart. The Story of Mathematics: From Babylonian Numerals to Chaos Theory. Quercus. pp. 48-50 y 76-80.
- [Foro] Foro Histórico de las Telecomunicaciones. (Sin fecha de publicación). Disponible en <https://forohistorico.coit.es/index.php/multimedia/filmoteca/item/apolo-13>.
- [Joux16] Antoine Joux, Cécile Pierrot. Technical history of discrete logarithms in small characteristic finite fields: The road from subexponential to quasi-polynomial complexity. Designs, Codes and Cryptography, Springer Verlag, 2016, 78 (1), pp.73-85. Disponible en [https://hal.sorbonne-universite.fr/hal-01243676/file/Joux`2015`Technical`history.pdf](https://hal.sorbonne-universite.fr/hal-01243676/file/Joux%2015%20Technical%20history.pdf)

Acerca de la autora: Blanca Margarita Parra Mosqueda tiene una Licenciatura en Física y Matemáticas por el Instituto Politécnico Nacional de México, una maestría en Ciencias en Matemática Educativa por el CINVESTAV, México, y un doctorado en Didáctica de las Matemáticas por la entonces Facultad de Ciencias de París, ahora Universidad París-Diderot. Su interés se centra en el desarrollo de propuestas didácticas sobre matemáticas, orientadas a alumnos y docentes de todos los niveles, ejecutadas a través de cursos y talleres y el desarrollo de materiales. Sus pasatiempos son leer, conversar y cocinar.

CUADRILÁTERO CÍCLICOS Y OLIMPIADAS MATEMÁTICAS

Catalina M. Rúa-Alvarez^{*}
catalina.rua@udenar.edu.co

1. Introducción.

Las olimpiadas matemáticas son certámenes que se realizan tanto para motivar en los estudiantes el gusto por las matemáticas al presentar problemas que no son habituales en el aula de clase, como para identificar estudiantes que sobresalen en esta área e incluso falencias en ella, ver [DIP14]. Estos concursos han tenido gran acogida en las instituciones educativas para incentivar en los estudiantes el gusto por las matemáticas por las situaciones problema que plantean, dado que no son usuales y sus soluciones retan a los estudiantes desarrollar su ingenio y creatividad al intentar resolverlos.

Resolver un problema matemático, es un reto intelectual para quien lo enfrenta y se necesita de una serie de pasos o estrategias que guíen el camino hacia la solución, donde es necesario tener en cuenta los conocimientos y las habilidades. En el área de resolución de problemas matemáticos se resalta al matemático húngaro George Pólya, quien en su libro “Cómo plantear y resolver problemas”, publicado en 1965, propone los cuatro pasos de oro para la solución de problemas, aunque en la práctica no existe un método mecánico, ni una fórmula mágica que los resuelva y como afirma Santos en [San14]: “son etapas fundamentales en las que el uso de los métodos heurísticos desempeñan un papel importante”. Estos pasos son: comprender el problema, concebir un plan y ejecutarlo y finalmente, realizar una mirada retrospectiva.

La geometría es una de las áreas que hacen parte de los problemas a solucionar en olimpiadas matemáticas. En particular, en certámenes especializados en los cuales se reta a jóvenes talentos en esta área se explora el conocimiento de teoremas y relaciones matemáticas avanzadas que algunas en ocasiones no alcanzan a ser tratadas en la educación básica y media.

Problemas relacionados con cuadriláteros cíclicos se encuentran en estos concursos y por tal se quiere introducir al lector en este asunto, donde primero se presentarán algunos conceptos básicos y luego se incluyen problemas de diferentes olimpiadas matemáticas relacionados con este tema. Se recomienda ver [CÁC10] y [Cas19].

2. Marco teórico.

En esta sección se incluyen de forma breve algunos conceptos y teoremas básicos de geometría euclidiana elemental

que serán de utilidad en la solución de problemas relacionados con cuadriláteros cíclicos.

Primero, es importante aclarar la notación que será usada. Los puntos se denotarán con letras mayúsculas y las rectas con letras minúsculas o también se pueden definir por dos puntos que pertenezcan a ella y sean diferentes, por ejemplo una recta definida por los puntos A y B se denota como $\overleftrightarrow{AB}$. Además, se denotará el segmento AB como $\overline{AB}$ y cuando se trate de la medida del segmento, por abuso de notación, no se hará distinción alguna. Los ángulos se denotarán mediante tres puntos, de modo que el del medio corresponda al vértice y los otros dos puntos estén sobre los lados que definen el ángulo. El símbolo que se emplea para ángulo es $\angle$, y cuando se trate de la medida tampoco se realizará algún cambio. Por último, las relaciones de congruencia de ángulos simplemente se denotan con igualdad.

Se han asumido conceptos básicos de congruencia entre ángulos formados por el corte de rectas transversales o paralelas como son ángulos alternos internos, alternos externos, correspondientes, opuestos por el vértice, colaterales, suplementarios, entre otros. De igual forma, se aceptan como conocidas la clasificación de triángulos según sus lados o sus ángulos, además de las definiciones básicas relacionadas a ellos (altura, mediana, bisectriz, mediatriz, etc). Algunos textos para profundizar más sobre estos temas son [Hem03] y [Mor07].

La relación de congruencia de triángulos se denota con $\cong$ y el símbolo para denotar semejanza es $\sim$. Por ejemplo, en la Figura 1, se supone que el lado $\overline{AC}$ es paralelo al lado $\overline{DE}$ y por lo tanto se tiene que $\triangle ABC \sim \triangle DEB$.

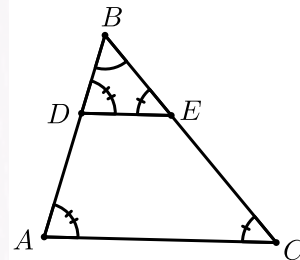


Figura 1: Triángulos semejantes.

De esta semejanza, se concluye que los ángulos correspondientes son congruentes y que para una constante positiva k , se tiene la relación de proporcionalidad dada por

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = k. \quad (1)$$

^{*}Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de Nariño

Los criterios de congruencia entre dos triángulos se denotaron así: Ángulo-Lado-Ángulo (A-L-A), Lado-Ángulo-Lado (L-A-L) y Lado-Lado-Lado (L-L-L). Por otro lado, para los criterios de semejanza de triángulos se tiene: Ángulo-Ángulo (A-A), Lado-Lado-Lado (L-L-L) y Lado-Ángulo-Lado (L-A-L).

Adicionalmente, se resaltan componentes teóricos referentes los ángulos centrales e inscritos en una circunferencia. Los *ángulos centrales*, son aquellos formados por dos radios de una circunferencia, donde el vértice del ángulo es el centro de la circunferencia y los *ángulos inscritos* son aquellos formados por dos cuerdas o un diámetro y una cuerda, que tienen un punto común sobre la circunferencia. A continuación se describen relaciones importantes de estos ángulos.

Teorema 2.1. *Si dos ángulos inscritos en una circunferencia abren el mismo arco, entonces son congruentes.*

Teorema 2.2. *La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo central que abre el mismo arco.*

Ahora se resalta la propiedad de la barquilla que relaciona una circunferencia con rectas tangentes a ella desde un punto exterior.

Teorema 2.3 (Propiedad de la Barquilla). *Si se trazan dos rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior, entonces los segmentos de recta desde ese punto exterior a los puntos de tangencia son congruentes y el centro de la circunferencia está en la bisectriz del ángulo entre las rectas.*

También se presenta la definición de la potencia de un punto, la cual está relacionada con la distancia de un punto, con el centro de una circunferencia y su radio. Ver [Cac10] y [Cas19].

Definición 2.1 (Potencia de un punto). *La potencia de un punto P con respecto a una circunferencia con centro en O y radio r se define como $\left|(\overline{PO})^2 - r^2\right|$.*

Note que si P se encuentra sobre la circunferencia, la potencia es cero debido a que $\overline{PO} = r$. Además, como se muestra en la Figura 2, si el punto P está en el exterior de la circunferencia y A y B son puntos en la intersección entre la recta $\overleftrightarrow{PO}$ y la circunferencia, entonces

$$\left|(\overline{PO})^2 - r^2\right| = (\overline{PO} + r)(\overline{PO} - r) = \overline{PA} \cdot \overline{PB}.$$

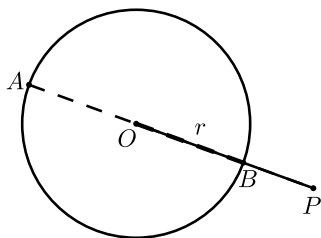


Figura 2: Potencia de un punto P fuera de la circunferencia.

Para finalizar el referente teórico básico, se recuerdan los cuadriláteros como un grupo especial de polígonos, los cuales son figuras geométricas cerradas formadas por la unión de cuatro segmentos que se encuentran en un mismo plano, llamados *lados*, y los puntos donde se intersectan son los *vértices*. Para la notación se usan los cuatro vértices que conforman cada cuadrilátero. Se usan en este trabajo cuadriláteros *convexos* en los cuales sus ángulos internos son menores a 180° y la suma de sus ángulos internos es 360° y se clasifican en paralelogramos, trapecios y trapezoides. Mayor información en [Hem03] y [Mor07].

3. Cuadriláteros cíclicos.

Hay relaciones entre circunferencias y triángulos que usualmente se trabajan en el aula de clase, como por ejemplo que con ayuda del circuncentro todo triángulo se puede inscribir en una circunferencia. Sin embargo, lo anterior no es válido para todo cuadrilátero dado que por tres puntos pasa una única circunferencia pero el cuarto punto no necesariamente pertenecerá a la circunferencia, ver en la Figura 3 que el cuadrilátero $ABCD$ cumple esta propiedad, pero el cuadrilátero $EFGH$ no la satisface. Los cuadriláteros que cumplan esta relación se podrían reflexionar con los estudiantes, cuestionando sus características y propiedades. A estos cuadriláteros se los conoce como cíclicos y dedicaremos a ellos esta sección.

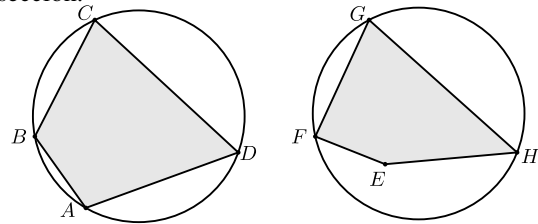


Figura 3: Ejemplo de Cuadrilátero cíclico y no cíclico.

Definición 3.1 (Cuadrilátero cíclico). *Un cuadrilátero que se puede inscribir en una circunferencia, es un cuadrilátero cíclico.*

A continuación se presentan algunas caracterizaciones que permiten determinar cuadriláteros que se pueden inscribir en una circunferencia. La demostración de estos teoremas se encuentra en [Cas19].

Teorema 3.1. *Un cuadrilátero es cíclico si y solo si tiene un par de ángulos opuestos suplementarios.*

De este teorema se concluye que son cuadriláteros cíclicos los rectángulos y en particular los cuadrados.

Teorema 3.2. *Un trapecio es un cuadrilátero cíclico si y solo si es isósceles.*

La demostración del Teorema 3.2 es una aplicación del Teorema 3.1, ángulos suplementarios y la congruencia de ángulos de la base en trapecios isósceles. Ahora se da una caracterización que relaciona lados, diagonales y ángulos.

Teorema 3.3. *Un cuadrilátero es cíclico si y solo si el ángulo formado por un lado y una diagonal es congruente al ángulo formado por el lado opuesto y la otra diagonal.*

Ahora se caracterizan los cuadriláteros cíclicos a través de las longitudes de sus lados y sus diagonales donde se puede concluir una relación con la Definición 2.1 de potencia de un punto. Esta caracterización se hace siguiendo la información en la Figura 4.

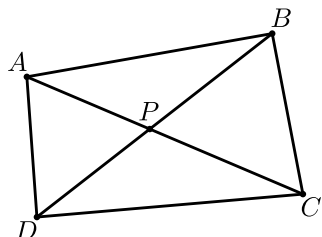


Figura 4: Cuadrilátero $ABCD$ con diagonales.

Teorema 3.4. *Si $ABCD$ es un cuadrilátero tal que sus diagonales se intersectan en P , entonces $ABCD$ es cíclico si y solo si $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$.*

Note que en el Teorema 3.4 $\overline{PA} \cdot \overline{PC}$ y $\overline{PB} \cdot \overline{PD}$ corresponden a la potencia del punto P con respecto a la circunferencia que contiene a los puntos A, B, C y D , y se concluye que esta es constante, es decir que no depende de los puntos de intersección entre la recta que pase por P y la circunferencia.

Por último, en el teorema a continuación la caracterización se hace teniendo en cuenta un punto exterior al cuadrilátero cíclico. Nuevamente se resalta la relación con la potencia de un punto.

Teorema 3.5. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que dos lados opuestos se cortan en P . Entonces $ABCD$ es cíclico si y solo si $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.*

4. Aplicación.

Olimpiadas matemáticas como la Olimpiada Internacional de Matemáticas (International Mathematical Olympiad - IMO)¹ que actualmente es una de las competencias matemáticas más importantes del mundo, incluyen en los problemas para ser resueltos por sus participantes algunos relacionados con cuadriláteros cíclicos. Otras olimpiadas, también han propuesto problemas con esta temática, lo que conlleva a la importancia en prepararse también en este tópico cuando se quiere participar en estos certámenes avanzados.

Entre más problemas se resuelvan, mayor es la experiencia adquirida, se generan más ideas de solución y especialmente se acepta tranquilamente que hay momentos en que la solución no se nos ocurre de inmediato. Es importante no desistir en la búsqueda de solución de un problema y persistir, luego se tendrá la satisfacción al encontrar un camino que pueda llevar a la solución. Por tal motivo el interés a continuación

es presentar la solución a un par de problemas y motivar a continuar practicando con otros problemas.

Se recomienda el uso del software de geometría dinámica GeoGebra, ver [Hoh18]. Una de las formas en las que puede ser usado es para hacer las gráficas y al permitir que los objetos geométricos se muevan si las construcciones se realizan de forma robusta, es posible generar una intuición sobre el entendimiento de los problemas y con ello hasta de la solución. Adicionalmente, con la aplicación del software se pueden hacer nuevos problemas e incluso conjeturar o generalizar problemas propuestos en olimpiadas como sucede en [Cas19].

Problema 1 (Tomado de [CÁC10]). *Sean $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ las alturas de un triángulo ABC y H su punto de intersección. Demostrar que los cuadriláteros $AEHF$, $CDHE$, $BDHF$, $BCEF$, $ACDF$ y $ABDE$ son cíclicos (ver Figura 5).*

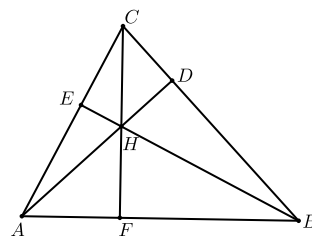


Figura 5: Alturas del triángulo ABC .

Solución. Dado que $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son alturas del triángulo ABC , entonces $\angle AEH = 90^\circ$ y $\angle HFA = 90^\circ$, respectivamente, así por el Teorema 3.1, el cuadrilátero $AEHF$ es cíclico. Análogamente, se tiene que los cuadriláteros $CDHE$ y $BDHF$ son cíclicos. Además, como $\angle BEC = 90^\circ$ y $\angle BFC = 90^\circ$ por el Teorema 3.3, el cuadrilátero $BCEF$ es cíclico. De manera análoga, se comprueba que los cuadriláteros $ACDF$ y $ABDE$ son cíclicos.

Problema 2 (Tomado del Canguro Matemático², año 2005, nivel 2). *En la Figura 6, $ABCD$ es un trapecio inscrito en una circunferencia, ¿cuánto mide el ángulo $\angle DAB$?*

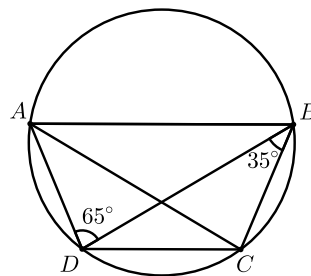


Figura 6: Figura del Problema 2.

Solución. Observe que los ángulos $\angle DAC$ y $\angle DBC$ abren el mismo arco, de donde por el Teorema 2.1 $\angle DAC = 35^\circ$. Análogamente, $\angle BCA = 65^\circ$ al subtender el mismo arco que $\angle BDA$. Por otro lado, como el trapecio $ABCD$ está inscrito en la circunferencia entonces es cíclico y por el Teorema 3.2

¹<http://www.imo-official.org>

²<http://www.canguromat.org.es>

es un trapecio isósceles, de donde los ángulos de la base son iguales y así $\angle ACD = \angle CDB$. Luego, teniendo en cuenta que la suma de la medida los ángulos internos de un triángulo es 180° , se tiene que $\angle CDB + \angle DBC + \angle BCA + \angle ACD = 100^\circ + 2\angle CDB = 180^\circ$ y así $\angle CDB = 40^\circ$. Finalmente, $\angle CAB = 40^\circ$ por abrir el mismo arco que $\angle CDB$ y así, se concluye que $\angle DAB = \angle DAC + \angle CAB = 35^\circ + 40^\circ = 75^\circ$.

Se resalta que la solución de un problema no es única y según los conocimientos, habilidades y experiencia, la solución se puede obtener por un camino diferente. Por ejemplo en el anterior problema se puede usar ángulos alternos, internos dado que $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son paralelos, incluso se pueden aplicar otros de los teoremas que se mencionaron, ver la solución en [Cas19]. El interrogante que interesa es, ¿cuál es tu forma de solución?

Problema 3 (Tomado de [CÁC10]). *Suponga que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos cuerdas perpendiculares de una circunferencia y sea E su punto de intersección. Si $\overline{AE} = 2$, $\overline{EB} = 6$ y $\overline{ED} = 3$, determine el diámetro de la circunferencia.*

Solución. Como el cuadrilátero $ACBD$ es cíclico, por el Teorema 3.4, se tiene que $\overline{CE} \cdot \overline{ED} = \overline{AE} \cdot \overline{EB}$. Luego al reemplazar los datos dados en la hipótesis, se concluye que $\overline{CE} = 4$. De esta manera $\overline{CD} = \overline{CE} + \overline{ED} = 7$. Sea O el punto de intersección de la mediatriz de $\overline{AB}$ y de $\overline{CD}$, siendo este el centro de la circunferencia (ver Figura 7).

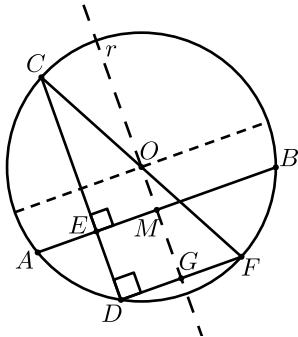


Figura 7: Construcciones auxiliares del Problema 3.

Luego, se traza la recta $\overleftrightarrow{CO}$ que intersecta a la circunferencia en F determinando el diámetro $\overline{CF}$ y se considera el $\triangle CDF$. Observe que por el Teorema 2.2, el ángulo $\angle FDC$ es recto. Ahora, se traza la recta r paralela a $\overline{CD}$ por O , la cual corta a $\overline{DF}$ en G . Ahora como $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es paralela a r , entonces r es perpendicular a $\overline{AB}$. Sea M el punto de corte de r con $\overline{AB}$. Además como r pasa por O , entonces r biseca a $\overline{AB}$, así M es el punto medio de $\overline{AB}$. Luego, como $\overline{AB} = 8$ y $\overline{AE} = 2$, entonces $\overline{EM} = 2$. Como los segmentos paralelos comprendidos entre rectas paralelas son congruentes entonces $\overline{DG} = 2$, pero como O es el punto medio de $\overline{CF}$ entonces G es el punto medio de $\overline{DF}$, de donde $\overline{DF} = 4$. Así, aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo CDF , se tiene que $(\overline{CF})^2 = 7^2 + 4^2$. De esta manera, la longitud del diámetro $\overline{CF}$ es $\sqrt{65}$.

Se destaca que el anterior problema, a diferencia de los otros, no incluye en el enunciado un cuadrilátero inscrito en

una circunferencia. Pero en la solución del problema se aplicaron las propiedades de los cuadriláteros cíclicos. Incluso, este último problema no incluía figura como sucede en muchos problemas de olimpiadas. En casos en los cuales se evidencian los cuadriláteros cíclicos bien sea en el enunciado o en una figura dada, se pueden aplicar los teoremas que se indicaron. Se sugiere complementar los conceptos al investigar sobre los teoremas de Ptolomeo y de Brahmagupta, en los cuales para su demostración el uso de semejanza de triángulos es indispensable.

Es posible que surja la pregunta, ¿se han usado todos los preliminares teóricos dados?. Si se observan las citas de teoremas en la solución de problemas se pueden concluir que las respuesta es que no todos se han utilizado. Sin embargo, se debe tener en cuenta que no fueron incluidas las demostraciones de ellos y además, se resalta que esos conceptos y otros que no fueron incluidos son importantes para enfrentarse a la solución de problemas. Nuevamente se alienta a realizar estas demostraciones y a practicar con los cuadriláteros cíclicos solucionando los siguientes problemas.

Problema 4 (Tomado de [Cas19]). *En Cumbal, Nariño, se encontró tallado sobre la piedra de los Machines el Sol de los Pastos, el cual es un símbolo místico ancestral de los indígenas de la región y tiene como característica interesante que los triángulos que lo componen son congruentes. Un investigador desea determinar el radio de la circunferencia que inscribe el Sol de los Pastos, para ello usó datos encontrados en un manuscrito, los cuales se observan en la Figura 8. Ayuda al investigador a encontrar el radio de la circunferencia.*

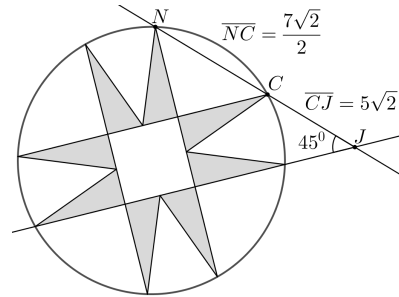


Figura 8: Datos presentes en manuscrito.

Problema 5 (Tomado de [CÁC10]). *El triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia. P es un punto sobre el arco que va desde B hasta C . Probar que $\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{PC}$.*

Problema 6 (Tomado de IMO, año 2004). *En un cuadrilátero $ABCD$ la diagonal $\overline{BD}$ no biseca a $\angle ABC$ y $\angle CDA$. El punto P está dentro de $ABCD$ y satisface $\angle PBC = \angle DAB$ y $\angle PDC = \angle BDA$. Probar que $ABCD$ es cíclico si y solo si $\overline{AP} = \overline{CP}$.*

Problema 7 (Tomado de IMO, año 2017). *Sean R y S puntos diferentes de la circunferencia C_1 tal que $\overline{RS}$ no es un diámetro. Sea l la recta tangente a C_1 por R . El punto T es tal que S es el punto medio del segmento $\overline{RT}$. El punto J se escoge en*

el arco más corto de RS . La circunferencia C_2 que inscribe al triángulo JST intersecta a l en dos puntos distintos. Sea A el punto de intersección de C_2 y l más cercano a R . La recta $\overleftrightarrow{AJ}$ intersecta a C_1 en K . Pruebe que la recta $\overleftrightarrow{KT}$ es tangente a C_2 .

Problema 8 (Tomado de IMO, año 2020). Considere el cuadrilátero convexo $ABCD$. El punto P está en el interior de $ABCD$. Asuma las siguientes igualdades de razones:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Demuestre que las siguientes tres rectas concurren en un punto: la bisectriz interna del ángulo $\angle ADP$, la bisectriz interna del ángulo $\angle PCB$ y la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Para un lector curioso, se incentiva a ver en la pestaña «Problemas» de la página de la IMO en el año 2020. En esta se encuentra el pdf de todos los problemas propuestos por las delegaciones participantes en esta versión de la olimpiada. En este archivo busque la palabra *cyclic* y encontrará problemas propuestos sobre cuadriláteros cíclicos, incluso encontrará soluciones donde en el enunciado del problema no se mencionan cuadriláteros pero es posible usar esta estrategia en la solución.

Agradecimientos.

Este trabajo hace parte de los resultados presentados en el trabajo de grado «Los cuadriláteros cíclicos como herramienta en la resolución de problemas» realizado por Deiby Castillo y Katherine Paz, bajo la asesoría de Luis F. Cáceres y la coasesoría de Catalina Rúa-Alvarez, en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño y luego publicado en [Cas19]. Agradezco a los coautores por su dedicación y apoyo, especialmente al profesor Cáceres quien fue el principal inspirador para investigar este tema.

Referencias.

- [Cas19] Deiby Castillo, *Los cuadriláteros cíclicos como herramienta en la resolución de problemas*, Editorial Universidad de Nariño, 2019.
- [Hem03] Edwin Hemmerling, *Geometría elemental*, México D.F., México: Limusa, 2003.
- [Pól65] George Pólya, *Cómo plantear y resolver problemas*, México D.F., México: Trillas, 1965.
- [DIP14] José De la Peña et al., *Mathematics in Latin America and the Caribbean: Challenges and opportunities*, Recuperado de <https://blog.wias-berlin.de/imu-news/files/2014/07/LAC-Report.pdf>, 2014.
- [San14] Luz Manuel Santos, *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*, México D.F., México: Trillas, 2014.
- [Cac10] Luis Cáceres, *Congruencia, semejanza y concurrencia*, Mayagüez, Puerto Rico: OMPR, 2010.
- [Mor07] María Morfín, *Geometría* (4 ed.), México D.F., México: McGraw-Hill, 2007.
- [Hoh18] Markus Hohenwarter et al., *GeoGebra 5.0.507.0.*, Recuperado de <http://www.geogebra.org>, 2018.

Acerca de la autora: Catalina Rúa es Matemática de la Universidad de Antioquia. Realizó estudios de Maestría en Computación Científica en la Universidad de Puerto Rico Recinto Mayagüez y Doctorado en Matemática Aplicada en el Instituto de Matemáticas y Estadística de la Universidad de São Paulo, Brasil. Además, de gustarle la simulación computacional y los métodos numéricos, le encanta la resolución de problemas de olimpiadas matemáticas de los cuales aún hay muchos que continua pensando cómo determinar su solución y le gustaría que le compartas tus ideas.

MateKuento



Perfectamente imperfecta

Y es que estoy segura de que cambiar la cultura para que nos acepten como mujeres en la ciencia es una tarea trascendental en comparación con los otros logros menores que he obtenido a lo largo de mi vida...

ustedes los que leen esto. Me gustaba el deporte, me gustaba estudiar, me gustaban las matemáticas..., bueno, me gustaban casi todas las cosas.



Ilustración César Mejías

Hola, soy Karen, quizá no me conozcan por mi nombre, pero sí porque aparezco en algunos libros de la forma "K.Uhlenbeck", la mayoría de personas creen que esta letra al lado de mi apellido es por algún nombre masculino, pero para gran sorpresa, no lo soy.

Nací hace varios años, específicamente en 1942 y creo que fui afortunada porque tanto mi padre como mi madre pertenecieron a la primera generación en mi familia con estudios universitarios, mi madre era una gran artista y mi padre ingeniero, se caracterizaban porque los dos siempre estuvieron de acuerdo en que sus hijos debían tener una educación superior (me refiero a poder seguir estudiando cuando saliera del colegio).



El único problema que encontraba en todo esto es que la mayoría de las personas no pensaban igual que mis padres, por ejemplo, si tenía una carrera siempre alentaban más a los hombres que a mí y me decían que ellos iban a ganar porque eran más fuertes, eso no era justo ¿Por qué a las niñas nos decían que debíamos aprender a perder y a ellos no?, bueno quizá esto solo ocurría en las carreras así que lo deje pasar...

Cuando crecí un poco más, encontré en las cosas de mi padre unos libros de física y matemáticas que me encantaron, eran muy interesantes, aprendí que había diferentes infinitos y un montón de cosas que creía inexplicables, tanto así que empecé a leer muchos y muchos libros más.



Así que desde pequeña mi familia me alentó a hacer todo lo que quisiera, decían que yo podía con todo, así como



Ya mayor fui a la universidad tal como mis padres lo propusieron desde un inicio, decidí estudiar física, pero luego encontré aún más fascinante el estudio de las matemáticas (además de que me gustaba trabajar sola y yo creí que las matemáticas eran así), en fin, me gradué y era reconocida por

tener muy buenas calificaciones. Sin embargo, cuando volví a estudiar me di cuenta de que en el programa de posgrado que aspiraba había muchas mujeres, y aunque no fui gran amiga de ninguna de ellas era evidente que todos pensaban que no iban a progresar en matemáticas si te juntabas con ellas, bueno, con nosotras, nos decían que no podíamos hacer matemáticas y eso hacía que nuestros compañeros tuvieran una tendencia a no ser amables con las mujeres, en realidad no puedo pensar en una mujer matemática para quien la vida haya sido fácil, los esfuerzos heroicos tienden a ser la norma en este campo, quiero decir que soy reconocida por haber ganado un premio Abel “El nobel de las matemáticas” pero otorgar el premio a una mujer no sería noticia si viviéramos en condiciones de igualdad, nunca me di por vencida, siempre me esfuerzo en lo que me gusta y agradezco a la lucha feminista por haber ayudado tanto a mejorar las condiciones laborales y sociales.

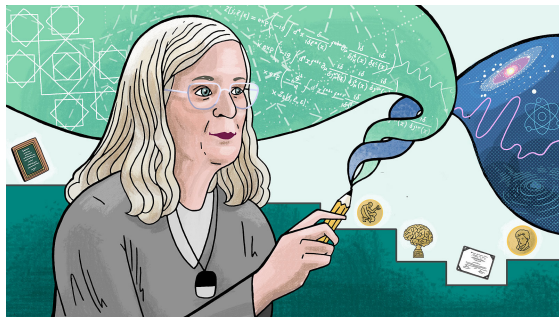


Ilustración de Sandbox Studio, Chicago con Corinne Mucha

Mi nombre es Karen Uhlenbeck investigadora en el campo de las ecuaciones en derivadas parciales, la geometría diferencial y las aplicaciones a la física matemática, soy considerada una de las fundadoras del análisis geométrico, soy la primera

mujer en ganar un premio Abel, me caracterizo por denunciar las dificultades que he tenido por el hecho de ser mujer, soy consciente de que soy un modelo para las mujeres jóvenes en el campo de las matemáticas. Y, en parte, por eso estoy aquí. Sin embargo, es difícil ser un modelo, porque lo que realmente tienes que hacer es mostrar a los estudiantes que una persona imperfecta puede triunfar y me considero una persona imperfecta para con estas palabras derribar el mito en que las matemáticas solo están destinadas a personas con dones especiales.



Ilustración de Pictoline

Sofía Neiva Monsalve

sofia.neivam@konradlorenz.edu.co

Acerca de la autora: Sofía Neiva Monsalve es estudiante del programa de matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Es auxiliar de investigación en su campo y simultáneamente profesora particular de matemáticas. Se ha interesado por la educación matemática para cambiar las malas creencias ante esta rama. Le apasiona la música, el baile y el tiempo de calidad con su familia.

K' Problema

En el marco del primer encuentro mundial de mujeres en matemática, se presentó la iniciativa de que el 12 de Mayo de cada año se celebre el día de la mujer en la matemática. Esta fecha no es aleatoria, se ha elegido este día en conmemoración a Maryam Mirzakany, primera y hasta la fecha única mujer en ser galardonada con la medalla Fields. Pero...¿para qué dedicar un día a hablar de las mujeres en la matemática? ¿existe acaso un problema que se deba afrontar? Si bien es cierto que en la gran mayoría de departamentos de matemáticas predomina el género masculino, no es por falta de oportunidades, es por un desinterés de ellas en las ciencias, en general, ¿o no es esto cierto?

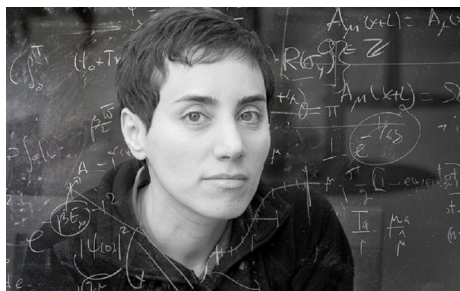


Figura 1: Maryam Mirzakany.

Para responder a lo anterior, volvamos en el tiempo. Si preguntas por Euler, Gauss, Newton, Hilbert, Riemann, en gran medida serán recordados como grandes matemáticos, sin importar el área de interés. Si nos remontamos aún mas atrás en el tiempo, vendrán a nuestra mente nombres como Euclides, Pitágoras, Tales. El común denominador de los nombres anteriormente dichos es que todos son hombres. ¿Es por tanto, la matemática, que casualmente tiene en español género femenino, un tema de hombres? La respuesta es **no**. A lo largo de la historia las mujeres hemos debido soportar el mito de que no estabamos hechas para esto, asumiendo que los hombres tiene una habilidad natural para las ciencias exactas.

Si recorremos la historia, podemos comenzar hablándote de Hypatia [11], considerada la primera mujer científica, gracias a que su padre, filósofo y matemático, se preocupó por su educación algo extraño para la época en la que vivían. Escribió sobre teoría de números, secciones cónicas y órbitas planetarias. Infortunadamente murió a causa de esos tantos choques entre ciencia y religión. Es triste saber que entre Hypatia y las otras mujeres matemáticas de las que se saben, han pasado al menos diez siglos.

Te pido que me dejes contarte sobre Sofia Kovalevskaya, científica escritora, feminista, nihilista, revolucionaria y

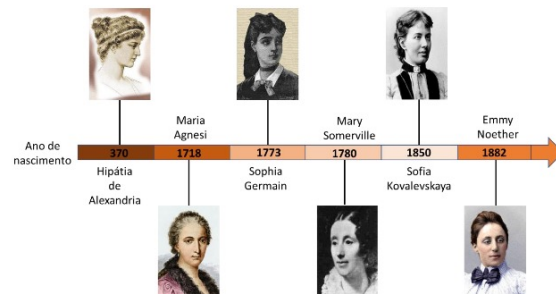


Figura 2: Mujeres matemáticas, imagen tomada de [1].

también mi matemática favorita, nacida en la Rusia del siglo XIX¹. Decidida a desarrollar una carrera científica Kovalévskaya se casa a los 18 años con Kovalevski pues Rusia no daba pasaportes a mujeres solteras. Se doctoró bajo la mano del gran analista Weierstrass, realizando tres trabajos de investigación:

- Sobre la teoría de ecuaciones en derivadas parciales.
- Suplementos y observaciones a las investigaciones de Laplace sobre la forma de los anillos de Saturno.
- Sobre la reducción de una determinada clase de integrales abelianas de tercer orden a las integrales elípticas.

Aunque su aporte más conocida es el teorema de Cauchy-Kovalevskaya[5]. Fue la **primera** mujer en obtener una posición como profesora universitaria en Europa, hecho que no gustó en la sociedad de la época, tanto así que el dramaturgo Strindberg escribió en un periódico lo siguiente:

“Que una mujer sea profesora de matemáticas es un fenómeno perjudicial y desagradable, en efecto, e incluso se podría llamar monstruoso. La invitación de esta mujer a Suecia, cuando sobran profesores varones que superan con creces sus conocimientos, solo puede explicarse por la cortesía que los suecos tienen hacia el sexo femenino.”

Así una mujer no puede obtener algo, o llegar a cierta posición si no es porque en su camino académico un hombre se apiadó de ella y la ayudó a continuar.

Pero bien esto aquí aún no termina. ¿Cómo te sentirías si aunque seas considerada como la mujer más importante en la historia de la matemática no consigues un puesto digno sólo por tu género? Pues bien esto le ocurrió a Emmy Noether. Después de su muerte, en el obituario del New York Times, Einstein escribe lo siguiente sobre ella: “A juicio de los

¹En su obra autobiográfica [7], Sofía comparte un relato de su fascinante vida.

matemáticos vivos más competentes, Fräulein Noether fue el genio creativo matemático más significativo producido hasta ahora desde que comenzó la educación superior de las mujeres. En el campo del álgebra, en el que los matemáticos más talentosos han estado ocupados durante siglos, descubrió métodos que han demostrado ser de enorme importancia en el desarrollo de la joven generación actual de matemáticos. La matemática pura es, a su manera, la poesía de las ideas lógicas.”

El Teorema de Noether[5] es un resultado reconocido en la física teórica pues permite a los físicos obtener cantidades conservadas de simetrías de las leyes de la naturaleza. Infortunadamente para ella, fue una adelantada a su época, su principal problema, ser mujer en la Alemania nazi de los años treinta. Sus aportes se realizaron principalmente de forma anónima e impartió clase de manera semiclandestina. Llegó a trabajar en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, aunque en palabras de ella no fue bien admitida en una universidad de hombres.

Ahora, amigo lector, me dirás que eran otras épocas, que la revolución femenina permite que hoy en día existan profesoras, investigadoras, que prácticamente somos libres de elegir nuestro camino, puedes escoger tu profesión, aunque mejor si te dedicas a las humanidades, a las ciencias sociales, porque la ciencia no es un juego de chicas. Los imaginarios sociales y los roles asignados tanto a mujeres como a hombres tienen implicaciones profundas sobre las formas de actuar; aún existe una brecha basada en género, una diferencia, ya que infortunadamente las mujeres no gozamos de las mismas oportunidades que los hombres para desarrollar una profesión científica y progresar en ella. Hay datos al respecto y son muy claros, en ellos se observa que conforme se avanza hacia puestos más altos en los escalafones académicos o profesionales, la proporción de mujeres va siendo cada vez menor.

En el informe [13] de la UNESCO, se muestra que a pesar de que actualmente hay más niñas escolarizadas que antes, éstas no se benefician de igual manera que los niños de las oportunidades para completar sus estudios. Los prejuicios, las normas sociales y los estereotipos negativos afectan el desarrollo académico de muchas niñas y mujeres. Dicha diferencia se marca aún más en las disciplinas de ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM, por sus siglas en inglés) y, en consecuencia, en las carreras vinculadas a éstas.

En [2] la autora muestra como en Brasil cerca del 42% de los que ingresaron al pregrado en Matemáticas en 2014 fueron mujeres. Entre los graduados, el porcentaje de mujeres aumenta a alrededor del 48%. Mientras que en estudios de maestría el porcentaje de mujeres graduadas desciende a alrededor del 27% y a 24% en estudios de doctorado. En el ámbito investigativo la diferencia es aún más marcada, donde las mujeres poseen solo el 13% de las becas de investigación otorgadas por el CNPQ.

En Colombia la situación no es tan diferente. 1937 es el año en que Mariana Arango se convierte en la primera Colombiana en obtener título profesional. “Hacia mediados de la década del sesenta el número de mujeres graduadas en las

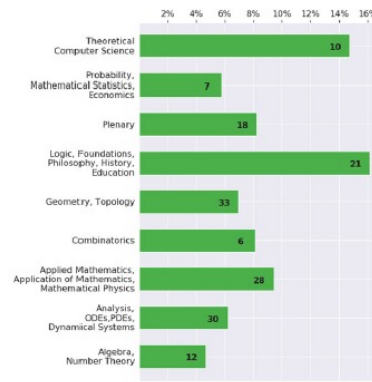


Figura 3: Porcentaje de charlas dadas por mujeres en el ICM desde 1970. Tabla tomada de [8].

universidades colombianas había aumentado apreciablemente y en forma continua: de seis que obtuvieron sus títulos en 1938, a 232 en 1955 y a 915 en 1965”, según explica [3]. Desde entonces, las mujeres han ido conquistando derechos a nivel global, y en el contexto colombiano los avances, aunque lentos, también se han ido incorporando, [4]. Según una encuesta del MinTIC realizada en el 2018[9], solo el 43% de las adolescentes entrevistadas ha pensado estudiar una carrera STEM, de donde un 52% de las jóvenes que no estudian estas carreras no lo hacen porque “son carreras para hombres” o porque “a mis padres no les gusta”, así se verifica la existencia de estereotipos asociados a la academia especialmente en nuestra sociedad Colombiana.

Como explica Carolina Brech en [2], una comunidad predominantemente masculina implica un “ sesgo de género inconsciente”: la vida cotidiana nos transmite subliminalmente, tanto para hombres como para mujeres, la idea de que la Matemática es un espacio masculino y condiciona inconscientemente a las mujeres matemáticas a buscar un cierto reconocimiento de sus pares, por ejemplo, llegar a obtener un reconocimiento tal como ser expositora en el Congreso Internacional de Matemáticas(ICM por sus siglas en inglés). Un interesante trabajo sobre la participación femenina en el Congreso Internacional de Matemáticos (ICM por sus siglas en inglés) fue realizado por [8], en este ensayo las autoras utilizan diversas fuentes de datos para seguir las huellas de las mujeres en el ICM, de este trabajo se ha tomado la figura 3.

Conclusión.

Para encontrar una solución a esta situación es importante primero entender que de verdad existe un problema, que los factores sociales, especialmente en Colombia, nos llevan a tener una educación básica con sesgo de género[6]. La falta de modelos, combinada con una sensación de soledad (en alguno que otro congreso fui la única mujer en la sala) junto con la dificultad de acoplar la vida personal y profesional hacen que muchas mujeres desistan de una posible carrera científica.

Sueño con el día en que la matemática, para mi la más bella

de las ciencias, sea un entorno en el que se valore a la persona, donde el trabajo duro, el compromiso y la pasión por lo que se hace te permita desarrollar un camino científico.

Finalmente, recomiendo al lector interesado el trabajo de Sánchez [12], donde la autora presenta a las primeras colombianas que obtuvieron un doctorado en matemáticas; compartiendo la historia de vida de algunas de ellas. Así como invito a ver el video de youtube (<https://www.youtube.com/watch?v=QQh3HG9tNs4>) de un foro sobre Las matemáticas colombianas presentado también por la profesora Sánchez.

Así también recomiendo el video documental **Journeys of Women in Mathematics** creado por IMU Committee for Women in Mathematics, donde se muestra las dificultades y los triunfos de tres mujeres matemáticas de continentes diferentes.

Dedico este escrito de manera especial a cada una de esas mujeres que he conocido en mi caminar académico, desde la profesora que me recibió en mi pregrado hasta aquella que me doctoró, pasando por mis amigas compañeras de estudio, a mis colegas de trabajo, a mis estudiantes, a cada mujer que me escuchó y que escuché, a cada una de ustedes apasionadas como yo por lo que hacen, mi cariño y respeto. Y no olviden la matemática tiene género femenino.

“Las niñas son capaces de hacer todo lo que los hombres son capaces de hacer”.

Katherine Johnson

Referencias.

- [1] de Assis, E. S. (2020). As relações de gênero na licenciatura em matemática. Revista Binacional. Brasil-Argentina: Diálogo entre as ciências, 9(1), 54-80.
- [2] Brech, C. O 'dilema Tostines' das mulheres na matemática", Revista Matemática Universitária, 2017. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~brech/gender/BrechTostines.pdf>
- [3] Cohen, L. (2001). Colombianas en la Vanguardia. Editorial de la Universidad de Antioquia. Medellín. 351p.
- [4] Corzo-Morales, M., & Galeano-Camacho, E. G. (2020). Las mujeres ante la educación superior en Colombia: una aproximación general.
- [5] Evans, L. C. (2010). Partial differential equations (Vol. 19). American Mathematical Soc..
- [6] Galdi, S., Cadinu, M., & Tomasetto, C. (2014). The roots of stereotype threat: When automatic associations disrupt girls' math performance. Child development, 85(1), 250-263.
- [7] Kovalevskaya, S. (2013). A Russian childhood. Springer Science & Business Media.
- [8] Mihaljević, H., & Roy, M. F. (2019). A data analysis of women's trails among ICM speakers. In World Women in Mathematics 2018 (pp. 111-128). Springer, Cham.
- [9] MINTIC. (2018). Encuesta de acceso, uso y apropiación de las TIC por parte de las mujeres en Colombia.
- [10] Marta Macho Stadler, El error de Maston, un calculador prodigioso, Cuaderno de Cultura Científica, Matemoción, 17 agosto 2016
- [11] Rauff, J. V. (2009). HYPATIA OF ALEXANDRIA: MATHEMATICIAN AND MARTYR. Mathematics and Computer Education, 43(1), 89.
- [12] Sánchez, C. H. (2017). Género y matemáticas. Colombianas pioneras en el campo de las matemáticas. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 41(160), 381-392.
- [13] Unesco. (2019). Descifrar el código: la educación de las niñas y las mujeres en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM).

Liliana K. Esquivel

liliana.esquivel@correounivalle.edu.co

Política Editorial

El Paskín Matemático es una producción del Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Está abierto a todos y todas. Si tienes interés en escribir un artículo con cualquier tipo de contenido matemático, reseñar a un personaje, comentar un problema o tienes comentarios sobre nuestra publicación, envía un mensaje a paskin@konradlorenz.edu.co

$$G/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$$

El Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz fue creado en 1998. Conoce más acerca de nuestro programa en nuestra página institucional

<http://www.konradlorenz.edu.co/es/aspirantes/carreras-universitarias/carrera-de-matematicas/presentacion.html>

Bogotá, Colombia. 2022

PASKÍN MATEMÁTICO

Volumen 4, No. 2, 2022

Contenido

- Ana C. Chávez Cáliz
Polígonos de Poncelet1
- Angélica Marcela Torres Bustos
Geometría algebraica y triangulación de líneas en visión artificial5
- Adriana Victoria Araujo Salcedo
de Sitter special relativity. Some general aspects12
- Liliam Cardeno Acero
Florence Nightingale: Una enfermera iluminando el camino de la estadística20
- Blanca María Parra Mosqueda
Música y algoritmos matemáticos.....23
- Catalina M. Rúa-Álvarez
Cuadriláteros y olimpiadas matemáticas.....30
- Sofia Neiva Monsalve
MateKuento.....35
- Lilina Mora
K'Problema37

Preserva tu derecho a pensar, más vale que corras el riesgo de equivocarte a que cometas el pecado de no pensar.

Hipatia

