



$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b y$$

$$y^3$$

$$\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\tan \alpha}$$

$$\sqrt{x^2 - x} - x^2$$

$$n! = \prod_{k=1}^n k$$

??
?.

e-ISSN
2665-2471

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot [\text{Adj}(A)]^t$$

$$\frac{x_A + x_C}{2}$$

$$m = S/2$$

$$(x) = \frac{d}{3}$$

$$f(x) \sim \frac{a\pi}{2}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$(x) = d$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}$$

$$a^3 \sqrt[4]{}$$

$$m = S$$

$$V + E + F = 2$$

PASIN MATEMÁTICO

 **KONRAD LORENZ**
FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

Vol. 4
No. 1
 $f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
 $g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$

$$\sin \frac{3}{4}$$

PASKÍN MATEMÁTICO

<https://editorial.konradlorenz.edu.co/paskin-matematico.html>

e-mail: paskin@konradlorenz.edu.co

Editor

John A. Arredondo

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co

Comité Editorial

Carlos Alberto Díez

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
carlosa.diezf@konradlorenz.edu.co

Julián Jiménez Cárdenas

Universidad de los Andes
jo.jimenezc1@uniandes.edu.co

Camilo Ramírez Maluendas

Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales
camramirezma@unal.edu.co

Andrés Mauricio Rivera

Pontificia Universidad Javeriana, Sede Cali
amrivera@javerianacali.edu.co

Esta publicación puede ser difundida y reproducida con fines académicos y científicos por todos aquellos que tengan a bien hacer un correcto uso de su contenido.

ISSN 2665-2471

Fundación Universitaria Konrad Lorenz: Tel: (57 1) 347 23 11, Carrera 9 Bis No. 62-43 Bogotá – Colombia, email: info@konradlorenz.edu.co. **Carácter académico:** Institución Universitaria. Personería Jurídica por Resolución 18537 del 4 de noviembre de 1981 del Ministerio de Educación Nacional. Institución de Educación Superior sujeta a inspección y vigilancia por el Ministerio de Educación Nacional (Art. 2.5.3.2.10.2, Decreto 1075 de 2015).

GEOMETRÍA NO EUCLIDIANA: IDEAS Y PERSONAS

Mikhail Malakhaltsev y Fabio Ortiz Guzmán *

mikarm@uniandes.edu.co;fabio.ortiz@uexternado.edu.co,fortiz@uniandes.edu.co

En este artículo presentamos una síntesis histórica del desarrollo de unas ideas geométricas que relacionan tiempos remotísimos con nuestros días. Si nos remontamos a la época de Babilonia antigua es un hecho que la gente conocía la mayoría de información que ahora nosotros estudiamos en el colegio en un curso de geometría euclidiana: cómo resolver triángulos, hallar áreas de figuras geométricas, en particular, el área de círculo, cómo encontrar la longitud de la circunferencia, etc. Y es muy natural porque ellos usaban este conocimiento cada día para medir terrenos de formas atípicas y para construir edificios de arquitectura sofisticada.

Pero la forma de difusión de este conocimiento fue bastante distinta de la forma contemporánea, tal como nos es enseñada en la escuela, en el lenguaje moderno podemos decir que los métodos geométricos fueron formulados como algoritmos. No se expresaban en teoremas o pruebas, solamente deponían que, por ejemplo, para encontrar el área de un triángulo debían tomar la base del triángulo, multiplicarla por la altura y dividir por dos. El principio de enseñanza fue “haz como yo hago y obtienes el resultado correcto”.

En Grecia antigua dieron un primer paso muy importante en el desarrollo del pensamiento matemático, descubrieron lo que ahora conocemos como *método axiomático*. La idea fue distinguir algunas afirmaciones simples y obvias, es decir las afirmaciones que se puede verificar fácilmente por un experimento simple, tomar estas afirmaciones como *axiomas* y luego deducir otras afirmaciones más complicadas haciendo *pruebas* o *demostraciones* donde se usan solamente conclusiones lógicas. La base del método axiomático es la ley según la cual una afirmación que deducimos de otra afirmación verdadera aplicando correctamente unas reglas de la lógica, es verdadera. Para entender bien la razón por la que apareció la idea del método axiomático, es importante saber que en Grecia antigua las matemáticas fueron una parte del conocimiento sobre el mundo real, que solía usarse mucho para resolver problemas muy prácticos, entonces el problema de cómo verificar la veracidad de una afirmación o fórmula se tornaba en un problema práctico. Entonces ahí subyace la razón para tratar de tomar un número de afirmaciones en que podemos tener confianza completa y deducir las demás afirmaciones usando lógica pura. Se puede comparar el rol de este método con la moderna simulación virtual, pues en ambos casos no necesitamos hacer experimentos para asegurarnos de que una afirmación sea verdadera.

Cómo sabemos, la primera exposición del método

axiomático fue presentado por el geómetra griego Euclides (o un grupo de matemáticos) en su libro *Los Elementos*. Él tomó un número de afirmaciones evidentes que fueran de fácil verificación en la práctica (las llamó *axiomas* y *postulados*, por ejemplo, por cada dos puntos pasa una recta, o todos los ángulos rectos son iguales, es decir se puede sobreponer un ángulo recto sobre algún otro) y luego paso a paso construyó lo que ahora conocemos como geometría euclidiana.

Entre otros axiomas y postulados, Euclides tomó una afirmación más complicada conocida como *Quinto postulado de Euclides*: “Postúlese...: que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los [[ángulos]] menores que dos rectos” (ver Figura 1) .

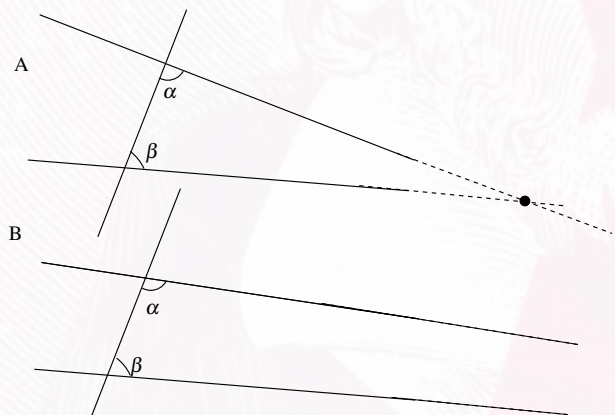


Figura 1: A) Quinto postulado en la formulación de Euclides: si $\alpha + \beta < 180^\circ$ entonces dos rectas se encuentran en un punto. B) Pero ¿qué va a pasar si $\alpha + \beta = 180^\circ - \epsilon$ donde ϵ es muy muy pequeño? ¿Es obvio que las rectas se encuentren?

Este postulado, que es equivalente a la afirmación que para cada punto que esté fuera de una recta se puede trazar no más que una recta que no se encuentre con la recta dada (ver Figura 2, notamos que se puede probar que una recta con esta propiedad existe), no fue tan evidente como los otros axiomas. Obviamente, (si nos es permitido este término) si la suma de los ángulos es menor que 180° , pero está muy cerca a este valor, el punto de intersección está muy muy lejos y nadie puede garantizar que las rectas, en efecto, se intersequen.

Entonces desde el comienzo, los geómetras pensaban que Euclides incluyó esta afirmación como un postulado porque no logró probarlo, y ellos trataban de probar el quinto postu-

*Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes; Departamento de Matemáticas, Universidad Externado de Colombia.

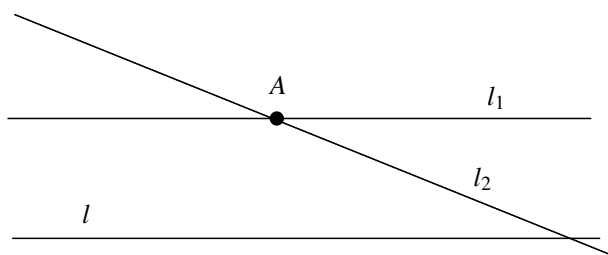


Figura 2: Quinto postulado en la formulación moderna: la recta l_1 pasa por el punto A y no se encuentra con la recta l , cualquier otra recta l_2 que pase por el punto A se encuentra con la recta l en algún punto.

lado para corregir el “único defecto” del sistema de Euclides. Una de las primeras pruebas fue propuesta por Posidonio (siglo I a.C.): “si alguien toma todos los puntos en las distancias iguales de una recta l entonces obtiene una recta m que no se encuentre con la recta l , cualquier otra recta p que entra en la región entre las rectas m y l debe encontrarse con la recta l porque se puede probar que la distancia del punto Q de la recta p hasta la recta l decrece cuando el punto Q se mueve a lo largo de la recta p ” (ver Figura 3).

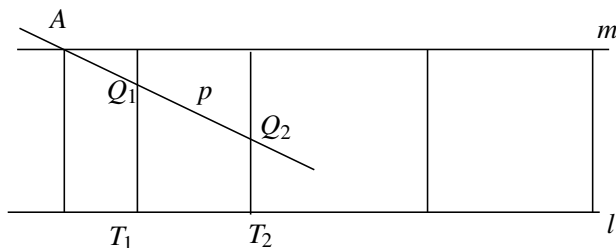


Figura 3: La prueba del quinto postulado: Si la recta m consiste de puntos que estén en la misma distancia de la recta l entonces $Q_1T_1 > Q_2T_2$. Pero ¿los puntos en la misma distancia de una recta forman una recta?

El error de este razonamiento no es evidente, el hecho es que la afirmación de que todos los puntos que estén en la misma distancia de una recta forman también una recta es una afirmación equivalente al quinto postulado. Pero el error en esta “prueba” fue descubierto muy rápido y luego, durante casi dos mil años, casi todos los geómetras eminentes hicieron contribuciones a la solución del “problema de quinto postulado”, entre ellos cabe mencionar: el matemático árabe Al-Abbas ibn Said al-Jawhari (siglo IX), quien usó la afirmación que si los ángulos opuestos de una secante son iguales, entonces lo mismo es verdadero para cualquier secante, (Figura 4); el matemático, astrónomo y poeta persa Omar Khayyám (siglo XI) quien consideró el cuadrilátero con dos lados iguales perpendiculares a la base y usó el postulado de Aristóteles: dos rectas no pueden acercarse y luego divergir, (Figura 5). Posteriormente, el matemático inglés John Wallis (siglo XVII) asumió que existen dos triángulos semejantes pero no iguales, el matemático italiano Giovanni Gerolamo Saccheri (siglos XVII–XVIII) consideró el cuadrilátero de Omar Khay-

yam y concluyó que α debe ser 90° y también el matemático francés Adrien-Marie Legendre (siglos XVIII–XIX) asumió que por un punto dentro un ángulo se puede trazar una recta que se encuentra con ambos lados del ángulo, (Figura 6). Como resultado del desafío propuesto por el problema aparecieron sucesivos trabajos y cada uno tenía básicamente dos partes: la primera fue el análisis de errores en todos los trabajos anteriores y la segunda “la última prueba del quinto postulado que era completamente correcta y sin errores”. Ahora es fácil entender la razón: los geómetras usaban el método “reducción al absurdo”, entonces tomaban la afirmación contraria al quinto postulado, a saber, “Existen dos rectas distintas que pasen por un punto afuera de una recta y no se encuentran con esta recta en ningún punto”, y llegaban a algunas afirmaciones que eran “claramente absurdos”, como por ejemplo: “la suma de ángulos de un triángulo es menor que 180° y además depende del triángulo”, “dos triángulos semejantes deben ser iguales”, “por un punto dentro de un ángulo se puede trazar una recta que no se encuentra con ambos lados de ángulo” (Figura 6), naturalmente ellos pensaron que habían encontrado una contradicción, cuando en realidad generalmente habían usado alguna proposición equivalente al postulado.

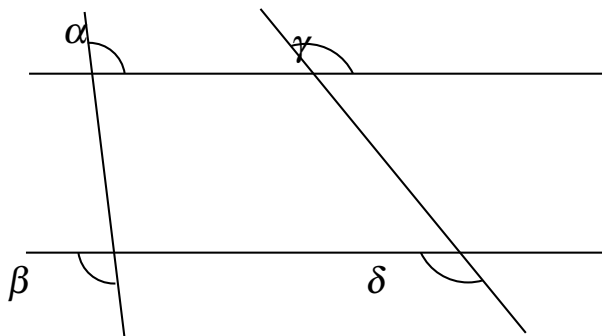


Figura 4: Al-Abbas ibn Said al-Jawhari : si $\alpha = \beta$, entonces $\gamma = \delta$.

Y solamente a comienzos del siglo XIX vinieron, casi al mismo tiempo, tres matemáticos Carl Friedrich Gauss, János Bolyai y Nicolái Lobachevski que lograron resolver el problema del quinto postulado.

Y en el momento en que ellos emprendieron la labor de atacar el problema la situación era casi apremiante, la mejor evidencia de esto es la carta de Farkas Bolyai, (quien fue alumno de Gauss) a su hijo János Bolyai: “Por amor de Dios, os ruego dejarlo. Temedle no menos que a las pasiones sensuales porque puede quitarte todo vuestro tiempo y privarte de salud, paz y felicidad en vuestra vida.”.

Fue maravilloso que los tres geómetras entendieron independientemente que existe una geometría distinta de la geometría euclidiana. Pero sus caminos fueron diferentes.

Carl Fridrich Gauss no publicó nada sobre la geometría no euclidiana y solamente después de su muerte encontraron sus trabajos sobre el tema en su archivo. Además, Carl Gauss no quiso hablar sobre la posibilidad de la existencia de otra geometría, por ejemplo, cuando Farkas Bolyai envió el trabajo de

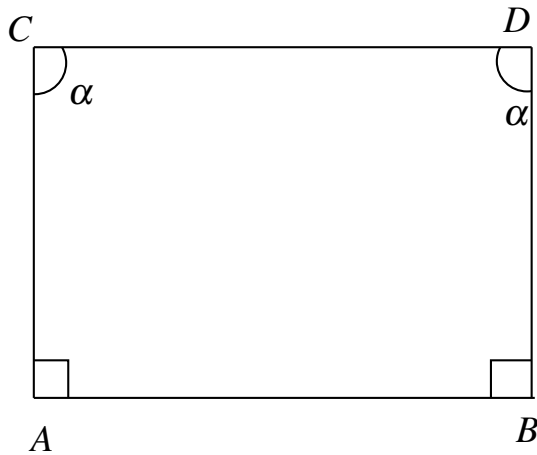


Figura 5: El cuadrilátero de Omar Khayyam: $AB = CD$, si dos rectas no pueden acercarse y luego divergir, entonces $\alpha = 90^\circ$, que implica el quinto postulado.

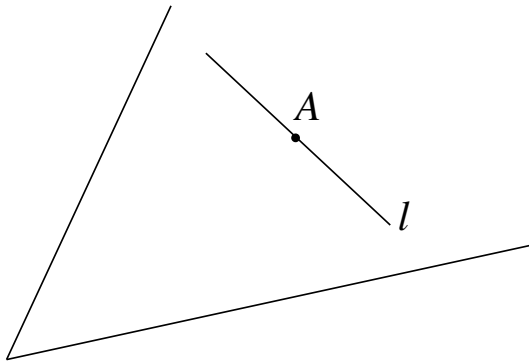


Figura 6: Adrien-Marie Legendre: por un punto dentro un ángulo se puede trazar una recta que se encuentra con ambos lados de ángulo.

su hijo János a Gauss, él recomendó no continuar en este tema y luego terminó todos los contactos con Farkas. Solo una vez Gauss apoyó públicamente el desarrollo de la geometría no euclidiana: cuando recomendó condecorar a Nikolái Lobachevski con la Medalla de la Sociedad Matemática de Gottinga, pero sin hacer mención de los trabajos de Lobachevski en geometría no euclidiana.

¿Cómo podemos entender el comportamiento de Carl Gauss? Obviamente fue un matemático de nivel altísimo, el Rey de los matemáticos, y entendió bien el significado matemático de este descubrimiento. Sin embargo, recordemos que la geometría euclidiana se pensaba como una ciencia sobre el espacio real, y además según Immanuel Kant, Dios nos presenta el espacio en la forma de la geometría euclidiana, entonces suponer la existencia de otra geometría sería lo mismo que suponer que Dios no existe. Entonces Carl Gauss se enfrentó con un problema más profundo que un problema matemático, fue un problema de concepción del mundo, de filosofía, y él eligió no anunciar la existencia de la nueva geometría.

János Bolyai publicó en 1832 su trabajo sobre geometría no euclidiana como anexo al texto guía en Matemáticas de su padre, sin conocer a Nikolái Lobachevski, que tres años antes había publicado un estudio similar. Como hemos dicho antes, su padre le había enviado una carta a Carl Gauss para que este lo admitiera como discípulo, pero este se negó, aduciendo que sus logros los había concebido diez años atrás, pero que no los había publicado. Ello desanimó irremediablemente a János Bolyai y nunca continuó su carrera como matemático.

Nikolái Lobachevski sometió su primer trabajo sobre geometría no euclidiana el 7 de diciembre del año 1826 "Exposición corta de elementos de geometría con estricta prueba del teorema sobre las líneas paralelas". En 1830 publicó en la revista "Boletín de Kazán" su trabajo "Sobre los elementos de geometría" el cual era el primer trabajo divulgado sobre geometría no euclidiana. Este trabajo de Lobachevski no encontró ni apoyo, ni entendimiento, por el contrario el académico Ostrogradskii dio su opinión extremadamente negativa acerca del trabajo "Sobre los elementos de geometría". Sin embargo N. Lobachevski seguía desarrollando sus ideas en soledad sin prestar atención a la crítica, fue así como publicó una serie de trabajos "Geometría imaginaria" (1835), "Aplicación de la geometría imaginaria a algunas integrales" (1836), "Nuevos elementos de geometría con la teoría completa de las paralelas (1835-1838)", "Geometrische Untersuchungen" (1840), "Pangeometría" (1855).

N. Lobachevski, como sus antecesores, comenzó sus estudios tratando de probar el quinto postulado por contradicción. Entonces asumió que, dada una recta l y un punto A afuera de la recta, existe más que una recta que pasa por el punto A y no se encuentra con la recta l . Esta conjetura implica que existe un haz de rectas que pasen por el punto A y no se encuentran con la recta l (ver Figura 7). El haz tiene las rectas límites l_1 y l_2 que N. Lobachevski llamó las rectas paralelas (l_1 es paralela a l por la izquierda y l_2 por la derecha), las demás son divergentes con la recta l . Lobachevski introdujo el ángulo de paralelismo $\alpha = \Pi(d)$ (ver Figura 7) que depende de la distancia d del punto A hasta la recta l y encontró la relación $\text{tg} \Pi(d)/2 = e^{-d/k}$, donde k es un parámetro. Entonces en este momento aparece una diferencia importante entre la geometría euclidiana y la geometría no euclidiana, la última depende de un parámetro (mucho más tarde se entendería que el parámetro es la curvatura del plano hiperbólico).

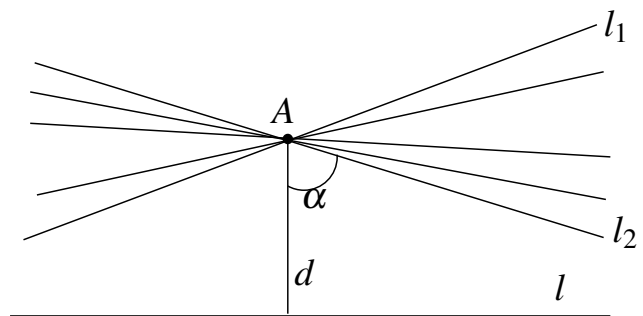


Figura 7: El haz de las rectas que pasen por punto A y no se intersectan con la recta l .

Entonces en el plano no euclidiano la posición relativa de dos rectas tiene más casos en comparación que en el plano euclidiano: dos rectas puedan encontrarse, ser paralelas (en una dirección) o ser divergentes (en este caso las rectas son ortogonales a un segmento ver Figura 8).

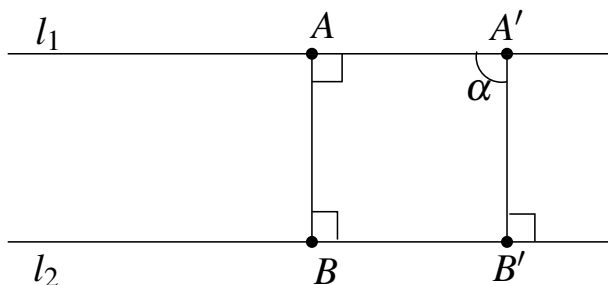


Figura 8: Las rectas l_1 y l_2 son divergentes; el segmento $A'B'$ crece mientras A' se aleja del punto A y el ángulo α decrece y tiende a 0° ; compara con el cuadrilátero de Omar Khayyám en Figura 5.

Habiendo analizado la relación de paralelismo, paso a paso N. Lobachevski fue desarrollando la geometría del plano no euclidiano: encontró que en efecto, en esta geometría la suma de ángulos de un triángulo es menor que 180° y además depende del triángulo, por ejemplo existen triángulos cuya suma de ángulos es arbitrariamente cercana a 0° , que el área de un triángulo con los ángulos A, B, C se expresa como $k^2(\pi - A - B - C)$, la longitud de la circunferencia de radio r es $L = 2\pi \operatorname{ctg} \Pi(r)$, el área del círculo de radio r es $2\pi \left(\frac{1}{\sin \Pi(r)} - 1 \right)$, que no existen triángulos semejantes y no iguales, dedujo el teorema de Pitágoras (ver Figura 9), las leyes de senos y cosenos de triángulos ...

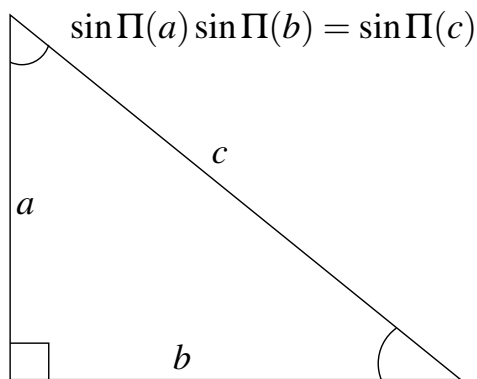


Figura 9: El teorema de Pitágoras en geometría no euclidiana: $\sin \Pi(a) \sin \Pi(b) = \sin \Pi(c)$.

Es interesante mencionar que la actividad de N. Lobachevski no fue restringida a sus investigaciones geométricas. Durante 40 años él fue profesor de la Universidad de Kazán y durante 19 años rector de esa Universidad, podemos decir que él concibió la universidad como un institución de enseñanza superior: en diez años bajo su supervisión y con su partici-

pación inmediata fue construido el campus de la universidad incluido el edificio principal, el teatro anatómico, el observatorio, la biblioteca, el edificio de laboratorios de química y física y el hospital. Debido a la gestión de N. Lobachevski la Universidad de Kazán comenzó a publicar “Las notas científicas de la Universidad de Kazán” (de 1834) su revista científica. En el período en que N. Lobachevski fue el rector en Kazán sucedieron dos calamidades: una epidemia de cólera y un incendio que destruyó la mitad de la ciudad, en ambos casos la universidad no sufrió debido a la planificación y organización excelentemente desarrollada por él. Además N. Lobachevski fue un eminente maestro, puso mucha atención a la educación en las escuelas y decía que “es necesario estudiar las Matemáticas porque ponen orden en la mentalidad”.

¿Por qué sus coetáneos no entendieron los trabajos de Nikolái Lobachevski? Se puede decir que los trabajos de N. Lobachevski fueron escritos en un lenguaje rígido y les parecieron oscuros. También parecía rara la idea que pudiese existir otra geometría distinta de la euclidiana. Pero pensamos que la razón principal estuvo en la mentalidad subyacente; como la geometría había sido pensada como geometría del espacio real, entonces era una insinuación rara que pudiera existir otra geometría. Tal idea sobre la existencia de una geometría distinta de la euclidiana fue causal de un conflicto profundo de conciencia, una contradicción que fue imposible resolver sin desarrollo de una mentalidad renovada. Vale la pena mencionar que Nikolai Lobachevski por si mismo pensaba en estos términos, él buscaba una base para su geometría en la vida real, en experimentos, pensaba que de pronto esta podría ser la geometría de distancias estelares, una geometría estelar. La base para esta idea fue que N. Lobachevski observó que las fórmulas de la geometría no euclidiana aproximan las fórmulas correspondientes de la geometría euclidiana en distancias cortas. Por ejemplo, el teorema de Pitágoras que en la forma alternativa dice que para un triángulo rectangular con catetos a, b e hipotenusa c está dada por la relación $\cosh a/k \cosh b/k = \cosh c/k$, y como $\cosh x/k = 1 + \frac{1}{2}x^2/k^2 + \frac{1}{24}x^4/k^4 + \dots$ podemos concluir

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{2}a^2/k^2 + \frac{1}{24}a^4/k^4 + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}b^2/k^2 + \frac{1}{24}b^4/k^4 + \dots\right) \\ = \left(1 + \frac{1}{2}c^2/k^2 + \frac{1}{24}c^4/k^4 + \dots\right). \end{aligned}$$

Si a, b, c son pequeños (o k es grande) aproximadamente la ecuación nos da $a^2 + b^2 = c^2$ lo que es el teorema de Pitágoras en el plano euclidiano. Entonces una de las ideas de N. Lobachevski sobre cómo mostrar la existencia de la geometría no euclidiana fue medir los ángulos de triángulos formados por estrellas. Otro argumento en favor de la potencialidad de la geometría no euclidiana fue que las fórmulas de esta geometría se pueden obtener si en las fórmulas de la geometría de la esfera se reemplazaba el radio R por el radio imaginario iR .

También N. Lobachevski buscaba una confirmación de su geometría en el cálculo integral, calculando volúmenes de sólidos en geometría no euclidiana y comparando con los valores de integrales calculadas por los métodos tradicionales

(“Aplicación de la geometría imaginaria a algunas integrales” (1836)).

Entonces hasta el fin de su vida Nikolái Lobachevski estuvo buscando una prueba de la existencia de su geometría, pero la prueba estricta de la existencia de la geometría no euclidiana fue encontrada más tarde a finales del siglo XIX. En primer lugar, Carl Gauss inició el estudio de la geometría de superficies observando, en particular, la geometría de triángulos geodésicos (las líneas geodésicas en una superficie son las curvas de la longitud mínima entre dos puntos, entonces son como rectas en el plano). El desenlace fue que las reglas de senos y cosenos de triángulos en la pseudoesfera coincidía con las de la geometría no euclidiana. En el año 1840 Ferdinand Minding descubrió las fórmulas de la trigonometría de superficies de curvatura constante y publicó un artículo en la revista de Crelle (Crelle’s Journal). Vale la pena mencionar que la biblioteca de la universidad de Kazán recibía esta revista pero las notas dicen que N. Lobachevski no tomó este número con el artículo de F. Minding y desafortunadamente perdió la oportunidad de conocer que su geometría se realizaba como geometría de superficie de curvatura constante. F. Minding tampoco conoció los trabajos de N. Lobachevski así que increíblemente también paso por alto esta ocasión de unificación.

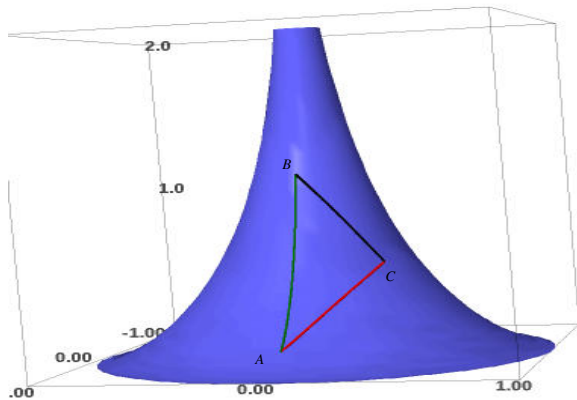


Figura 10: Interpretación de geometría no euclidiana en la pseudoesfera, los ángulos del triángulo geodésico ABC son: $A = 29^\circ$, $B = 78^\circ$ y $C = 62^\circ$, entonces la suma $A + B + C = 169^\circ$.

Fue solo en 1868 que Eugenio Beltrami, en su artículo “Saggio sulla interpretazione della geometria non euclidea”, Gior. Mat. (in Italian) 6: 248–312, comparó las fórmulas y descubrió este hecho. Así pues una parte del plano no euclidiano se podía realizar como una parte de pseudoesfera donde las rectas son geodésicas (Figura 10 muestra un triángulo geodésico en la pseudoesfera).

En 1859 Arthur Cayley construyó métricas en regiones del plano proyectivo acotados por una cuádrica y estudió su geometría y en 1871 Felix Klein usó la métrica de Cayley para construir una interpretación proyectiva de la geometría no euclidiana, mostró que dentro del absoluto $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ con la métrica $d(A, B) = \ln(AC/BD : AD/BC)$ donde B y D son

los puntos de intersección de la recta AB con el absoluto, se realiza la geometría no euclidiana. Por ejemplo, las rectas se representan por las cuerdas y se puede ver que el quinto postulado se cumple en la versión no euclidiana (ver Figura 11).

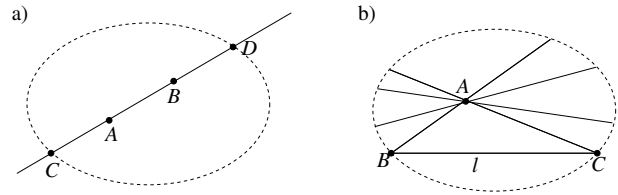


Figura 11: Interpretación de geometría no euclidiana en el plano proyectivo: por el punto A pasan muchas rectas que no se encuentran con la recta l (los puntos B y C no pertenecen al plano no euclidiano).

En Colombia, hacia 1856, Indalecio Liévano se interesó en el postulado de las paralelas primero mostrando sus dudas respecto a una demostración del postulado ofrecida por Bertrand y luego proponiéndose dar una demostración, lo cual se enmarcaba en su propósito de llenar vacíos en la fundamentación de las matemáticas (a saber, en el caso de la construcción de los números reales en donde posteriores estudios mostrarían que tuvo mejor fortuna). Además de él, en Colombia se menciona a H. Wilson y R. Ferreira con críticas a Liévano y con propuestas de demostraciones alternativas.

Acerca del trabajo de Liévano refutando la demostración de Bertrand, podemos resumir su argumento diciendo que (ver Figura 12) si por el punto exterior a la recta NP se traza por el punto O una perpendicular a NP se tiene dos cosas: (trazando una oblicua) el ángulo BOA al rotarse un número finito de veces cubre al sector NPX , pero este sector siendo infinito no puede recubrirse con un número finito de fajas $NPOA$, de estas concluye que la oblicua OB debería cortar a NP . Para Liévano es ambiguo considerar el ángulo como cantidad finita (la abertura entre sus lados) y luego como la superficie encerrada la cual es infinita, por tanto está asumiendo para el infinito propiedades que solo son ciertas para la cantidad finita.

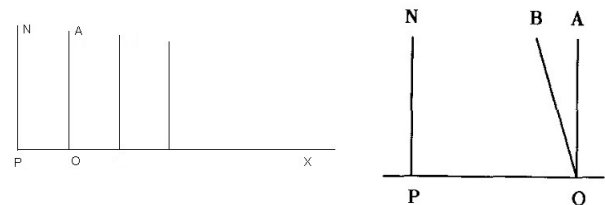


Figura 12: El razonamiento de Liévano sobre el de Bertrand.

Luego se propone Liévano dar una demostración del postulado para lo cual enuncia (ver Figura 13):

Tomemos una recta indefinida y levantemos una perpendicular PQ , tomemos $PC = PF$ y levantemos perpendiculares en los puntos C y F . En la perpendicular PQ , tomemos una magnitud arbitraria PO y después tomemos $CC' = FF' = PO$

alto que las fórmulas definidas analíticamente no son verdades geométricas sino enunciados en lenguaje geométrico, las cuales no se aplican a figuras concretas de la geometría mientras no se establezcan en concordancia con los postulados de la base, es decir Garavito está enunciando un equivalente del postulado. Albis & Moreno (1976) precisaron lo dicho por Duarte (sin embargo en esta referencia el artículo está inexplicablemente truncado en su parte final (notas 1 y 2, Albis & Moreno (1976), p.84)).

En otro argumento, Garavito se refiere a la fórmula fundamental de la trigonometría hiperbólica. Tomando un diagrama similar a la figura 18 pero en el que la representación es simbólica (pues se usan trazos euclidianos para representar rectas no euclidianas):

$$\tanh \left[\frac{z}{k} \right] = \frac{\operatorname{tg}(\beta)}{\operatorname{tg}(\Delta)}$$

en donde $-\Delta < \beta < \Delta$; y Δ y k son respectivamente el ángulo de paralelismo y la constante introducida por Lobachevski. En este caso Garavito comete un error similar, usando (1) (Albis (1997)). Posteriormente no encontramos referencias sobre el tema hasta una conferencia de J. Charris en 1967, que incluyó las geometrías no euclidianas en el *I Congreso Nacional de Enseñanza de las Matemáticas a nivel Medio. Boletín de Matemáticas. Nov. 1967, V. 1, (5-6), U. Nacional.*

El paso final de nuestra historia fue hecho por David Hilbert en el texto “Grundlagen der Geometrie” (Fundamentos de la geometría) publicado en 1899. En este formuló la versión contemporánea del método axiomático: tomamos un conjunto de elementos y algunas relaciones indefinibles, por ejemplo, el conjunto de puntos y rectas y la relación “recta pasa por punto”. Sobre la base de estos conjuntos y relaciones se formulan axiomas que describen propiedades de los elementos, de conjuntos y relaciones y luego se construye en la manera lógica una teoría matemática, es decir prueban teoremas basados en axiomas y otros teoremas. Como dice Hilbert, elementos tales como el punto, la recta, el plano y otros, se pueden sustituir con mesas, sillas, jarras de cerveza y otros objetos. Entonces en la versión moderna los axiomas no se toman como verdades evidentes.

Además, en 1920 D. Hilbert propuso su programa, él quería que la matemática fuese formulada sobre unas bases sólidas y completamente lógicas. Creía que, en principio, esto podía lograrse, mostrando que: toda la matemática se sigue de un sistema finito de axiomas escogidos correctamente; y que tal sistema axiomático se puede probar consistente.

El hecho es que no se puede tomar cualquier colección de afirmaciones como un sistema de axiomas: el sistema no debe contener contradicciones, ser independiente (no se puede deducir un axioma de otros) y ser completo, es decir que se puede verificar para cada afirmación de la teoría que sea verdadera o falsa. Pero en 1931, Kurt Gödel demostró que no se podía demostrar la completitud de ningún sistema formal no contradictorio que fuera suficientemente amplio para incluir al menos la aritmética, sólo mediante sus propios axiomas, pero esta es otra historia ... Solo podemos decir que el desa-

rollo del método axiomático dio nacimiento a la lógica matemática y luego a la informática teórica que finalmente llegó a la creación del mundo de los computadores.

Entonces vemos cuáles son las consecuencias profundas que fueron generando el descubrimiento de la geometría no euclidiana. Es una historia que afectaba la mentalidad humana y tenía inmensa importancia para su desarrollo.

Agradecimientos.

Mikhail Malakhaltsev quisiera agradecer mucho a sus profesores y colegas de la universidad de Kazan por enseñarle la historia de geometría no euclidiana, también fue apoyado por Vicerrectoría de Investigaciones y la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes. Fabio Ortiz Guzmán agradece a la directora del Departamento de Matemáticas de los Andes porque ella asertivamente presta su apoyo a los profesores para que este tipo de iniciativas cristalicen.

Referencias.

- [Lap76] B. Laptev, *N. I. Lobachevski y su geometría*, Prosveschenie, Moscú, 1976. en ruso.
- [Kag48] V. F. Kagan, *Lobachevski*, Izdatelstvo Akademii Nauk SSSR, Moscú-Leningrad, 1948. en ruso.
- [AMM76] V. Albis and L. Moreno Moreno, *Una hipótesis equivalente al postulado euclideo de las paralelas*, Boletín de matemáticas. Universidad Nacional de Colombia **X** (1976), 78–85.
- [Alb97] V. Albis, *Viscitudes del postulado euclideo en Colombia*, Revista Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales **21** (1997), no. 80, 281–213.
- [Dua46] F. Duarte, *Sobre las geometrías no euclidianas*, Revista Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales **7** (25-26) (1946), 63–81.
- [Gar03] J. Garavito, *Cuadernos de Julio Garavito.: Cuaderno 4*, Observatorio Astronómico Nacional, Bogotá, 1903.
- [Gar39a] ———, *Nota sobre las geometrías planas no euclideas y nota sobre balística exterior.*, Revista Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales **2(8)** (1939), 566–572.
- [Gar39b] ———, *Nota sobre la fórmula fundamental de la trigonometría plana no euclidea en la geometría hiperbólica*, Revista Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales **3(9-10)** (1939), 14–25.

Acerca de los autores: Mikhail Malakhaltsev es doctorado de matemáticas de la Universidad de Kazan (1987), trabaja en el área de geometría y topología, tiene 27 publicaciones. Actualmente, es profesor asociado del departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes. Le gustan mucho los asuntos relacionados con la historia de las ciencias.

Fabio Ortiz Guzmán es Licenciado en Matemáticas y Magister en Matemáticas, ha dictado cursos en la Universidad de los Andes y en la Universidad Externado de Colombia. Tiene interés por la historia en general y en particular la historia de las matemáticas en Colombia, la agrimensura y las medidas agrarias antiguas en el país.

Celia Alondra Guzmán May y Gustavo Ríos Segura *

zS18011660@estudiantes.uv.mx, zS18011660@estudiantes.uv.mx

Resumen

Los puntos de Lagrange son cinco posiciones en donde la fuerza gravitacional que ejercen tres cuerpos están en equilibrio con la fuerza centrífuga; en estos puntos de equilibrio un objeto puede permanecer estacionario respecto a los dos cuerpos más grandes [CO17]. Se describirán, calcularán y analizarán los puntos de Lagrange que podemos encontrar en nuestro Sistema Solar con los potenciales de Newton, de Manev y de Schwarzschild gracias a la relación Planeta-Sol-Satélite con la finalidad de realizar un mapa de estos.

1. Introducción.

Los puntos de Lagrange son posiciones en el espacio en el cual un cuerpo puede orbitar libremente y de manera periódica, esto gracias a la atracción de otros dos cuerpos, que si tomamos a uno como el marco de referencia, esta posición es invariante a pesar del movimiento de traslación o rotación que tenga. Estas posiciones se encuentran dados dos cuerpos con masa que ejercen su fuerza gravitacional hacia un tercer cuerpo con masa despreciable, en nuestro caso tomamos de referencia al Sol con cualquier otro planeta de nuestro sistema solar, además de también tomar a un planeta con algunas de sus lunas. Para realizar este proyecto, nos basamos en información elaborada por grandes científicos muchos años atrás, por ejemplo Isaac Newton, Leonhard Euler, Jhosep Lagrange, entre otros.

En 1687, el físico inglés Isaac Newton estableció la fuerza de atracción gravitacional que ejercen dos cuerpos en su llamada *Ley de Gravitación Universal* [Kar07], y resolvió el problema en el cual se busca determinar la posición y la velocidad en cada instante que tienen dos partículas puntuales que interaccionan entre sí bajo la influencia de una atracción gravitacional, el cual es llamado *problema de los dos cuerpos*. Newton pudo resolverlo, pero el análisis de esta atracción gravitacional entre dos cuerpos resulta sencillo si comparamos este problema para más cuerpos. Si ahora tenemos 3 o más cuerpos, los cálculos requeridos al tratar de determinar cómo se comportan individualmente estos cuerpos se extienden, como lo explicaremos más adelante.

La interacción gravitacional se modela como el efecto entre dos masas, se puede construir la interacción para un sistema de más de dos cuerpos tomando en cuenta que necesariamente involucra la suma de interacciones entre los cuerpos

que participan. Para poder realizar este problema será necesario aplicar alguna aproximación o condición a las masas de estos, incluso para un sistema en el que interactúan solamente tres cuerpos. En 1767, el físico matemático Leonhard Euler fue el primero en estudiar el problema de los tres cuerpos, y logró describir, dados tres cuerpos, el movimiento de éstos. Este movimiento es de forma periódica y con órbitas en forma de elipse donde en todo momento la posición de uno es colineal con respecto a los demás (todos se sitúan sobre la misma línea recta) [Cha99].

El matemático franco-italiano Joseph Louis Lagrange realizó en 1772 otro análisis al problema de los tres cuerpos; encontró otras dos órbitas en diferentes posiciones a las de Euler. Lagrange descubrió que podemos hacer una configuración en la cual situamos a los tres cuerpos en los vértices de un triángulo equilátero, ya sea que la orientación sea hacia arriba o hacia abajo, para así poder tener al igual que Euler órbitas periódicas [Cha99].

Dada a la complejidad que tiene el problema de tres cuerpos, Lagrange lo estudió desde otra perspectiva. Analizó el sistema haciendo algunas aproximaciones, las cuales son que un cuerpo tiene una masa mucho menor a los otros dos ($m_1 \ll m_2, m_3$), que los cuerpos están en reposo relativo (esto es un sistemas de referencia no inercial) y finalmente que el cuerpo con menor masa no afecta el campo gravitacional de los otros dos, es decir, pasa desapercibido. Y es así como a este problema se le conoce como *el problema de los tres cuerpos restringido*.

Siguiendo esto, Lagrange demostró que las posiciones que había hallado son una solución particular ya que estas corresponden a cinco puntos de equilibrio, estos puntos son de interés porque si situamos a la masa pequeña ahí, la fuerza de atracción gravitacional sobre el cuerpo de masa despreciable debida a la presencia de los otros dos cuerpos masivos es nula, es un punto en el cual la masa no tiende a moverse de forma atractiva, por lo que, si los hacemos orbitar, siempre mantendrá una posición sin ningún trabajo externo. De estos puntos encontrados tres corresponden a las posiciones de la configuración de Euler y otros dos a la configuración hecha por Lagrange. Estas soluciones descubiertas se llaman *Puntos de Lagrange* en honor al físico que los encontró, nombrados por lo regular L_1 , L_2 y L_3 a los tres puntos colineales, y L_4 y L_5 a los puntos situados en los extremos del triángulo equilátero que se genera [Cha99].

Los primeros tres puntos de Lagrange son inestables, esto es, si un cuerpo en cualquiera de estos sitios (L_1 , L_2 y L_3) sufre una mínima perturbación, el cuerpo escapará fácilmente, cabe

*Estudiantes de Física, Universidad Veracruzana, Xalapa, México

aclarar que en la realidad, pequeñas perturbaciones producen pequeños cambios en sus órbitas. Los otros dos puntos (L_4 y L_5) por otra parte son estables, por ejemplo, algunos asteroides han sido encontrados en los Puntos Lagrangianos L_4 y L_5 de Júpiter y Marte. El primer asteroide lleva el nombre de los héroes de la guerra de Troya, por lo que se les llama *Trojan asteroids*; estos se mueven alrededor de los Puntos Lagrangianos y pueden viajar bastante lejos de ellos, pero no pueden escapar [RV18].

Existen diferentes formas de calcular estos puntos; podemos ocupar ecuaciones diferenciales, álgebra, lenguajes de programación y métodos numéricos. Al igual que los métodos, hay diferentes conceptos físicos a utilizar para el análisis del problema, nosotros tomamos de base la fuerza de atracción gravitacional y el potencial efectivo. Tenemos que tener en cuenta que el potencial efectivo es un *potencial ficticio*, en el cual se relaciona el potencial real de un sistema con el movimiento de este.

Una vez obteniéndola la expresión que relaciona el potencial efectivo con los cuerpos, podemos hallar los puntos de Lagrange calculando los puntos críticos de este. Estas soluciones serán los Puntos de Lagrange y en ese lugar es donde podemos ubicar a nuestro tercer objeto (de masa despreciable). Una vez se tengan los resultados para un potencial, seguimos el mismo procedimiento para los demás potenciales y así poder generar una tabla para comparar la posición del tercer objeto. Por último, y como objetivo de este proyecto, elaboramos varios mapas representando la relación tomada de Sol-Planeta-Satélite y Planeta-Luna-Satélite.

2. Marco teórico.

Las leyes de Kepler nos describen el movimiento de las órbitas de los planetas, la primera de ellas dice que los planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol (con este en uno de los focos), la segunda nos menciona que el radio vector que une un planeta al centro del Sol barre áreas iguales en tiempo iguales, y la tercera, la cual nosotros ocupamos, dice que el cuadrado del período orbital de cualquier planeta (T) es directamente proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica (a). Con base en esto, tomamos la relación para el sol y cualquier otro planeta de la siguiente manera:

$$T^2 = \frac{4\pi a^3}{G(m_{\text{Sol}} + m_{\text{planeta}})},$$

donde G es la constante de gravitación universal ($G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$). [RV18]

Basándose en las leyes de Kepler y los estudios hechos por Galileo, Isaac Newton formuló la ley de gravitación universal en 1687, en la cual se describe la fuerza gravitacional o gravitatoria. Esta es la fuerza de atracción que experimentan distintos cuerpos por tener masa y es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional a la distancia entre ellos al cuadrado:

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r,$$

donde $\vec{u}_r$ es un vector unitario que expresa la dirección en la que actúa la fuerza. También podemos expresar el módulo de esta fuerza de la siguiente forma:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Estas expresiones solo son para masas puntuales y cuerpos esféricos por lo que la distancia se mide desde el centro de estos.

Las fuerzas ficticias o de inercia son fuerzas que se encuentran en marcos de referencia no inerciales, en donde el cuerpo o la partícula está acelerándose con el tiempo sin que exista alguna interacción física. Estas permiten aplicar las leyes de Newton a los sistemas de referencia no inerciales.

Cuando un cuerpo se mueve en forma circular, o rota, aparece una fuerza ficticia que hace que el objeto se mueva radialmente alejándose del centro, esta es la fuerza centrífuga, la cual se expresa como:

$$\vec{F}_{cf} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}),$$

donde Ω es la velocidad angular y r es la posición respecto del eje de rotación. Expresamos el módulo de esta fuerza como:

$$F_{cf} = m\Omega^2 r.$$

Además, aparece otra fuerza que es la fuerza de Coriolis, esta es perpendicular al movimiento del cuerpo y a la dirección del eje de rotación del sistema. La fuerza de Coriolis tiene una componente tangencial y una componente radial, esta fuerza se expresa como: [RV18]

$$\vec{F}_c = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}),$$

donde ω es la velocidad angular y v es la velocidad tangencial.

Para calcular las órbitas de los planetas vamos a necesitar el concepto del potencial efectivo, el cual es la suma de la energía potencial centrífuga $\left(\frac{L^2}{2mr^2}\right)$ y la energía potencial de un sistema dinámico ($V(\vec{r})$):

$$V_{eff}(\vec{r}) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(\vec{r}),$$

donde L es el momento angular y r es la distancia entre las dos masas; y también tenemos la fuerza efectiva, la cual es el gradiente negativo del potencial efectivo:

$$\vec{F}_{eff} = -\nabla V_{eff}(\vec{r}) = \frac{L^2}{mr^3} \hat{r} - \nabla V(\vec{r}),$$

donde $\hat{r}$ es el vector en la dirección radial. [Mar98]

El principio de Hamilton es la formulación más general de la ley de movimiento de los sistemas mecánicos, y según dicho principio todo sistema mecánico está caracterizado por una función definida $\mathcal{L}$ donde n son los grados de libertad del sistema: [Mar98]

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}; t),$$

donde la función escalar $\mathcal{L}$ se llama Lagrangiana, la cual se define como la diferencia entre la energía cinética K y la energía potencial V :

$$\mathcal{L} = K - V.$$

Conociendo la Lagrangiana podemos tener unas ecuaciones diferenciales llamadas ecuaciones de Lagrange, las cuales establecen la relación entre las aceleraciones, las velocidades y las coordenadas, es decir, las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

con $i = 1, 2, \dots, n$

La formulación de Lagrange permite el desarrollo de la formulación de Hamilton, una de las formulaciones más importantes para distintas ramas de la física, en particular para la mecánica clásica. En esta se constituye la base para desarrollos más avanzados como la teoría de Hamilton-Jacobi, además, fuera de la mecánica clásica, la formulación de Hamilton proporciona parte del lenguaje con el que se construye la mecánica estadística y la mecánica cuántica. Para hacer uso de esta formulación es necesario construir una función $\mathcal{H}$ conocida como Hamiltoniano. A partir de la definición de momento generalizado $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ y empleando la transformación de Legendre, se define el Hamiltoniano:

$$H(q, p, t) = \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t).$$

Esta función, de manera análoga a la formulación de Lagrange, permite obtener las ecuaciones de movimiento del sistema a partir de un conjunto de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden conocidas como ecuaciones canónicas de Hamilton.[Mar98]

Cuando el sistema es esclerónomo (independiente del tiempo) y el potencial V depende únicamente de las coordenadas generalizadas, el Hamiltoniano en este caso estará dado simplemente por

$$H = K + V,$$

y será igual a la energía total del sistema.[Mar98]

3. Obtención de los puntos de Lagrange con el potencial Newtoniano

Los cinco puntos de Lagrange que se encuentran ubicados alrededor de dos masas, que en este caso son cada planeta del Sistema Solar (m_2) con el Sol (m_1), pueden ser calculados.

En la Figura 1 tenemos la representación del problema de los tres cuerpos restringido de la cual vamos a definir a m_1 como la masa del Sol y a m_2 como la masa de cualquiera de los ocho planetas, $\vec{r}_1$ es la distancia del centro de masa (C. M.) al Sol y $\vec{r}_2$ es la distancia del centro de masa al planeta; sabiendo esto y conociendo la Ley de Gravitación Universal, podemos

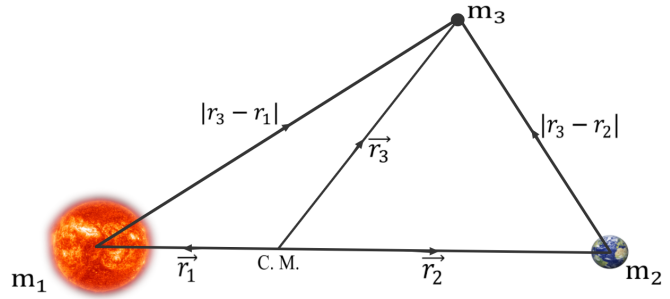


Figura 1: Diagrama del problema de los tres cuerpos restringido.

escribir la fuerza ejercida sobre la tercera masa dadas las otras dos masas:

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) - \frac{Gm_2m_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_2). \quad (1)$$

Ya que trabajaremos con un marco de referencia no inercial, agregaremos otras fuerzas teniendo como resultado una fuerza efectiva. Estas fuerzas agregadas se les conoce como *fuerzas ficticias* y son necesarias para que se cumplan las leyes de movimiento de Newton. Teniendo en cuenta esto, nuestra fuerza efectiva queda de la siguiente manera:

$$\vec{F}_{eff} = \vec{F} - 2m_3 (\vec{\Omega}_3 \times \dot{\vec{r}}_3) - m_3 \vec{\Omega}_3 \times (\vec{\Omega}_3 \times \vec{r}_3), \quad (2)$$

el primer término que tendremos para la fuerza efectiva sobre una partícula será la suma de las fuerzas gravitacionales, la cual esta escrita en la ecuación (1), el segundo término es la fuerza de Coriolis y el último término es la fuerza centrífuga.

En esta última ecuación $\vec{\Omega}$ representa la velocidad angular y esta determinada por $\Omega = \frac{2\pi}{T}$; vemos que no tomamos en cuenta el término dado por el movimiento de traslación, ni la aceleración angular del sistema ya que la velocidad angular es constante. De la ecuación (2) obtenemos la aceleración del cuerpo:

$$\ddot{\vec{r}}_3 = \frac{\vec{F}}{m_3} - 2(\vec{\Omega}_3 \times \dot{\vec{r}}_3) - \vec{\Omega}_3 \times (\vec{\Omega}_3 \times \vec{r}_3); \quad (3)$$

la velocidad del cuerpo se ve corregida por los términos no inerciales y nos queda:

$$\dot{\vec{r}}_3 = \dot{\vec{r}} - \vec{\Omega}_3 \times \vec{r}_3.$$

Con estos datos ahora es posible obtener la Lagrangiana del sistema, pues la energía cinética es $T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_3^2$, y $\phi(r_3)$ será el potencial gravitacional por unidad de masa generado por nuestro sistema Sol-Planeta:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\vec{r}} - \vec{\Omega}_3 \times \vec{r}_3)^2 - \phi(r_3).$$

El momento generalizado de una coordenada generalizada es la derivada de la Lagrangiana con respecto a una velocidad

generalizada, por lo que nos queda:

$$p_v = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \dot{r}_3 - \vec{\Omega} \times r_3,$$

esto lo hacemos para poder obtener el Hamiltoniano:

$$\mathcal{H}_J = \vec{p} \cdot (\dot{\vec{r}}_3 - \vec{\Omega}_3 \times \vec{r}_3) - \frac{1}{2} p^2 + \phi(r_3),$$

el cual simplificamos usando una identidad del producto punto con el producto cruz:

$$\mathcal{H}_J = \frac{1}{2} p^2 + \phi(r_3) - \vec{\Omega}_3 \cdot (\vec{r}_3 \times \vec{p}),$$

y ya que $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ y $\frac{1}{2} p^2 + \phi(r_3)$ es el Hamiltoniano ($\mathcal{H}$):

$$\mathcal{H}_J = \mathcal{H} - \vec{\Omega}_3 \cdot \vec{L}.$$

El Hamiltoniano coincide con la energía mecánica, ya que las ecuaciones de transformación de las coordenadas generalizadas no dependen explícitamente del tiempo, $\mathcal{H}_J = \text{constante} = E_J$. Por lo que reescribimos la ecuación anterior:

$$E_J = \frac{1}{2} (\dot{\vec{r}}_3 + \vec{\Omega}_3 \times \vec{r}_3)^2 + \phi(r_3) - (\dot{\vec{r}}_3 + \vec{\Omega}_3 \times \vec{r}_3),$$

simplificando:

$$E_J = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_3^2 + \phi(r_3) - (\vec{\Omega}_3 \times \vec{r}_3)^2 = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_3^2 + \phi_{eff}(r_3).$$

Vemos que definimos un nuevo potencial efectivo en términos del potencial gravitacional y del potencial centrífugo $\phi_{eff}(r_3) = \phi(r_3) - (\vec{\Omega}_3 \times \vec{r}_3)^2$, simplificando el potencial efectivo que actúa sobre la tercera masa:

$$\phi_{eff}(r_3) = \phi(r_3) - \frac{1}{2} [\Omega_3^2 r_3^2 - (\vec{\Omega}_3 \cdot \vec{r}_3)^2], \quad (4)$$

obtenemos el gradiente del potencial efectivo calculando la derivada parcial con respecto a r , quedando:

$$\nabla \phi_{eff} = \nabla \phi - \Omega_3^2 \vec{r}_3 + \vec{\Omega}_3 (\vec{\Omega}_3 \cdot \vec{r}_3). \quad (5)$$

Construimos las ecuaciones canónicas de Hamilton mediante el Hamiltoniano que encontramos:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= -\frac{\partial H_J}{\partial r} = \nabla \phi(r_3) - (\vec{\Omega}_3 \times \vec{P}), \\ \dot{r}_3 &= \frac{\partial H}{\partial P} = \vec{P} - (\vec{\Omega}_3 \times \vec{r}_3), \end{aligned} \quad (6)$$

derivando esta última ecuación obtenemos una nueva forma de la aceleración:

$$\ddot{\vec{r}}_3 = \dot{\vec{P}} - \frac{d}{dt} (\vec{\Omega}_3 \times \vec{r}_3),$$

simplificamos y ya que $\vec{P} = \dot{\vec{x}}$:

$$\ddot{\vec{r}}_3 = -\nabla \phi - 2(\vec{\Omega}_3 \times \dot{\vec{r}}_3) - \vec{\Omega}_3 (\vec{\Omega}_3 \cdot \vec{r}_3) + \Omega_3^2 \vec{r}_3,$$

donde el segundo término es la fuerza de Coriolis y el tercero la fuerza centrífuga. Con esto, despejando $\nabla \phi$ de la ecuación anterior, podemos reescribir la aceleración de la siguiente manera:

$$\ddot{\vec{r}}_3 = -\nabla \phi_{eff} - 2(\vec{\Omega}_3 \times \dot{\vec{r}}_3); \quad (7)$$

igualamos las ecuaciones de aceleración (3) y (7)

$$-\nabla \phi_{eff} - 2(\vec{\Omega}_3 \times \dot{\vec{r}}_3) = \frac{\vec{F}}{m_3} - 2(\vec{\Omega}_3 \times \dot{\vec{r}}_3) - \vec{\Omega}_3 \times (\vec{\Omega}_3 \times \vec{r}_3),$$

y encontramos el gradiente del potencial efectivo:

$$\nabla \phi_{eff} = -\frac{\vec{F}}{m_3} + \vec{\Omega}_3 \times (\vec{\Omega}_3 \times \vec{r}_3), \quad (8)$$

de esta última ecuación, podemos sustituir la fuerza escrita en la ecuación (1). Por lo tanto, tenemos:

$$\nabla \phi_{eff} = G \frac{m_1 (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} + G \frac{m_2 (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} + \vec{\Omega}_3 (\vec{\Omega}_3 \cdot \vec{r}_3) - \Omega_3^2 \vec{r}_3.$$

Como nuestras coordenadas cartesianas tienen el origen en el centro de masa, y tomando en cuenta que el eje Z está alineado con la velocidad angular tenemos:

$$\vec{\Omega}_3 = \Omega_3 \hat{k},$$

$$\vec{r}_3 = x\hat{i} + y\hat{j},$$

y de la figura 1 observamos que podemos escribir $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ como:

$$\vec{r}_1 = -r_1 \hat{i},$$

$$\vec{r}_2 = r_2 \hat{i}.$$

Ahora, tomando en cuenta que el centro de masa está en el origen, podemos calcular el centro de masa e igualarlo a cero de la siguiente manera:

$$-m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0.$$

Ya que los dos vectores están solamente en el eje X podemos encontrar una relación entre sus magnitudes denotando a R como la distancia comprendida entre el sol y el planeta, $R = r_1 + r_2$, encontramos la relación:

$$r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R,$$

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R.$$

Haciendo constantes el cociente entre las masas como:

$$\alpha = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

podemos escribir los vectores de posición como:

$$\vec{r}_1 = -\beta R \hat{i},$$

$$\vec{r}_2 = \alpha R \hat{i}.$$

Con esto podemos reescribir $\nabla\phi_{eff}$ de la siguiente forma:

$$\nabla\phi_{eff} = -\Omega^2(x\hat{i} + y\hat{j}) + G \frac{m_1[(x + \beta R)\hat{i} + y\hat{j}]}{((x + \beta R)^2 + y^2)^{3/2}} + G \frac{m_2[(x - \alpha R)\hat{i} + y\hat{j}]}{((x - \alpha R)^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Usando la tercera ley de Kepler para la frecuencia angular, la cual dice que la división del cuadrado del periodo entre el cubo del semieje mayor es constante, podemos obtener la siguiente relación:

$$\Omega^2 R^3 = G(m_1 + m_2).$$

Y así, el gradiente del potencial efectivo nos queda como:

$$\nabla\phi_{eff} = \Omega^2[-(x\hat{i} + y\hat{j}) + \frac{\alpha R^3[(x + \beta R)\hat{i} + y\hat{j}]}{((x + \beta R)^2 + y^2)^{3/2}} + G \frac{\beta R^3[(x - \alpha R)\hat{i} + y\hat{j}]}{((x - \alpha R)^2 + y^2)^{3/2}}].$$

Por conveniencia factorizaremos R y definiremos las variables adimensionales X y Y :

$$X = \frac{x}{R}, \quad Y = \frac{y}{R},$$

reescribimos el potencial efectivo aplicando lo anterior como:

$$\nabla\phi_{eff} = \Omega^2 R[-(X\hat{i} + Y\hat{j}) + \frac{\alpha[(X + \beta)\hat{i} + Y\hat{j}]}{((X + \beta)^2 + Y^2)^{3/2}} + \frac{\beta[(X - \alpha)\hat{i} + Y\hat{j}]}{(X - \alpha)^2 + Y^2)^{3/2}}].$$

Por último, igual que las coordenadas, tomamos la forma adimensional del gradiente potencial efectivo haciendo $\nabla\Phi_{eff} = \frac{\nabla\phi_{eff}}{\Omega^2 R}$, para así obtener:

$$\nabla\Phi_{eff} = -(X\hat{i} + Y\hat{j}) + \frac{\alpha[(X + \beta)\hat{i} + Y\hat{j}]}{((X + \beta)^2 + Y^2)^{3/2}} + \frac{\beta[(X - \alpha)\hat{i} + Y\hat{j}]}{(X - \alpha)^2 + Y^2)^{3/2}},$$

$$\Phi_{eff}(x, y) = -\frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - \frac{\alpha}{\sqrt{(X + \beta)^2 + Y^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{(X - \alpha)^2 + Y^2}}.$$

Ahora queremos encontrar los puntos críticos, en la dirección $\hat{i}$ y en la dirección $\hat{j}$. Para esto, se resuelve $\nabla\Phi_{eff} = 0$, lo que lleva al sistema de ecuaciones (9) y (10):

$$-X + \frac{\alpha(X + \beta)}{((X + \beta)^2 + Y^2)^{3/2}} + \frac{\beta(X - \alpha)}{((X - \alpha)^2 + Y^2)^{3/2}} = 0, \quad (9)$$

$$-Y + \frac{\alpha Y}{(X + \beta)^2 + Y^2)^{3/2}} + \frac{\beta Y}{((X - \alpha)^2 + Y^2)^{3/2}} = 0. \quad (10)$$

Los puntos de Lagrange corresponden a los puntos críticos de nuestro potencial efectivo. Vemos que de la ecuación (10), una solución es cuando $Y = 0$, por lo que solo nos quedaría por trabajar la ecuación (9) y así, nuestro grupo de puntos críticos tendrán la forma $(X, 0)$ lo que implicaría puntos colineales. En esta ecuación (9), tomando $Y = 0$, utilizamos el cambio de variable $X = (u + \alpha)$ y tomamos la relación en la cual $\alpha + \beta = 1$, teniendo como resultado:

$$-(u + \alpha) + \frac{\alpha(u + 1)}{((u + 1)^2)^{3/2}} + \frac{\beta u}{(u^2)^{3/2}} = 0.$$

Definiendo $S_0 = \frac{u}{(\sqrt{u})^2}$ y $S_1 = \frac{(u + 1)}{(\sqrt{u + 1})^2}$, la ecuación para los primeros tres puntos nos queda:

$$-(u + \alpha)(u + 1)^2 u^2 + \alpha S_1^2 u^2 + \beta S_0^3 (u + 1)^2 = 0. \quad (11)$$

Los tres casos que tenemos que resolver es cuando (S_0, S_1) toman los valores $(-1, 1)$, $(1, 1)$ y $(-1, -1)$, los cuales son las distintas combinaciones posibles de nuestra ecuación resultante. Para cada caso, utilizamos la herramienta de *Wolfram Mathematica 12* en la cual nos arrojó cinco raíces, un resultado coherente ya que nuestra ecuación es de quinto grado. De estas cinco soluciones solo tenemos una real y cuatro con términos imaginarios, por lo que la solución real es el valor buscado en nuestro problema. Dado que nuestra longitud es la unidad, vemos que siempre un valor obtenido es mayor a 1, otro valor es menor que 1 y el tercero es un valor negativo, estos corresponden a los puntos de Lagrange colineales (L_1, L_2, L_3) . Después procedemos a sustituirlo en nuestro cambio de variable $X = u + \alpha$, para así tener los puntos de Lagrange:

$$L_1 = (X_1, 0),$$

$$L_2 = (X_2, 0),$$

$$L_3 = (X_3, 0).$$

Para los puntos de Lagrange L_4 y L_5 tomamos las condiciones de que $X \neq 0$ y $Y \neq 0$. Realizando los cambios de variable $W = X + \beta$ y $Z = X - \alpha$ obtenemos:

$$-X + \frac{\alpha W}{(W^2 + Y^2)^{3/2}} + \frac{\beta Z}{(Z^2 + Y^2)^{3/2}} = 0, \quad (12)$$

$$-1 + \frac{\alpha}{(W^2 + Y^2)^{3/2}} + \frac{\beta}{(Z + Y^2)^{3/2}} = 0, \quad (13)$$

multiplicamos la ecuación (13) por W y restamos la (12), así, con ambas ecuaciones podemos obtener la siguiente:

$$-X + W + \frac{\beta(Z - W)}{(Z^2 + Y^2)^{3/2}} = 0,$$

y posteriormente obtener una expresión para Y :

$$Y = \sqrt{(-\alpha - \beta)^{2/3} - Z^2}.$$

Para X , multiplicamos la ecuación (13) por Z y la restamos con (12) para obtener:

$$-X + Z + \frac{\alpha(W - Z)}{(W^2 + y^2)^{3/2}} = 0,$$

realizando el álgebra correspondiente tenemos:

$$X = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2(\beta + \alpha)},$$

$$Y = \pm \sqrt{(-\alpha - \beta)^{2/3} - \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2(\beta + \alpha)} - \alpha \right)^2},$$

y simplificando esto, tenemos que los otros dos puntos de Lagrange están dados por:

$$L_4 = \left(\frac{\alpha - \beta}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$L_5 = \left(\frac{\alpha - \beta}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

A continuación, se presentan las figuras que muestran los cinco puntos de Lagrange de cada planeta con el Sol, los cuales están ubicados el día 24 de julio de 2021 con el potencial Newtoniano. Esto se realizó con los cálculos anteriores (los cuales se presentan posteriormente en una tabla) y sabiendo el ángulo de ascensión en ese día para cada planeta.

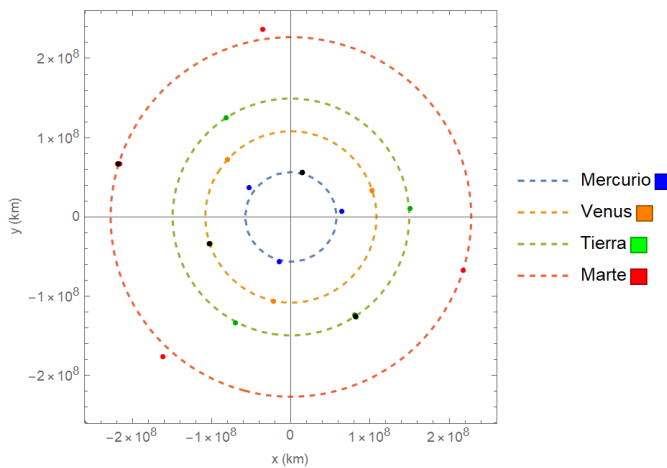


Figura 2: Puntos de Lagrange de los planetas interiores del Sistema Solar.

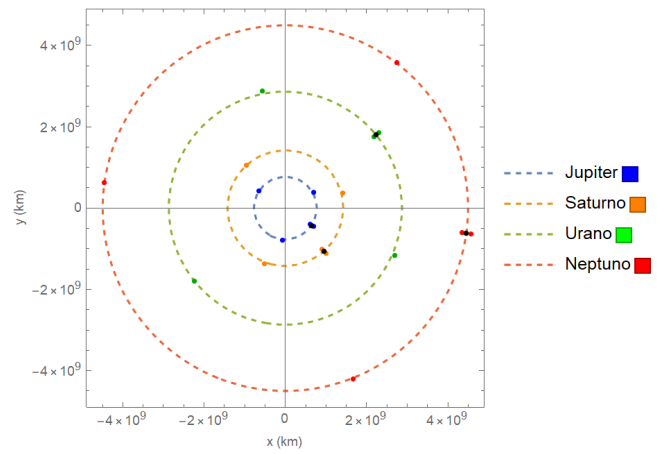


Figura 3: Puntos de Lagrange de los planetas exteriores del Sistema Solar.

Las siguientes figuras muestran los cinco puntos de Lagrange de cada planeta con su luna o lunas, las cuales están ubicadas en su afelio con el potencial Newtoniano.

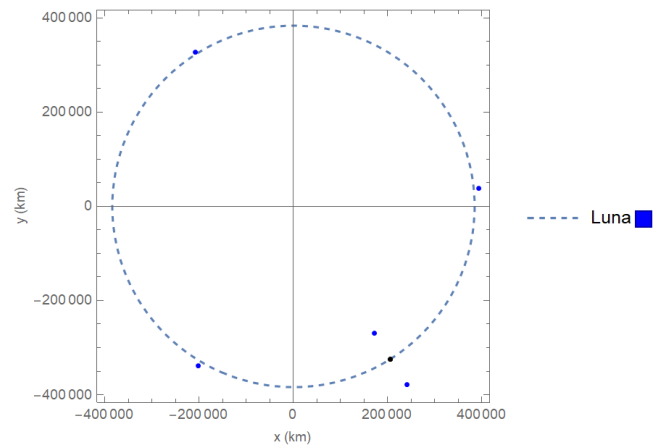


Figura 4: Puntos de Lagrange de la luna de la Tierra.

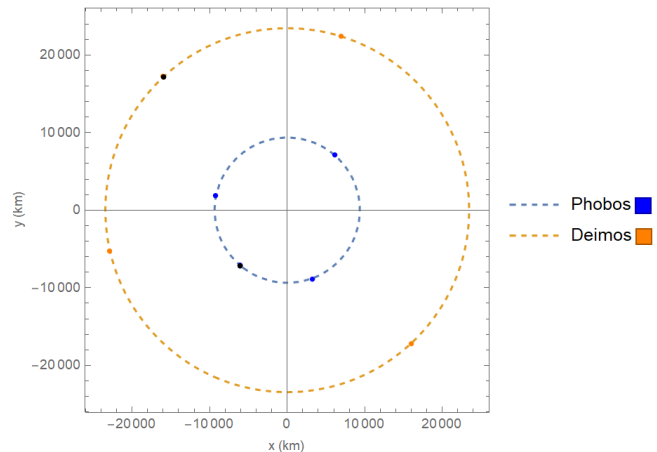


Figura 5: Puntos de Lagrange de las lunas de Marte.

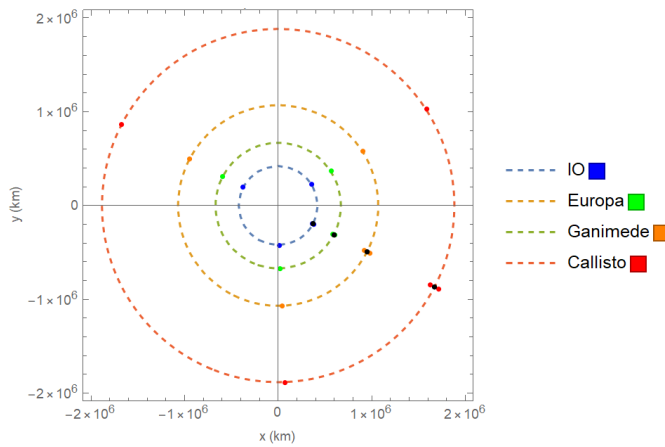


Figura 6: Puntos de Lagrange de las lunas de Júpiter.

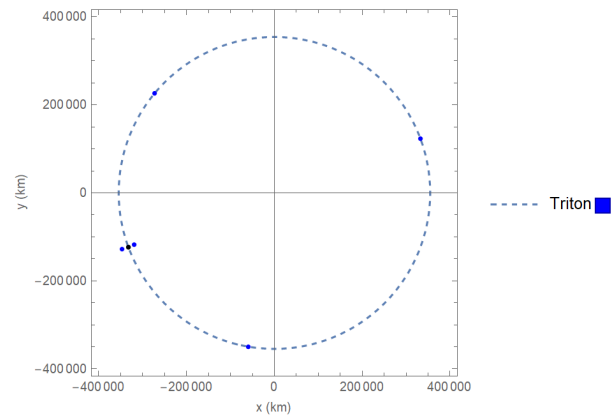


Figura 9: Puntos de Lagrange de la luna de Neptuno.

4. Obtención de los puntos de Lagrange con otros potenciales

La mecánica de Newton permitió estudiar el movimiento de los cuerpos celestes, sin embargo, en algunos casos las órbitas de los planetas calculados no concuerdan con los datos observados, como es el caso de Mercurio. Actualmente conocemos diferentes potenciales que describen un agujero negro giratorio, no giratorio o un cuerpo masivo en general [IP05].

En 1930, Georgi Manev propuso una solución considerando un potencial de interacción de la forma $A/r + B/r^2$, donde A y B son constantes, este potencial es para cambiar la mecánica celeste de acuerdo con la descripción relativista general, la cual consiste en describir el movimiento de una partícula con una masa pequeña en el campo estático de gravitación universal debido a una masa mayor [KHG13]; este modelo explica, con la misma precisión que la relatividad, el avance del perihelio de los planetas interiores, por ejemplo, el de Mercurio. El potencial de Manev es una alternativa al potencial Newtoniano, tiene una gran variedad de aplicaciones en astronomía, astrofísica, dinámica espacial, física clásica, mecánica e incluso física atómica y podría contribuir a una mejor comprensión de la conexión entre la mecánica cuántica, relativista y clásica [IP05].

El otro potencial con el que obtendremos los Puntos de Lagrange es el potencial de Schwarzschild, el cual tiene la forma $A/r + B/r^3$, donde A y B son constantes mayores a cero; el problema de Schwarzschild debe su nombre a Karl Schwarzschild, quien en 1916 fue el primero en proporcionar la solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales siguen siendo las más conocidas y utilizadas. Este problema explica la dinámica de una partícula de prueba en un agujero negro de simetría esférica, dados los efectos del campo gravitacional [MPCS03].

Se han hecho esfuerzos cualitativos para entender el problema de Schwarzschild desde dos marcos astrofísicos, como la dinámica de una posible partícula en el campo fotogravitacional de una estrella achatada que rota, o en el marco de una posible estrella que genera un campo de Schwarzschild [SM97].

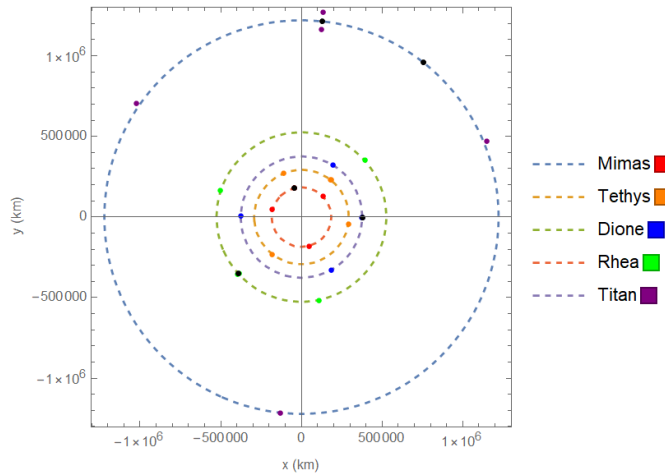


Figura 7: Puntos de Lagrange de las lunas de Saturno.

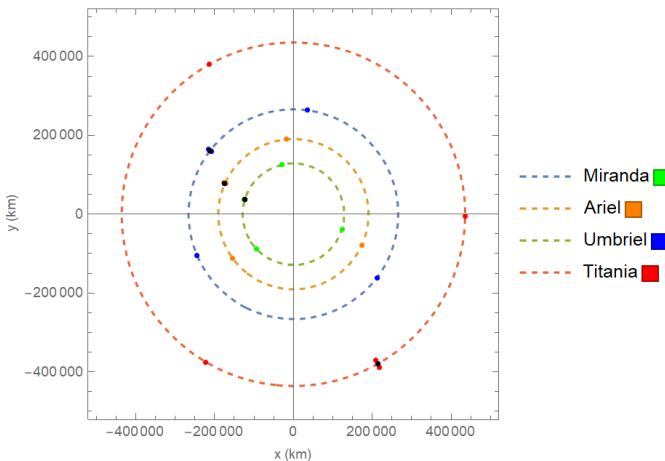


Figura 8: Puntos de Lagrange de las lunas de Urano.

4.1. Potencial de Manev

El potencial de Manev está dado por

$$V_M(r) = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{3G^2m_1m_2(m_1+m_2)}{2c^2r_{12}^2}.$$

Si calculamos el gradiente negativo del potencial para obtener las fuerzas F_{31} :

$$\begin{aligned} F_{31} &= -\frac{Gm_1m_3}{r_{31}^2}\hat{r}_{31} - \frac{3G^2m_1m_3(m_1+m_3)}{2c^2r_{31}^3}\hat{r}_{31} \\ &= -\frac{Gm_1m_3}{r_{31}^3}\vec{r}_{31} - \frac{3G^2m_1m_3(m_1+m_3)}{2c^2r_{31}^4}\vec{r}_{31}, \end{aligned}$$

de igual manera para F_{32} :

$$F_{32} = -\frac{Gm_2m_3}{r_{32}^2}\vec{r}_{32} - \frac{3G^2m_2m_3(m_2+m_3)}{2c^2r_{32}^4}\vec{r}_{32}.$$

Por lo tanto, la fuerza total sobre m_3 es:

$$\begin{aligned} F_{total} &= F_{31} + F_{32} \\ &= -\frac{Gm_3m_1}{r_{31}^3}\vec{r}_{31} - \frac{3G^2m_3m_1(m_3+m_1)}{2c^2r_{31}^4}\vec{r}_{31} \\ &\quad - \frac{Gm_3m_2}{r_{32}^3}\vec{r}_{32} - \frac{3G^2m_3m_2(m_3+m_2)}{2c^2r_{32}^4}\vec{r}_{32}. \end{aligned} \quad (14)$$

A partir de esto seguimos exactamente el mismo procedimiento que con el potencial Newtoniano, solamente para facilitar el cálculo, hacemos:

$$A_1 = Gm_1, \quad A_2 = Gm_2,$$

$$B_1 = \frac{3G^2m_1^2}{c^2}, \quad B_2 = \frac{3G^2m_2^2}{c^2}.$$

Con esto, la ecuación para encontrar los primeros tres puntos de Lagrange nos queda:

$$\begin{aligned} &-RG(m_1+m_2)(u+\alpha)(u+1)^3u^3 + S_1RA_1(u+1)u^3 \\ &+ S_0RA_2u(u+1)^3 + S_1RB_1u^3 + S_0RB_2(u+1)^3 = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

donde las soluciones se encuentran dado $(S_1, S_0) = (1, 1), (-1, -1), (1, -1)$.

Ahora para los puntos de Lagrange L_4 y L_5 para facilitar de nuevo el análisis definimos

$$C = \frac{A_1}{G(m_1+m_2)}, \quad D = \frac{A_2}{G(m_1+m_2)},$$

$$E = \frac{B_1}{RG(m_1+m_2)}, \quad F = \frac{B_2}{RG(m_1+m_2)}.$$

e igualmente siguiendo un procedimiento análogo al del potencial de neston obtenemos las siguientes ecuaciones

$$(X-\alpha)^2 + Y^2 = \left[\frac{\beta}{D} [(X-\alpha)^2 + Y^2]^2 - \frac{F}{D} \right]^2, \quad (16)$$

$$(X+\beta)^2 + Y^2 = \left[\frac{\alpha}{C} [(X+\beta)^2 + Y^2]^2 - \frac{E}{C} \right]^2. \quad (17)$$

Tomando las ecuaciones (16) y (17) realizamos en un software matemático la obtención de los puntos en los cuales estas dos ecuaciones se intersecan. En este caso, hay que descartar puntos negativos y puntos cerca de cero, quedando así solo un par de coordenadas posibles para cada planeta. Estos pares corresponden a los puntos L_4 y L_5 .

A continuación, se presentan las figuras que muestran los cinco puntos de Lagrange de cada planeta con el Sol, los cuales están ubicadas el día 24 de julio de 2021 con el potencial de Manev. Esto se realizó con los cálculos anteriores (los cuales se presentan posteriormente en una tabla) y sabiendo el ángulo de ascensión en ese día para cada planeta.

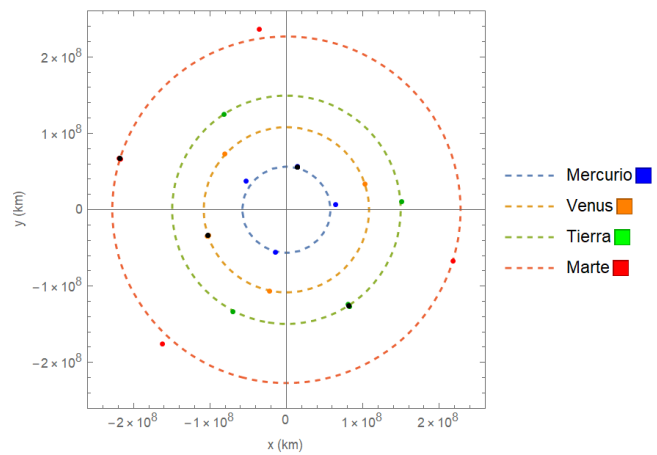


Figura 10: Puntos de Lagrange de los planetas interiores del Sistema Solar.

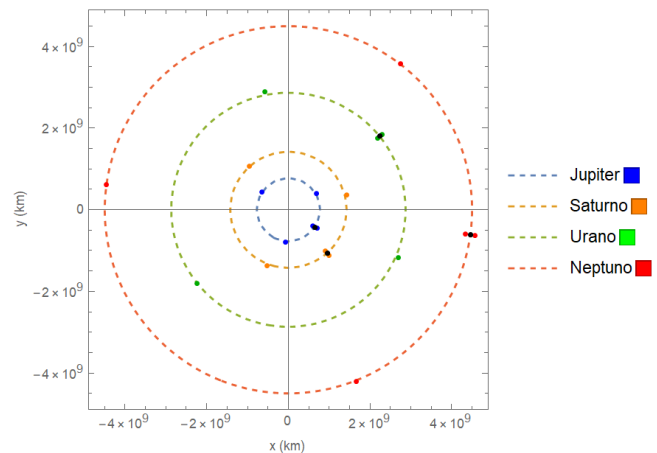


Figura 11: Puntos de Lagrange de los planetas exteriores del Sistema Solar.

Para continuar, se presentan las figuras que muestran los cinco puntos de Lagrange de cada planeta con su luna o lunas, los cuales están ubicadas en su afelio con el potencial de Manev.

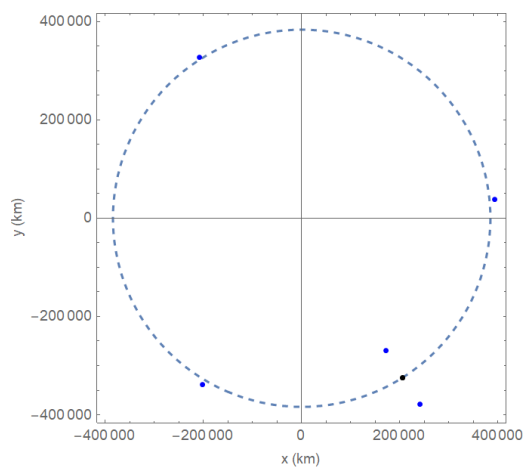


Figura 12: Puntos de Lagrange en la luna de la Tierra.

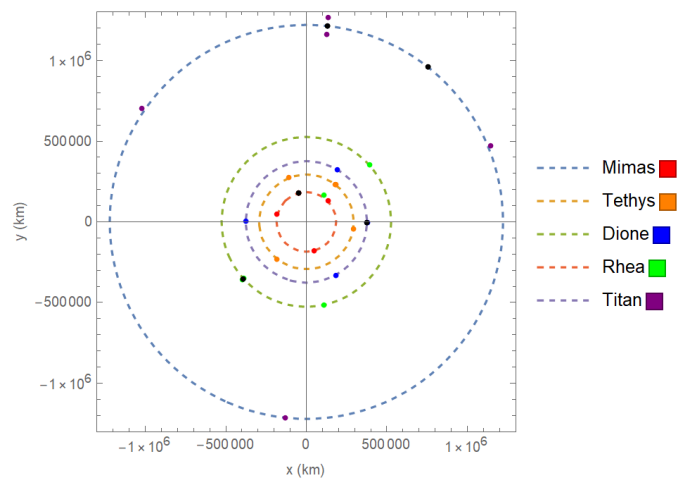


Figura 15: Puntos de Lagrange de las lunas de Saturno.

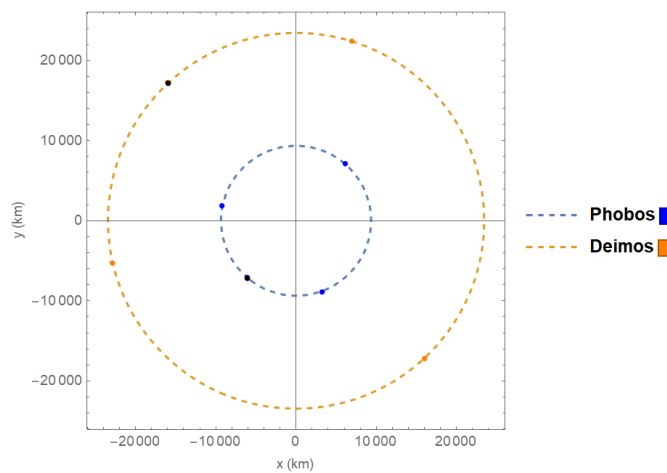


Figura 13: Puntos de Lagrange de las lunas de Marte.

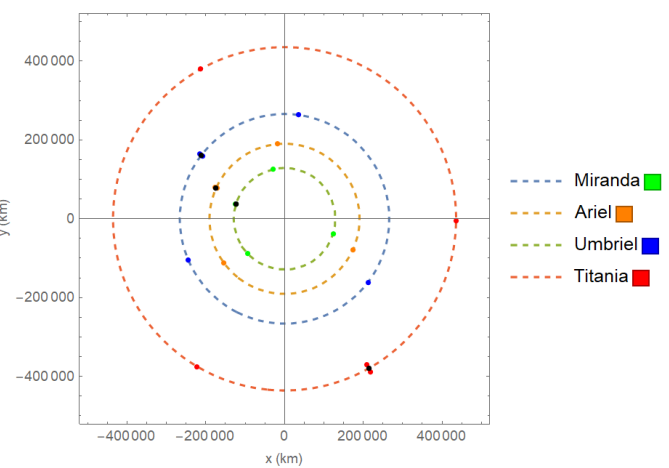


Figura 16: Puntos de Lagrange de las lunas de Urano.

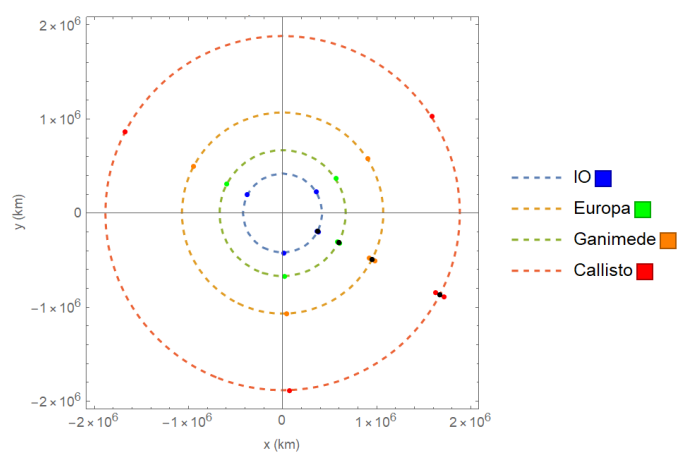


Figura 14: Puntos de Lagrange de las lunas de Júpiter.

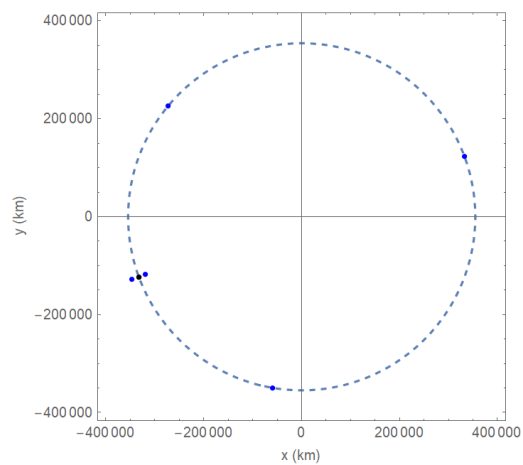


Figura 17: Puntos de Lagrange de la luna de Neptuno.

4.2. Potencial de Schwarzschild

El potencial de Schwarzschild tiene la forma

$$V_s(r) = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^3},$$

donde

$$A = Gm \quad B = \frac{r_s L^2}{2m^2} \quad r_s = \frac{2Gm}{c^2}.$$

Calculamos el gradiente negativo del potencial para obtener la fuerza:

$$F = -\nabla V = -\left[-\frac{A}{r^2} - \frac{B}{r^4}\right] = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r^4}.$$

Así, la fuerza total sobre m_3 es

$$F_T = F_{31} + F_{32},$$

$$F_{total} = -\frac{A_1}{r_{31}^2} \hat{r}_{31} - \frac{B_1}{r_{31}^4} \hat{r}_{31} - \frac{A_2}{r_{32}^2} \hat{r}_{32} - \frac{B_2}{r_{32}^4} \hat{r}_{32},$$

$$F_{total} = -\frac{A_1}{r_{31}^3} \vec{r}_{31} - \frac{B_1}{r_{31}^5} \vec{r}_{31} - \frac{A_2}{r_{32}^3} \vec{r}_{32} - \frac{B_2}{r_{32}^5} \vec{r}_{32}. \quad (18)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al del potencial Newtoniano, la ecuación para los primeros tres puntos de Lagrange nos queda:

$$-R^2 G(m_1 + m_2)(u + \alpha)(u + 1)^4 u^4 + A_1 S_1 R^2 (u + 1)^2 u^4 + A_2 S_0 R^2 u^2 (u + 1)^4 + B_1 S_1 u^4 + B_2 S_0 (u + 1)^4 = 0.$$

Donde las soluciones se encuentran dada la siguiente combinación: $(S_1, S_0) = (1, 1), (-1, -1), (1, -1)$. Para los últimos dos puntos de Lagrange obtenemos las ecuaciones

$$\left[\frac{D}{\beta} [(X - \alpha)^2 + Y^2] + \frac{F}{\beta}\right]^2 = [(X - \alpha)^2 + Y^2]^5, \quad (19)$$

$$\left[\frac{C}{\alpha} [(X + \beta)^2 + Y^2] + \frac{E}{\alpha}\right]^2 = [(X + \beta)^2 + Y^2]^5. \quad (20)$$

donde:

$$C = \frac{A_1}{G(m_1 + m_2)}, \quad D = \frac{A_2}{G(m_1 + m_2)},$$

$$E = \frac{B_1}{R^2 G(m_1 + m_2)}, \quad F = \frac{B_2}{R^2 G(m_1 + m_2)}.$$

Al igual que en el caso del Potencial de Manev, escribimos en un software las ecuaciones anteriores para encontrar los puntos de Lagrange L_4 y L_5 . Enseguida se presentan las figuras que muestran los cinco puntos de Lagrange de cada planeta con el Sol, los cuales están ubicadas el día 24 de julio de 2021 con el potencial de Schwarzschild. Esto se realizó con los cálculos anteriores (los cuales se presentan posteriormente en una tabla) y sabiendo el ángulo de ascensión en ese día para cada planeta

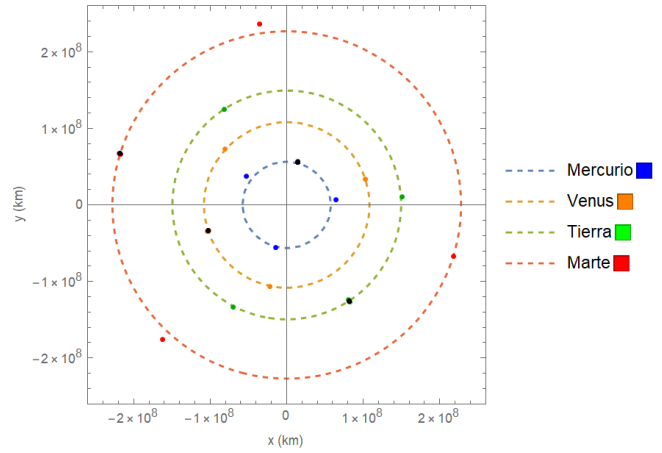


Figura 18: Puntos de Lagrange de los planetas interiores del Sistema Solar.

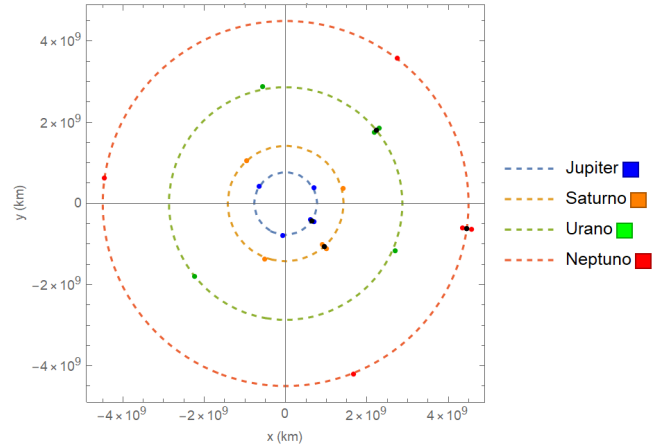


Figura 19: Puntos de Lagrange de los planetas exteriores del Sistema Solar.

Para concluir, se presentan las figuras que muestran los cinco puntos de Lagrange de cada planeta con su luna o lunas, los cuales están ubicadas en su afelio con el potencial de Schwarzschild.

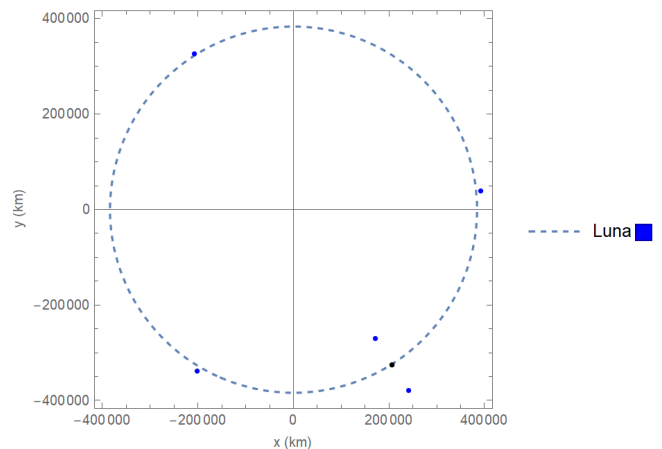


Figura 20: Puntos de Lagrange la luna de la Tierra.

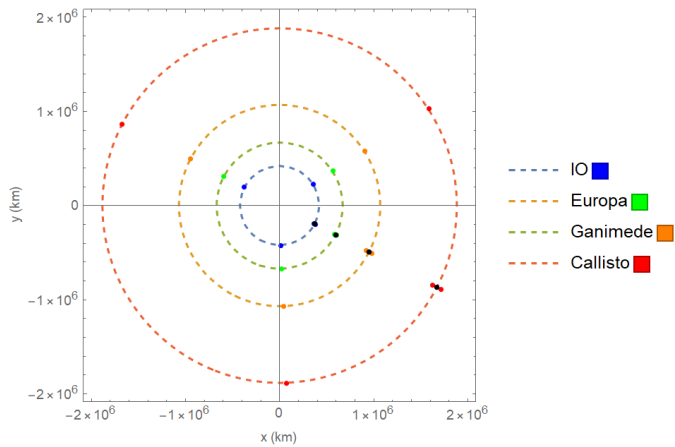


Figura 21: Puntos de Lagrange de las lunas de Júpiter.

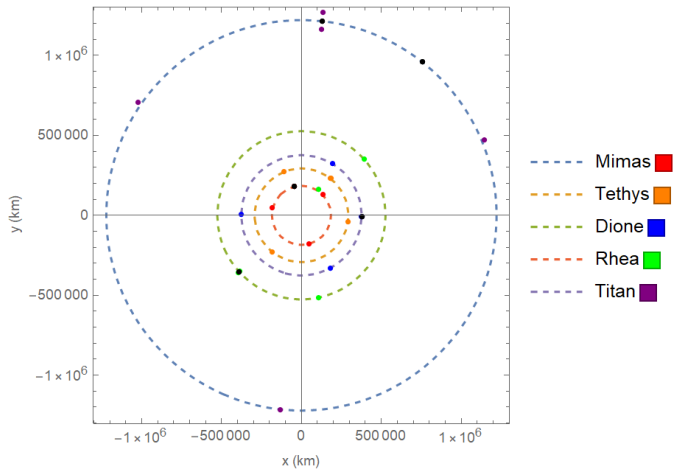


Figura 22: Puntos de Lagrange de las lunas de Saturno.

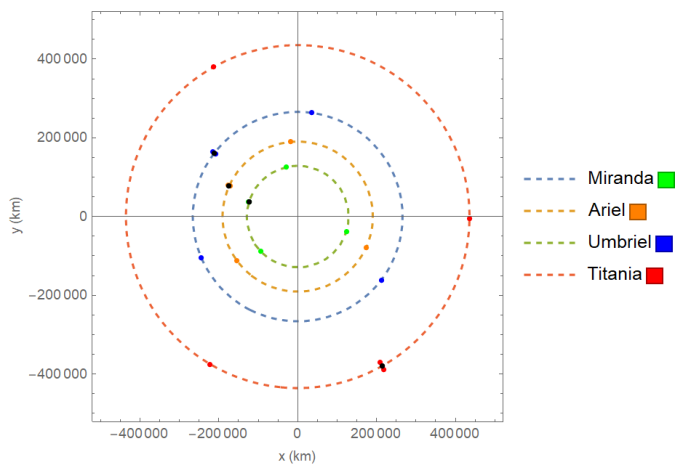


Figura 23: Puntos de Lagrange de las lunas de Urano.

Agradecimientos.

Los autores agradecen el apoyo y comentarios del Dr. John A. Arredondo y del revisor anónimo, quienes dedicaron su tiempo para que esta publicación fuera posible.

Referencias.

- [CO17] B. W. Carroll and D. A. Ostlie, *An introduction to modern astrophysics*, Cambridge University Press, 2017.
- [Kar07] Hannu Karttunen et al., *Fundamental astronomy*, Vol. 4, Springer, 2007.
- [Cha99] E. P. Chavela, *El sistema Solar bajo la mecánica celeste* (1999), 5-23.
- [RV18] J. C. Ramírez Villegas, *Puntos de Lagrange del sistema tierra-luna.*, 2018.
- [Mar98] B. Marion, *Dinámica clásica de partículas y sistemas* (1998).
- [IP05] Rossen Ivanov and Emil Prodanov, *Manev Potential and General Relativity* (2005).
- [KHG13] S. Kirk, I. Haranas, and I. Gkigkitzis, *Satellite motion in a Manev potential with drag* (2013), 313-320.
- [MPCS03] V. Mioc, E. Pérez-Chavela, and M. Stavinschi, *The anisotropic Schwarzschild-type problem, main features* (2003), 81-106.
- [SM97] C. Stoica and V. Mioc, *The Schwarzschild Problem in Astrophysics* (1997), 161-173.
- [RIH72] M. Rahman, M. Islam, and R. Huq, *Deep Space Communication and Exploration of Solar System through Inter-Lagrangian Data Relay Satellite Constellation* (1972).
- [Gre14] T. Greenspan, *Stability of the Lagrange Points, L4 and L5* (2014).
- [ZP] F. A. Zotes and M. S. Peñas, *Modelado y simulación con Modelica y Dymola de cinco satélites situados en los puntos de lagrange del sistema Tierra-Luna.*
- [MB99] V. Mioc and C. Blaga, *A class of relative equilibria in the manevfive-body problem* (1999), 41-48.

Acerca de los autores: Celia Alondra Guzmán May y Gustavo Ríos Segura son estudiantes de séptimo semestre de la Licenciatura en Física de la Universidad Veracruzana. A ella le gusta la música, tocar instrumentos y la natación; a él le gusta salir a pasear y jugar fútbol los fines de semana.

5. Apéndice

En los cuadros 1 y 2 se presentan los valores exactos para las posiciones de los puntos de Lagrange medidas en kilómetros, de los elementos del Sistema Solar que se han estudiado a lo largo de este documento. Considerando en cada caso los potenciales Newtoniano, de Manev y de Schwarzschild. Una inspección a estos valores permite ver que las correcciones de los potenciales de Manev y de Schwarzschild respecto del potencial Newtoniano son prácticamente despreciables en la gran mayoría de los casos.

En la siguiente tabla se muestran los puntos de Lagrange obtenidos con las ecuaciones anteriores las cuales se resolvieron con ayuda de *Wolfram Mathematica*.

Puntos de Lagrange en el Sistema Solar				
Planeta	Puntos de Lagrange	Potencial Newtoniano (Km)	Potencial de Manev (Km)	Potencial de Schwarzschild (Km)
Mercurio	L_1	70084461.5, 0	70084948.9, 0	70084458.9, 0
	L_2	-69818072.6, 0	-69816603.7, 0	-69818080.4, 0
	L_3	69552347.4, 0	69552839.3, 0	69552344.9, 0
	L_4	34909026.1, 60464227	34910502.7, 60465079.5	34909026.2, 60464227.1
	L_5	34909026, -60464227	34910502.7, -60465079.5	34909026.2, -60464227.1
Venus	L_1	109964362.49, 0	109964787, 0	109964302.49, 0
	L_2	-108943325.49, 0	-108942026, 0	-108943503.29, 0
	L_3	107928348.79, 0	107928789, 0	107928290.27, 0
	L_4	54471429.4, 94347745.1	54472905.9, 94348597.6	54471429.4, 94347745.1
	L_5	54471429.4, -94347745.1	54472905.9, -94348597.6	54471429.4, -94347745.1
Tierra	L_1	153624600, 0	153626528.8, 0	153626044.6, 0
	L_2	-152098205, 0	-152098570.7, 0	-152100047.3, 0
	L_3	150581476, 0	150583403.6, 0	150582903.3, 0
	L_4	76048703.17, 131721008.9	76050948.1, 131723192.5	76049471.6, 131722340.0
	L_5	76048703.17, -131721008.9	76050948.1, -131723192.5	76049471.6, -131722340.0
Marte	L_1	250419438, 0	250419908, 0	250419420, 0
	L_2	-249232280, 0	-249230857, 0	-249232333, 0
	L_3	248048795, 0	248049273, 0	248048777, 0
	L_4	124616061, 215841503	124617546.2, 215842355.9	124616069.7, 215841503.4
	L_5	124616061, -215841503	124617546.2, -215842355.9	124616069.7, -215841503.4
Júpiter	L_1	819383588, 0	872265726, 0	872265287, 0
	L_2	-815833517, 0	-816415943, 0	-816417419, 0
	L_3	811604307, 0	760897527, 0	760896976, 0
	L_4	407657172.2, 706757324	407269551.0, 706758178.0	407268075.9, 706757324.7
	L_5	407657172.2, -706757324	407269551.0, -706758178.0	407268075.9, -706757324.7
Saturno	L_1	1573399537.2, 0	1573298531.1, 0	1573298074.9, 0
	L_2	-1503895854.1, 0	-1504180964.7, 0	-1504182441.3, 0
	L_3	1436029381.4, 0	1435940338.9, 0	1435939807.9, 0
	L_4	751571818.4, 1302505097.3	751573294.5, 1302505950.0	751573294.5, 1302505950.0
	L_5	751571818.4, -1302505097.3	751573294.5, -1302505950.0	751573294.5, -1302505950.0
Urano	L_1	3080325656.3, 0	3080295998.7, 0	3080295526.2, 0
	L_2	-3006398906.3, 0	-3006484939.0, 0	-3006486415.6, 0
	L_3	2933528239.4, 0	2933500543.6, 0	2933500031.1, 0
	L_4	1503084599.0, 2603646246.8	1503086075.5, 2603647099.3	1503084599.0, 2603646246.8
	L_5	1503084599.0, -2603646246.8	1503086075.5, -2603647099.3	1503084599.0, -2603646246.8
Neptuno	L_1	4654803890.3, 0	4654750619.2, 0	4654750147.8, 0
	L_2	-4536880358.0, 0	-4537034685.5, 0	-4537036162.1, 0
	L_3	4420723023.6, 0	4420673412.7, 0	4420672898.9, 0
	L_4	2268235689.8, 3929104243.9	2268237166.3, 3929105096.4	2268235689.8, 3929104243.9
	L_5	2268235689.8, -3929104243.9	2268237166.3, -3929105096.4	2268235689.8, -3929104243.9

Cuadro 1: Puntos de Lagrange en el Sistema Solar respecto al afelio de los planetas.

A continuación se presenta la tabla de los puntos de Lagrange de los sistemas Planeta-Luna, esto solo para algunas de las lunas más representativas de los planetas.

Puntos de Lagrange de algunas lunas del Sistema Solar				
Luna(s) y planeta	P. L.	Potencial Newtoniano (Km)	Potencial de Manev (Km)	Potencial de Schwarzschild (Km)
Luna de la Tierra	L ₁	470015.93488873, 0	470015.93606371, 0	470015.93489151
	L ₂	-408758.97785629, 0	-408758.97341247, 0	-408758.97786926, 0
	L ₃	340373.38395151, 0	340373.38590365, 0	340373.38395800, 0
	L ₄	198408.35729997, 352212.53171913	198408.36168023, 352212.53431105	198408.35731282, 352212.53172655
	L ₅	198408.35729997, -352212.53171913	198408.36168022, -352212.53431105	198408.35731282, -352212.53172655
Deimos (Marte)	L ₁	23537.55853239, 0	23537.55869048, 0	1947116.39405027, 0
	L ₂	-23471.730645472, 0	-23471.73016896, 0	-1896226.28487357, 0
	L ₃	23406.02122686, 0	23406.02138644, 0	1845929.59970012, 0
	L ₄	11735.86345086, 20327.11445076	11735.86392789, 20327.11472679	947982.67697418, 1642141.06231851
	L ₅	11735.86345086, -20327.11445076	11735.86392710, -20327.11472541	947982.6769741, x
Phodos (Marte)	L ₁	9537.68368099, 0	9537.68368470, 0	*No se encontraron los datos necesarios para obtener las coordenadas con este potencial.
	L ₂	-9520.70006743, 0	-9520.70005628, 0	
	L ₃	9503.73616947, 0	9503.73617320, 0	
	L ₄	4760.34983814, 8245.16806181	4760.35031439, 8245.16833647	
	L ₅	4760.34983814, -8245.16806181	4760.35031527, -8245.16833798	
Calisto (Júpiter)	L ₁	1947116.31548168, 0	1947116.76492853, 0	1947116.39405027, 0
	L ₂	-1896226.03173192, 0	-1896224.62191772, 0	-1896226.28487357, 0
	L ₃	1845929.50911752, 0	1845930.00034673, 0	1845929.59970012, 0
	L ₄	947982.42384334, 1642140.91617338	947983.83356014, 1642141.73016574	947982.67697418, 1642141.06231851
	L ₅	947982.42384334, -1642140.91617338	947983.83356003, -1642141.73016555	947982.67697418, -1642141.06231851
Europa (Júpiter)	L ₁	690840.45815188, 0	690840.9124460146, 0	690840.6820115665, 0
	L ₂	-677046.05231327, 0	-677044.6425028192, 0	-677046.7612673464, 0
	L ₃	663389.20151049, 0	663389.6875270946, 0	663389.4509215987, 0
	L ₄	338502.57444813, 586332.97335281	338503.98420733, 586333.78731625	338503.28338928, 586333.38265960
	L ₅	338502.57444813, -586332.97335281	338503.98420709, -586333.78731585	338503.28338928, -586333.38265960
Ganimedes (Júpiter)	L ₁	1104128.7099277813, 0	1104129.1571789181, 0	1104128.8477931807, 0
	L ₂	-1072174.8418323093, 0	-1072173.4320115643, 0	-1072175.2895439232, 0
	L ₃	1040611.2412934585, 0	1040611.7349253537, 0	1040611.4027503239, 0
	L ₄	535986.37960239, 928500.47641344	535987.78928825, 928501.29042139	535986.82728791, 928500.73488466
	L ₅	535986.37960239, -928500.47641344	535987.78928810, -928501.29042112	535986.82728791, -928500.73488466
Ío (Júpiter)	L ₁	434357.31657466, 0	434357.76728367375, 0	434357.6697821525, 0
	L ₂	-423696.29683337, 0	-423694.88701424346, 0	-423697.4297310091, 0
	L ₃	413155.68797511, 0	413156.1778315735, 0	413156.0915703779, 0
	L ₄	211824.08759988, 366924.57127862	211825.49732527, 366925.38525681	211825.22045907, 366925.22533287
	L ₅	211824.08759988, -366924.57127862	211825.49732525, -366925.38525680	211825.22045907, -366925.22533287
Dione (Saturno)	L ₁	381410.83459801, 0	381410.9734410961, 0	381411.01445948065, 0
	L ₂	-378155.09937198, 0	-378154.67684491037, 0	-378155.6514336482, 0
	L ₃	374915.92049959, 0	374916.06336208206, 0	374916.1087689594, 0
	L ₄	189076.68150724, 327491.66336302	189077.10403140, 327491.90730763	189077.23356852, 327491.98209513
	L ₅	189076.68150724, -327491.66336302	189077.10403078, -327491.90730655	189077.23356852, -327491.98209513
Mimas (Saturno)	L ₁	189761.11330983, 0	189761.25353201473, 0	189761.4785650416, 0
	L ₂	-189230.40520383, 0	-189229.9826759504, 0	-189231.50841846157, 0
	L ₃	188700.65219602, 0	188700.79365885234, 0	188701.0224366614, 0
	L ₄	94615.18751079, 163878.33356829	94615.61003757, 163878.57751614	94616.29072858, 163878.97050642
	L ₅	94615.18751079, -163878.33356829	94615.61002959, -163878.5775022	94616.29072858, -163878.97050642
Rhea (Saturno)	L ₁	533441.06820078, 0	533441.2064599453, 0	533441.1962581311, 0
	L ₂	-527567.94125666, 0	-527567.5187297068, 0	-527568.3369704619, 0
	L ₃	521731.99886219, 0	521732.14232434914, 0	521732.13472117484, 0
	L ₄	263781.35698400, 456886.45883936	263781.77950805, 456886.70278581	263781.75269673, 456886.68730398
	L ₅	263781.35698400, -456886.45883936	263781.77950726, -456886.70278446	263781.75269673, -456886.68730398
Tethys (Saturno)	L ₁	296773.70375477, 0	296773.84293331, 0	296773.93547738, 0
	L ₂	-294660.13505235, 0	-294659.71252506, 0	-294660.84354367, 0
	L ₃	292555.71129929, 0	292555.85381920, 0	292555.95198432, 0
	L ₄	147329.67587435, 255183.04547912	147330.09839891, 255183.28942378	147330.38436594, 255183.45452561
	L ₅	147329.67587435, -255183.04547912	147330.09840029, -255183.28942619	147330.38436594, -255183.45452561
Titán (Saturno)	L ₁	1313175.31680690, 0	1313175.44776701, 0	1313175.36617180, 0
	L ₂	-1258610.71829266, 0	-1258610.296150792, 0	-1258610.884524345, 0
	L ₃	1204747.61797928, 0	1204747.76913715, 0	1204747.68009232, 0
	L ₄	628940.48609533, 1089879.89367911	628940.90811847, 1089880.13745107	628940.65229711, 1089879.98963574
	L ₅	628940.48609533, -1089879.89367911	628940.90811853, -1089880.13745120	628940.65229711, -1089879.98963574

Luna(s) y planeta	P. L.	Potencial Newtoniano (Km)	Potencial de Manev (Km)	Potencial de Schwarzschild (Km)
Ariel (Urano)	L_1	194956.80817471, 0	194956.82904651, 0	194956.81249663, 0
	L_2	-191594.33726663, 0	-191594.272796605, 0	-191594.35085183, 0
	L_3	188262.16893427, 0	188262.19105725, 0	188262.17367820, 0
	L_4	95793.46456008, 165924.45714879	95793.52902887, 165924.49437109	95793.47814512, 165924.464992120
	L_5	95793.46456008, -165924.45714879	95793.52902884, -165924.49437103	95793.47814512, -165924.46499212
Miranda (Urano)	L_1	130615.18410934, 0	130615.20537021, 0	130615.19068081, 0
	L_2	-129778.21325935, 0	-129778.14878947, 0	-129778.23331511, 0
	L_3	128944.53267503, 0	128944.55439586, 0	128944.53947589, 0
	L_4	64888.98117754, 112391.19207665	64889.04564722, 112391.22929824	64889.00123329, 112391.20365584
	L_5	64888.98117754, -112391.1920766	64889.04564732, -112391.22929840	64889.00123329, -112391.20365584
Titania (Urano)	L_1	447289.26084739, 0	447289.28149580, 0	447289.26271080, 0
	L_2	-436789.28138350, 0	-436789.21691323, 0	-436789.28734272, 0
	L_3	426404.99581968, 0	426405.01818039, 0	426404.99793648, 0
	L_4	218373.00267958, 378264.15203120	218373.06714664, 378264.18925422	218373.00863861, 378264.15547165
	L_5	218373.00267958, -378264.15203120	218373.06714675, -378264.18925440	218373.00863861, -378264.15547165
Umbriel (Urano)	L_1	272124.90711726, 0	272124.92801560, 0	272124.91021755, 0
	L_2	-267633.06116189, 0	-267632.99669190, 0	-267633.07088730, 0
	L_3	263180.42222192, 0	263180.44431704, 0	263180.42561118, 0
	L_4	133812.00321145, 231775.67785293	133812.06768038, 231775.71507517	133812.01293676, 231775.68346784
	L_5	133812.00321145, -231775.67785293	133812.06768053, -231775.71507541	133812.01293676, -231775.68346784
Tritón (Neptuno)	L_1	369503.86922264, 0	369503.89289348, 0	369503.87075531, 0
	L_2	-354791.03498247, 0	-354790.95891698, 0	-354791.04011745, 0
	L_3	340268.72135585, 0	340268.7485079158, 0	340268.72326510, 0
	L_4	177305.51604163, 307231.17224656	177305.59208845, 307231.21617066	177305.52117580, 307231.17521078
	L_5	177305.51604163, -307231.17224656	177305.59208843, -307231.21617063	177305.52117580, -307231.17521078

Cuadro 2: Puntos de Lagrange en los sistemas planeta-luna respecto a su afelio.

TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER

Juan Pablo Hernández Rodas^{*}
jphernand@unal.edu.co

1. Introducción

El teorema del punto fijo de Brouwer afirma que toda función continua del disco en el disco deja un punto fijo, es decir, si

$$B_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

y

$$f : B_n \rightarrow B_n$$

es una función continua, entonces existe $x \in B_n$ tal que $f(x) = x$.

Cuando $n = 1$, se puede ver que este teorema se sigue del teorema del valor intermedio, donde para $n = 1$ tenemos que $B_1 = [0, 1]$ y por lo tanto el teorema afirma que toda función continua $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ deja un punto fijo, es decir, existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

El teorema del punto fijo de Brouwer ha tenido muchas aplicaciones en diferentes áreas de la matemática, por ejemplo, aplicaciones en teoría de juegos, en economía, en ecuaciones diferenciales y en geometría diferencial. En esta última área permitió demostrar el teorema de invarianza de dominio, teorema fundamental en el estudio de manifolds o variedades topológicas.

2. Teorema del valor intermedio

Recordemos lo que afirma el teorema del valor intermedio.

Teorema 1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $f(a)f(b) \leq 0$, entonces existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

La demostración del teorema del valor intermedio se sigue de dos hechos importantes. Uno de ellos es que $\mathbb{R}$ es un continuo lineal y por lo tanto todo intervalo en $\mathbb{R}$ es un conjunto conexo. El otro, es que toda función continua envía conjuntos conexos en conexos.

El lector que esté interesado en la prueba del teorema del valor intermedio, puede consultar por ejemplo [Mun00].

Ahora supongamos que tenemos una función continua $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Si consideramos la función $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(x) - x$, tenemos que g es continua y $g(0) = f(0) \geq 0$, $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Así, por el teorema del valor intermedio, existe $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$. En otras palabras, $f(c) - c = 0$, es decir, $f(c) = c$.

3. Grupos abelianos libres

Dado un conjunto no vacío A , definimos el grupo abeliano libre generado por el conjunto A , como

$$\mathbb{Z}^A = \{f : A \rightarrow \mathbb{Z} : f(a) \neq 0 \text{ para finitos valores de } a \in A\},$$

con la suma estándar de funciones, es decir, si $f, g \in \mathbb{Z}^A$, entonces $f + g \in \mathbb{Z}^A$, donde $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$.

No es difícil ver que $\mathbb{Z}^A$ con la suma estándar de funciones, es un grupo abeliano. Además, se dice que $\mathbb{Z}^A$ es un grupo abeliano libre generado por A , ya que el subconjunto $\mathcal{B} = \{\delta_a : a \in A\} \subset \mathbb{Z}^A$ es una base para $\mathbb{Z}^A$, donde $\delta_a : A \rightarrow \mathbb{Z}$ es la función definida como $\delta_a(a) = 1$ y $\delta_a(x) = 0$ para todo $x \neq a$.

Veamos que en efecto $\mathcal{B} = \{\delta_a : a \in A\}$ es una base para $\mathbb{Z}^A$.

Consideremos $f \in \mathbb{Z}^A$. Podemos escribir

$$f = \sum_{a \in A} f(a)\delta_a,$$

donde la sumatoria es finita ya que $f(x) \neq 0$ para finitos valores de $x \in A$. Esto muestra que el conjunto $\mathcal{B}$ genera a $\mathbb{Z}^A$.

Por otro lado, si $n_1\delta_{a_1} + \dots + n_k\delta_{a_k} \equiv 0$, donde $a_i \neq a_j$ para todo $i \neq j$, entonces al evaluar en a_i obtenemos que $n_i = 0$. Luego $n_1 = 0, \dots, n_k = 0$, lo que muestra que $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente.

Es un abuso de notación decir que A es una base para $\mathbb{Z}^A$, ya que realmente es $\mathcal{B}$ quien es una base. Sin embargo, los elementos del grupo $\mathbb{Z}^A$ se acostumbran denotar como

$$\sum_{i=1}^k n_i a_i,$$

donde a_i se está identificando con la función δ_{a_i} , y por esta razón es que se dice que A es una base para $\mathbb{Z}^A$.

Teorema 2 (Propiedad universal de los grupos abelianos libres). Sea $\mathbb{Z}^A$ un grupo abeliano libre con base A . Dada una función $\phi : A \rightarrow G$ donde G es un grupo, existe un único homomorfismo de grupos $\psi : \mathbb{Z}^A \rightarrow G$, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & G \\ \tau \downarrow & \nearrow \psi & \\ \mathbb{Z}^A & & \end{array}$$

^{*}Departamento de Matemática y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales.

es decir, $\psi \circ \tau = \varphi$, donde $\tau : A \rightarrow \mathbb{Z}^A$ es la función definida como $\tau(a) = a$ para todo $a \in A$.

De este último teorema se puede observar que, para definir un homomorfismo de grupos de un grupo abeliano libre en otro grupo, basta decir dónde se van los elementos de la base.

4. Invariantes topológicos

Dados dos espacios topológicos X y Y , algo de mucho interés para los topólogos es saber si estos espacios son homeomorfos.

Recordemos que un homeomorfismo entre dos espacios topológicos X y Y es una biyección $f : X \rightarrow Y$ que es continua y tiene inversa continua, es decir, una biyección que envía abiertos en abiertos y devuelve abiertos en abiertos.

Saber cuándo dos espacios topológicos X y Y no son homeomorfos puede ser muy difícil usando simplemente la definición, ya que esto implicaría demostrar que no existe ningún homeomorfismo de X en Y . Una manera de determinar cuándo dos espacios topológicos no son homeomorfos es usando invariantes topológicos.

Un invariante topológico es una propiedad que se preserva bajo homeomorfismos. Por ejemplo, la conexidad, la arco-conexidad y la compacidad son invariantes topológicos, ya que una función continua envía conexos en conexos, arco-conexos en arco-conexos y compactos en compactos.

Ejemplo 1. Si $X = (0, 1) \cup (1, 2)$ y $Y = (0, 1)$ son espacios topológicos con la topología de subespacio que heredan de $\mathbb{R}$, entonces X no puede ser homeomorfo a Y , ya que X no es conexo mientras que Y sí lo es.

Tener estos invariantes topológicos no es suficiente para determinar cuándo dos espacios topológicos no son homeomorfos, ya que podríamos tener dos espacios que sean arco-conexos y por lo tanto conexos y que además sean compactos, sin ser homeomorfos. Por ejemplo, si consideramos $X = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y $Y = S^1 \times S^1$, donde $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, tenemos que estos dos espacios topológicos son arco-conexos y compactos, pero no son homeomorfos.

La topología algebraica nació debido a la búsqueda de invariantes topológicos más sofisticados que permitieran resolver muchos de estos problemas. Estos invariantes son una familia de grupos que se le asocian a un espacio topológico y que se preservan bajo homeomorfismos.

Para nuestro interés que es la prueba del teorema del punto fijo de Brouwer, hablaremos de uno de estos invariantes, conocido como la homología singular.

4.1. Homología singular

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Delta_n = \left\{ (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_j \geq 0 \text{ y } \sum_{j=0}^n t_j = 1 \right\}.$$

Dado un espacio topológico X , definamos una n -celda singular como una función continua $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$.

Denotemos por $C_n(X)$ al grupo libre abeliano generado por el conjunto C_n de todas la n -celdas singulares, es decir, los elementos de $C_n(X)$ tienen la forma

$$\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i,$$

donde $n_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$ y σ_i son n -celdas singulares, para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

En esta escritura hay un abuso de notación, ya que σ_i no representa una n -celda singular, representa una función $\varphi_i : C_n \rightarrow \mathbb{Z}$ definida como $\varphi_i(\sigma_i) = 1$ y $\varphi(\sigma) = 0$ para todo $\sigma \neq \sigma_i$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ queremos definir un homomorfismo de grupos $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ con la propiedad:

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para definir $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$, basta definir ∂_n en la base de $C_n(X)$, es decir, en los elementos de C_n . Consideremos una n -celda singular $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$. Para cada $i = 0, 1, \dots, n$ definamos $T_i : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$ como

$$T_i(t_0, \dots, t_i, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}).$$

Claramente cada T_i es continua y por lo tanto $\sigma \circ T_i : \Delta_{n-1} \rightarrow X$ es continua, es decir, $\sigma \circ T_i \in C_{n-1}(X)$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$. Definamos

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ T_i.$$

En general, $\partial_n(\sum_{j=1}^k n_j \sigma_j) = \sum_{j=1}^k n_j \partial_n(\sigma_j)$.

Veamos que con esta definición de los homomorfismos de grupos ∂_n , se tiene que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.

En efecto, consideremos $\sigma : \Delta_{n+1} \rightarrow X$ una $(n+1)$ -celda singular, entonces tenemos que

$$\partial_n(\partial_{n+1}(\sigma)) = \partial_n \left(\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \sigma \circ T_j \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^i (-1)^j \sigma \circ T_j \circ T_i.$$

Denotemos $A = \{(i, j) : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n+1\}$. Con esta notación podemos escribir

$$\partial_n(\partial_{n+1}(\sigma)) = \sum_{(i,j) \in A} (-1)^i (-1)^j \sigma \circ T_j \circ T_i.$$

Notemos que si $i < j$ y $1 \leq j \leq n+1$, se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma \circ T_j \circ T_i(t_0, \dots, t_i, \dots, t_j, \dots, t_{n-1}) &= \\ = \sigma(T_j(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_j, \dots, t_{n-1})) &= \\ = \sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{j-2}, 0, t_{j-1}, t_j, \dots, t_{n-1}), \end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned}\sigma \circ T_i \circ T_{j-1}(t_0, \dots, t_i, \dots, t_j, \dots, t_{n-1}) &= \\ &= \sigma(T_i(t_0, \dots, t_i, \dots, t_{j-2}, 0, t_{j-1}, \dots, t_{n-1})) = \\ &= \sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{j-2}, 0, t_{j-1}, t_j, \dots, t_{n-1}).\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\sigma \circ T_j \circ T_i = \sigma \circ T_i \circ T_{j-1} \quad (1)$$

para todo $(i, j) \in A$ con $i < j$ y $1 \leq j \leq n+1$.

Ahora, si $i \geq j$ y $0 \leq j \leq n$, se tiene que

$$\begin{aligned}\sigma \circ T_j \circ T_i(t_0, \dots, t_j, \dots, t_i, \dots, t_{n-1}) &= \\ &= \sigma(T_j(t_0, \dots, t_j, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})) = \\ &= \sigma(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\sigma \circ T_{i+1} \circ T_j(t_0, \dots, t_j, \dots, t_i, \dots, t_{n-1}) &= \\ &= \sigma(T_{i+1}(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_i, \dots, t_{n-1})) = \\ &= \sigma(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}).\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\sigma \circ T_j \circ T_i = \sigma \circ T_{i+1} \circ T_j, \quad (2)$$

para todo $(i, j) \in A$ con $i \geq j$ y $0 \leq j \leq n$.

Si $A_1 = \{(i, j) \in A : i < j \text{ y } 1 \leq j \leq n+1\}$ y $A_2 = \{(i, j) \in A : i \geq j \text{ y } 0 \leq j \leq n\}$, veamos que existe una biyección entre A_1 y A_2 .

En efecto, definamos $\psi : A_1 \rightarrow A_2$ como $\psi(i, j) = (j-1, i)$. Notemos que ψ está bien definida, ya que si $i \leq j$ y $1 \leq j \leq n+1$, entonces $j-1 \geq i$, ya que si $j-1 < i$, como $i < j$ se sigue que $j-1 < i < j$, lo cual es absurdo, ya que i es un número natural. Además, como $1 \leq j \leq n+1$ entonces $0 \leq j-1 \leq n$ y $0 \leq i \leq n$.

Por otro lado, definamos $\phi : A_2 \rightarrow A_1$ como $\phi(i, j) = (j, i+1)$. Note que ϕ está bien definida, ya que $i \geq j$ implica que $j < i+1$, pues de lo contrario, $j \geq i+1$ e $i \geq j$ implica que $j \geq i+1 \geq j+1$, lo cual es absurdo. Además, como $0 \leq j \leq n$ entonces $1 \leq j+1 \leq n+1$ y $0 \leq i \leq n$.

Además, $\phi \circ \psi = id$ y $\psi \circ \phi = id$, lo que prueba que $\psi : A_1 \rightarrow A_2$ es una biyección.

Notemos que $A_1 \cup A_2 = A$, ya que dado $(i, j) \in A$ se tiene que $i < j \vee i \geq j$. Si $i < j$ entonces $1 \leq j \leq n+1$ y por lo tanto $(i, j) \in A_1$, y si $i \geq j$ entonces $0 \leq j \leq n$ y por lo tanto $(i, j) \in A_2$.

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j) \in A} (-1)^i (-1)^j \sigma \circ T_j \circ T_i &= \sum_{(i,j) \in A_1} (-1)^i (-1)^j \sigma \circ T_j \circ T_i \\ &+ \sum_{(i,j) \in A_2} (-1)^i (-1)^j \sigma \circ T_j \circ T_i.\end{aligned}$$

Por la biyección entre A_1 y A_2 tenemos que todo elemento $(i, j) \in A_2$ se puede escribir de manera única como $\phi(k, l)$ con $(k, l) \in A_1$, es decir, todo $(i, j) \in A_2$ se puede escribir como $(l-1, k)$ para cierto $(k, l) \in A_1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j) \in A_2} (-1)^i (-1)^j \sigma \circ T_j \circ T_i &= \\ &= \sum_{(l-1,k) : (k,l) \in A_1} (-1)^{l-1} (-1)^k \sigma \circ T_k \circ T_{l-1},\end{aligned}$$

en otras palabras,

$$\sum_{(i,j) \in A_2} (-1)^i (-1)^j \sigma \circ T_j \circ T_i = \sum_{(i,j) \in A_1} (-1)^{j-1} (-1)^i \sigma \circ T_i \circ T_{j-1}.$$

Así,

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j) \in A} (-1)^i (-1)^j \sigma \circ T_j \circ T_i &= \sum_{(i,j) \in A_1} (-1)^i (-1)^j \sigma \circ T_j \circ T_i \\ &+ (-1)^{j-1} (-1)^i \sigma \circ T_i \circ T_{j-1}.\end{aligned}$$

Pero como vimos en la ecuación 1, para todo $(i, j) \in A_1$ se tiene que $\sigma \circ T_j \circ T_i = \sigma \circ T_i \circ T_{j-1}$, lo que implica que

$$(-1)^i (-1)^j \sigma \circ T_j \circ T_i + (-1)^{j-1} (-1)^i \sigma \circ T_i \circ T_{j-1} = 0,$$

para todo $(i, j) \in A_1$. Esto nos permite concluir que

$$\sum_{(i,j) \in A} (-1)^i (-1)^j \sigma \circ T_j \circ T_i = 0,$$

es decir, $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.

Con esto, tenemos un objeto conocido como un complejo cadena

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X) &\xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \\ \cdots &\xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0\end{aligned}$$

donde $\{\partial_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de homomorfismos de grupos, y $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ para todo $n \geq 0$.

Definición 1. Definimos un complejo cadena de grupos abelianos como un objeto de la forma

$$\begin{aligned}\longrightarrow G_{n+1} &\xrightarrow{\partial_{n+1}} G_n \xrightarrow{\partial_n} G_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \\ \cdots &\xrightarrow{\partial_2} G_1 \xrightarrow{\partial_1} G_0 \xrightarrow{0} 0\end{aligned}$$

donde $\{G_i\}_{i=0}^\infty$ es una familia de grupos abelianos y $\{\partial_i : G_i \rightarrow G_{i-1}\}_{i=0}^\infty$ es una familia de homomorfismos de grupos tales que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por comodidad, denotaremos un complejo cadena por $\{G_\bullet, \partial_\bullet\}$.

Definimos un morfismo entre los complejos cadena $\{G_\bullet, \partial_\bullet\}$ y $\{G'_\bullet, \partial'_\bullet\}$, como una colección de homomorfismos de grupos $\{\varphi_i : G_i \rightarrow G'_i\}_{i=0}^\infty$, tal que todos los cuadrados del siguiente diagrama conmutan,

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & G_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & G_n & \xrightarrow{\partial_n} & \cdots & \xrightarrow{\partial_2} G_1 \xrightarrow{\partial_1} G_0 \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \varphi_{n+1} & & \downarrow \varphi_n & & & \downarrow \varphi_1 \\ \longrightarrow & G'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & G'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & \cdots & \xrightarrow{\partial'_2} G'_1 \xrightarrow{\partial'_1} G'_0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

es decir, $\varphi_i \circ \partial_{i+1} = \partial'_{i+1} \circ \varphi_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Definición 2. Dado un complejo cadena de grupos abelianos $\{G_\bullet, \partial_\bullet\}$, definimos la n -ésima homología del complejo como

$$H_n(G_\bullet) = \frac{\ker(\partial_n)}{\text{im}(\partial_{n+1})}.$$

Note que como $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, entonces $\text{im}(\partial_{n+1}) \subset \ker(\partial_n)$. Así, como $\ker(\partial_n)$ es un subgrupo de G_n , y como estamos en el caso abeliano, entonces $\text{im}(\partial_{n+1})$ es un subgrupo normal del grupo $\ker(\partial_n)$, lo que implica que el cociente $\ker(\partial_n)/\text{im}(\partial_{n+1})$ es un grupo.

Retomemos la discusión de la homología singular.

Dado un espacio topológico X , construimos un complejo cadena de grupos abelianos, $\{C_\bullet(X), \partial_\bullet\}$, donde recordemos que $C_n(X)$ es el grupo abeliano libre generado por todas las n -celdas singulares, donde una n -celda singular es una función continua $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ y los homomorfismos frontera $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ están definidos como

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ T_i,$$

para $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$, n -celda singular.

La n -ésima homología singular de X se define como $H_n(C_\bullet(X))$, es decir, la n -ésima homología del complejo cadena

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \\ & & & & & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(X) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(X) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Por comodidad en la notación, de ahora en adelante denotaremos a $H_n(C_\bullet(X))$ simplemente por $H_n(X)$.

Veamos que estos grupos de homología son un invariante topológico, es decir, si X y Y son espacios topológicos homeomorfos, entonces $H_n(X)$ es isomorfo como grupo a $H_n(Y)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Comencemos observando que toda función continua entre espacios topológicos, $f : X \rightarrow Y$, se puede levantar a un morfismo de complejos cadena

$\{f_\bullet : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)\}$.

Definimos $f_n : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ como sigue. Sabemos que basta definir f_n en los generadores del grupo abeliano libre $C_n(X)$. Si $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ es una n -celda singular, definimos $f_n(\sigma) = f \circ \sigma$. Extendemos f_n de manera lineal, es decir,

$$f_n \left(\sum_{i=1}^k n_k \sigma_k \right) = \sum_{i=1}^k n_k (f \circ \sigma_k).$$

Probemos que $\{f_\bullet : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)\}$ es un morfismo de complejos cadena.

Para esto, vemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^X} & C_n(X) \\ f_{n+1} \downarrow & & \downarrow f_n \\ C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^Y} & C_n(Y) \end{array}$$

En efecto, tomemos $\sigma : \Delta_{n+1} \rightarrow X$ una $(n+1)$ -celda singular. Entonces,

$$f_n(\partial_{n+1}^X(\sigma)) = f_n \left(\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \sigma \circ T_i \right) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f \circ \sigma \circ T_i.$$

Por otro lado,

$$\partial_{n+1}^Y(f_{n+1}(\sigma)) = \partial_{n+1}^Y(f \circ \sigma) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f \circ \sigma \circ T_i.$$

Por lo tanto, $f_n \circ \partial_{n+1}^X = \partial_{n+1}^Y \circ f_{n+1}$, para todo $n \geq 0$.

Supongamos que tenemos $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Veamos que f induce un homomorfismo de grupos entre las homología singular de X y Y , que denotaremos por $H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ para todo $n \geq 0$.

Por lo anterior, sabemos que tenemos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n^X} & C_{n-1}(X) \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n-1} \\ C_n(Y) & \xrightarrow{\partial_n^Y} & C_{n-1}(Y) \end{array}$$

Observemos que si $\sigma \in \ker(\partial_n^X)$ entonces $f_n(\sigma) \in \ker(\partial_n^Y)$, ya que $\partial_n^Y(f_n(\sigma)) = f_{n-1}(\partial_n^X(\sigma)) = f_{n-1}(0) = 0$. Así tenemos un homomorfismo de anillos

$$\ker(\partial_n^X) \xrightarrow{f_n} \ker(\partial_n^Y) \xrightarrow{\pi} \frac{\ker(\partial_n^Y)}{\text{im}(\partial_{n+1}^Y)}$$

dado por $\sigma \mapsto \overline{f_n(\sigma)}$. Ahora, observemos que si $\sigma \in \text{im}(\partial_{n+1}^X)$, entonces $\sigma = \partial_{n+1}^X(\gamma)$, por lo tanto, $f_n(\sigma) =$

$f_n(\partial_{n+1}^X(\gamma)) = \partial_{n+1}^Y(f_{n+1}(\gamma)) \in \text{im}(\partial_{n+1}^Y)$, es decir, $\overline{f_n(\sigma)} = 0$. Luego este último homomorfismo induce un homomorfismo de grupos

$$H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

dado por $H_n(f)(\sigma) = \overline{f_n(\sigma)}$.

4.2. Algunas propiedades de la homología singular

Comencemos analizando cómo son los grupos de homología de un espacio topológico con un solo punto.

Supongamos que $X = \{x_0\}$. Notemos que $C_n(X)$ es el grupo libre generado por la única n -celda singular, $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ definida como $\sigma(t) = x_0$. En otras palabras, $C_n(X) \cong \mathbb{Z}$ para todo $n \geq 0$.

Computemos los grupos $H_n(X)$. Si n es impar, tenemos

$$C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X),$$

donde $\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ T_i$. Como $\sigma \circ T_i = \sigma \circ T_j$ para todo $0 \leq i, j \leq n$, entonces realmente tenemos que $\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \gamma = (\gamma - \gamma) + (\gamma - \gamma) + \cdots + (\gamma - \gamma) = 0$. Esto implica que $\ker(\partial_n) = C_n(X)$. Ahora, si tomamos $\sigma \in C_n(X)$ su generador, es decir, $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ está definida como $\sigma(t) = x_0$, entonces al considerar $\tau : \Delta_{n+1} \rightarrow X$ el generador del grupo $C_{n+1}(X)$, definido como $\tau(t) = x_0$, observemos que

$$\partial_{n+1}(\tau) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \tau \circ T_i,$$

pero $\tau \circ T_i = \sigma$ para todo $i = 0, 1, \dots, n+1$, es decir,

$$\partial_{n+1}(\tau) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma + \sigma = \sigma.$$

Esto muestra que $\text{im}(\partial_{n+1}) = C_n(X)$. Así tenemos que $H_n(X) = \frac{\ker(\partial_n)}{\text{im}(\partial_{n+1})} = \{0\}$.

Si n es par, entonces si $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ es el generador del grupo $C_n(X)$, tenemos que

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ T_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i \gamma = \gamma,$$

donde $\gamma : \Delta_{n-1} \rightarrow X$ es el generador del grupo $C_{n-1}(X)$.

Por lo tanto, $\partial_n(k\sigma) = 0$ implica que $k\gamma = 0$, es decir, $k = 0$ y por lo tanto $k\sigma = 0$. En otras palabras, $\ker(\partial_n) = \{0\}$. Luego, $H_n(X) = \frac{\ker(\partial_n)}{\text{im}(\partial_{n+1})} = \{0\}$.

Finalmente, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$, ya que en este caso como vimos arriba, $\text{im}(\partial_1) = \{0\}$ y claramente $\ker(0) = C_0(X)$,

$$C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{0} 0$$

por lo tanto $H_0(X) = C_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

En general, se puede ver que $H_0(X)$ cuenta el número de componentes arco-conexas del espacio topológico X .

El lector interesado en ver por qué la 0-homología singular de un espacio topológico X cuenta el número de componentes arco-conexas de X , puede consultar por ejemplo [Mun18].

Observación 1. Sean X, Y y Z espacios topológicos. Se tiene que:

- i) Si $id : X \rightarrow X$ es la función identidad, entonces $H_n(id) : H_n(X) \rightarrow H_n(X)$ es el homomorfismo identidad.
- ii) Si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ son funciones continuas, entonces $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$.

Esta última observación en el lenguaje de categorías quiere decir que para cada $n \geq 0$, H_n define un functor covariante de la categoría de espacios topológicos en la categoría de grupos abelianos, y esto nos permite probar de manera sencilla el siguiente resultado.

Proposición 1. Si X y Y son espacios topológicos homeomorfos, entonces $H_n(X) \cong H_n(Y)$ para todo $n \geq 0$.

Demostración. Como X es homeomorfo a Y , entonces tenemos funciones continuas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $f \circ g = id$ y $g \circ f = id$. Por lo tanto, para todo $n \geq 0$ tenemos que $H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g) = H_n(id) = id$ y de igual forma $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f) = id$. Así tenemos que $H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ es un isomorfismo de grupos. $\square$

De esta proposición, se sigue que los grupos de homología singular definen un invariante topológico.

Una propiedad muy interesante de la homología singular es que también es invariante bajo homotopías, es decir, si un espacio topológico es homotópicamente equivalente a otro, entonces ambos tienen los mismos grupos de homología singular.

Vamos a ver como una consecuencia de esto, que la n -bola definida como $B_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$, tiene grupos de homología singular triviales para $k > 0$, es decir, $H_k(B_n) = \{0\}$ para todo $k > 0$ y $H_0(B_n) \cong \mathbb{Z}$.

Para darle sentido a lo anterior, comencemos recordando lo que significa que dos espacios topológicos sean homotópicamente equivalentes.

Definición 3. Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que dos funciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicas y escribimos $f \sim g$, si existe $F : X \times I \rightarrow Y$ continua, donde $I = [0, 1]$, tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Decimos que X y Y son homotópicamente equivalentes, si existen funciones continuas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$, tales que $f \circ g \sim id$ y $g \circ f \sim id$.

Por otro lado, existe una noción de homotopía entre complejos cadena, que es la siguiente.

Definición 4. Sean $\{G_\bullet, \partial_\bullet\}$ y $\{G'_\bullet, \partial'_\bullet\}$ complejos cadena de grupos abelianos, y supongamos que $\{f_\bullet : G_\bullet \rightarrow G'_\bullet\}$ y

$\{g_\bullet : G_\bullet \rightarrow G'_\bullet\}$ son morfismos entre estos complejos cadena. Decimos que $f_\bullet \sim g_\bullet$ son homotópicos, si existe una familia de homomorfismos $\{h_n : G_n \rightarrow G'_{n+1}\}_{n \geq 0}$ tales que para todo $n \geq 0$ se tiene que $f_n - g_n = \partial'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n$, donde $h_{-1} = 0$.

$$\begin{array}{ccccc} G_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & G_n & \xrightarrow{\partial_n} & G_{n-1} \\ & \searrow h_n & \downarrow f_n & \downarrow g_n & \swarrow h_{n-1} \\ G'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & G'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & G'_{n-1} \end{array}$$

Volvamos al caso de la homología singular. Supongamos que tenemos X y Y espacios topológicos y $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas.

Ya vimos que f y g inducen morfismos entre complejos cadena, que denotamos por $f_\bullet = \{f_n : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)\}_{n \geq 0}$ y $g_\bullet = \{g_n : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)\}_{n \geq 0}$.

Veamos que si $f_\bullet \sim g_\bullet$, entonces $H_n(f) = H_n(g)$, es decir, si los morfismos entre complejos cadena inducidos por f y g son homotópicos, entonces los homomorfismos inducidos por f y g en las homología singular son los mismos.

Proposición 2. Sean X y Y espacios topológicos. Si $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow Y$ son funciones continuas tales que $f_\bullet \sim g_\bullet$, donde $f_\bullet$ y $g_\bullet$ son los morfismos cadena inducidos por f y g respectivamente, entonces $H_n(f) = H_n(g)$ para todo $n \geq 0$.

Demostración. Como $f_\bullet \sim g_\bullet$, entonces existen homomorfismos $h_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$, $n \geq 0$, tales que

$$f_n - g_n = \partial'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n,$$

como muestra el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) \\ & \searrow h_n & \downarrow f_n & \downarrow g_n & \swarrow h_{n-1} \\ C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C_n(Y) & \xrightarrow{\partial'_n} & C_{n-1}(Y) \end{array}$$

Recordemos que $H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ y $H_n(g) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ están definidas como: $H_n(f)(\bar{x}) = \overline{f_n(x)}$ y $H_n(g)(\bar{x}) = \overline{g_n(x)}$.

Tomemos $x \in \ker(\partial_n)$. Entonces tenemos que

$$f_n(x) - g_n(x) = \partial'_{n+1} \circ h_n(x) + h_{n-1} \circ \partial_n(x) = \partial'_{n+1} \circ h_n(x),$$

lo que implica que $f_n(x) - g_n(x) \in \text{im}(\partial'_{n+1})$. Luego, $\overline{f_n(x)} = \overline{g_n(x)}$ en $H_n(Y)$.

De aquí concluimos que $H_n(f)(\bar{x}) = H_n(g)(\bar{x})$ para todo $\bar{x} \in H_n(X)$, es decir, $H_n(f) = H_n(g)$. $\square$

Como acabamos de ver, existen dos nociones de homotopía, una topológica y la otra algebraica. Nuestro próximo objetivo es demostrar que si $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow Y$ son homotópicos, es decir, existe $F : X \times I \rightarrow Y$ continua tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$ para

todo $x \in X$, entonces $f_\bullet \sim g_\bullet$, es decir, existen homomorfismos $h_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$, $n \geq 0$ tales que $f_n - g_n = \partial'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n$ para todo $n \geq 0$. En otras palabras, $f \sim g$ implica que $f_\bullet \sim g_\bullet$.

Para demostrar esto, necesitamos primero ver un resultado, que no demostraremos pero que el lector puede consultar por ejemplo en [Vic94].

Lema 1. Si X es un espacio topológico convexo entonces $H_n(X) = \{0\}$ para todo $n > 0$.

Teorema 3. Sean X y Y espacios topológicos y sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas. Si $f \sim g$ entonces $f_\bullet \sim g_\bullet$.

Demostración. Hagamos una primera reducción del problema. Consideremos las funciones continuas $\lambda : X \rightarrow X \times I$ y $\mu : X \rightarrow X \times I$ definidas como $\lambda(x) = (x, 0)$ y $\mu(x) = (x, 1)$. Veamos que $\lambda_\bullet \sim \mu_\bullet$ implica que $f_\bullet \sim g_\bullet$.

En efecto, como $f \sim g$ entonces existe $F : X \times I \rightarrow Y$ continua tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$. Por lo tanto, $f = F \circ \lambda$ y $g = F \circ \mu$. Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \lambda \downarrow & \searrow f & \\ X \times I & \xrightarrow{F} & Y \\ \mu \uparrow & \swarrow g & \\ X & & \end{array}$$

Si suponemos que $\lambda_\bullet \sim \mu_\bullet$, entonces existen homomorfismos $t_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X \times I)$ para cada $n \geq 0$, tales que $\lambda_n - \mu_n = \partial'_{n+1} \circ t_n + t_{n-1} \circ \partial_n$, para todo $n \geq 0$.

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) \\ & \searrow t_n & \downarrow \lambda_n & \downarrow \mu_n & \swarrow t_{n-1} \\ C_{n+1}(X \times I) & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C_n(X \times I) & \xrightarrow{\partial'_n} & C_{n-1}(X \times I) \end{array}$$

Por otro lado, si $F_\bullet$ es el morfismo entre los complejos $\{C_\bullet(X \times I), \partial'_\bullet\}$ y $\{C_\bullet(Y), \partial''_\bullet\}$ inducido por la función continua $F : X \times I \rightarrow Y$, entonces para todo $n \geq 0$ tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) \\ & \searrow t_n & \downarrow \lambda_n & \downarrow \mu_n & \swarrow t_{n-1} \\ C_{n+1}(X \times I) & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C_n(X \times I) & \xrightarrow{\partial'_n} & C_{n-1}(X \times I) \\ \downarrow F_{n+1} & & \downarrow F_n & & \downarrow F_{n-1} \\ C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\partial''_{n+1}} & C_n(Y) & \xrightarrow{\partial''_n} & C_{n-1}(Y) \end{array}$$

donde los cuadrados conmutan, es decir,

$$F_n \circ \partial'_{n+1} = \partial''_{n+1} \circ F_{n+1}$$

para todo $n \geq 0$.

Definamos para cada $n \geq 0$, $h_n = F_{n+1} \circ t_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$.

Así, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) \\ & \searrow h_n & \downarrow f_n & \swarrow g_n & \searrow h_{n-1} \\ C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\partial_{n+1}''} & C_n(Y) & \xrightarrow{\partial_n''} & C_{n-1}(Y) \end{array}$$

Veamos que $f_n - g_n = \partial_{n+1}'' \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n$, para todo $n \geq 0$. En efecto, como $\lambda_n - \mu_n = \partial_{n+1}' \circ t_n + t_{n-1} \circ \partial_n$, entonces aplicando el homomorfismo F_n a ambos lados y obtenemos que

$$F_n \circ \lambda_n - F_n \circ \mu_n = F_n \circ \partial_{n+1}' \circ t_n + F_n \circ t_{n-1} \circ \partial_n.$$

Reemplazando, para todo $n \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} f_n - g_n &= \partial_{n+1}'' \circ F_{n+1} \circ t_n + F_n \circ t_{n-1} \circ \partial_n \\ &= \partial_{n+1}'' \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n. \end{aligned}$$

Basta probar entonces que $\lambda_\bullet \sim \mu_\bullet$.

Razonemos por inducción sobre n , es decir, supongamos que para todo espacio topológico X , existen homomorfismos $h_i : C_i(X) \rightarrow C_{i+1}(X \times I)$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$ tales que $\lambda_i - \mu_i = \partial_{i+1}'' \circ h_i + h_{i-1} \circ \partial_i$,

$$\begin{array}{ccccc} C_{i+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & C_i(X) & \xrightarrow{\partial_i} & C_{i-1}(X) \\ & \searrow h_i & \downarrow \lambda_i & \swarrow \mu_i & \searrow h_{i-1} \\ C_{i+1}(X \times I) & \xrightarrow{\partial_{i+1}''} & C_i(X \times I) & \xrightarrow{\partial_i''} & C_{i-1}(X \times I) \end{array}$$

y además estos homomorfismos son naturales, es decir, si X y X' son espacios topológicos y tenemos $\varphi : X \rightarrow X'$ continua, entonces $\varphi \times id : X \times I \rightarrow X' \times I$ definida como $(\varphi \times id)(x, t) = (\varphi(x), t)$ es también continua, y el siguiente diagrama conmuta para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$,

$$\begin{array}{ccc} C_i(X) & \xrightarrow{\varphi_i} & C_i(X') \\ \downarrow h_i & & \downarrow h_i' \\ C_{i+1}(X \times I) & \xrightarrow{(\varphi \times id)_i} & C_{i+1}(X' \times I) \end{array} \quad (3)$$

es decir, $h_i' \circ \varphi_i = (\varphi \times id)_i \circ h_i$.

Veamos cómo construir $h_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X \times I)$ tal que $\lambda_n - \mu_n = \partial_{n+1}'' \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n$ y que satisfaga la conmutatividad del diagrama 3, es decir, $h_n' \circ \varphi_n = (\varphi \times id)_n \circ h_n$, para todo $\varphi : X \rightarrow X'$ continua.

Veamos que basta construir h_n para el espacio topológico $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

En efecto, supongamos que estos homomorfismos ya han sido construidos para el espacio topológico Δ_n , y denotémoslos por $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n$.

Si queremos construir $h_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X \times I)$ tal que satisfaga la ecuación 3, entonces dada una n -celda singular $\sigma \in C_n(X)$, sabemos que $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ es una función continua, y entonces el siguiente diagrama debe conmutar.

$$\begin{array}{ccc} C_n(\Delta_n) & \xrightarrow{\sigma_n} & C_n(X) \\ \downarrow \tau_n & & \downarrow h_n \\ C_{n+1}(\Delta_n \times I) & \xrightarrow{(\sigma \times id)_{n+1}} & C_{n+1}(X \times I) \end{array}$$

Ahora, en particular la función identidad $id : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ es un elemento de $C_n(\Delta_n)$, luego se debe cumplir que

$$h_n \circ \sigma_n(id) = (\sigma \times id)_{n+1} \circ \tau_n(id).$$

Como $\sigma_n(id) = \sigma \circ id = \sigma$, entonces lo anterior nos dice que

$$h_n(\sigma) = (\sigma \times id)_{n+1} \circ \tau_n(id). \quad (4)$$

Por lo tanto, τ_n determina el homomorfismo h_n .

Veamos cómo construir el homomorfismo $\tau_n : C_n(\Delta_n) \rightarrow C_{n+1}(\Delta_n \times I)$.

Queremos que τ_n satisfaga la ecuación

$$\lambda_n' - \mu_n' = \delta_{n+1}' \circ \tau_n + \tau_{n-1} \circ \delta_n,$$

donde $\lambda', \mu' : \Delta_n \rightarrow \Delta_n \times I$ son las funciones dadas por $\lambda'(t) = (t, 0)$ y $\mu'(t) = (t, 1)$.

Por lo tanto, queremos que se cumpla que $\delta_{n+1}' \circ \tau_n = \lambda_n' - \mu_n' - \tau_{n-1} \circ \delta_n$.

Para esto veamos que para cada generador σ del grupo abeliano libre $C_n(\Delta_n)$ se tiene que $\lambda_n'(\sigma) - \mu_n'(\sigma) - \tau_{n-1} \circ \delta_n(\sigma) \in \ker(\delta_n')$, es decir, verifiquemos que

$$\delta_n' \circ \lambda_n'(\sigma) - \delta_n' \circ \mu_n'(\sigma) - \delta_n' \circ \tau_{n-1} \circ \delta_n(\sigma) = 0.$$

En efecto, la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_n(\Delta_n) & \xrightarrow{\delta_n} & C_{n-1}(\Delta_n) \\ \downarrow \lambda_n' & & \downarrow \lambda_{n-1}' \\ C_n(\Delta_n \times I) & \xrightarrow{\delta_n'} & C_{n-1}(\Delta_n \times I) \end{array}$$

implica que

$$\delta_n' \circ \lambda_n'(\sigma) - \delta_n' \circ \mu_n'(\sigma) = \lambda_{n-1}' \circ \delta_n(\sigma) - \mu_{n-1}' \circ \delta_n(\sigma). \quad (5)$$

Por otro lado, de la hipótesis de inducción tenemos que

$$\lambda_{n-1}' - \mu_{n-1}' = \delta_n' \circ \tau_{n-1} + \tau_{n-2} \circ \delta_{n-1},$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \delta_n' \circ \tau_{n-1} \circ \delta_n(\sigma) &= (\lambda_{n-1}' - \mu_{n-1}' - \tau_{n-2} \circ \delta_{n-1}) \circ \delta_n(\sigma) \\ &= \lambda_{n-1}' \circ \delta_n(\sigma) - \mu_{n-1}' \circ \delta_n(\sigma). \end{aligned} \quad (6)$$

De las ecuaciones 5 y 6 se sigue que

$$\delta'_n \circ \lambda'_n(\sigma) - \delta'_n \circ \mu'_n(\sigma) - \delta'_n \circ \tau_{n-1} \circ \delta_n(\sigma) = 0.$$

Por lo tanto, para todo $\sigma \in C_n(\Delta_n)$ se tiene que $\lambda'_n(\sigma) - \mu'_n(\sigma) - \tau_{n-1} \circ \delta_n(\sigma) \in \ker(\delta'_n)$.

Ahora, como $\Delta_n \times I$ es un conjunto convexo, entonces $H_i(\Delta_n \times I) = \{0\}$ para todo $i > 0$. Esto implica que $\ker(\delta'_n) = \text{im}(\delta'_{n+1})$.

Luego,

$$\lambda'_n(\sigma) - \mu'_n(\sigma) - \tau_{n-1} \circ \delta_n(\sigma) = \delta'_{n+1}(z) \quad (7)$$

para cierto $z \in C_{n+1}(\Delta_n \times I)$.

Para definir un homomorfismo de grupos abelianos libres $\tau_n : C_n(\Delta_n) \rightarrow C_{n+1}(\Delta_n)$, basta decir dónde se van los generadores del grupo abeliano libre $C_n(\Delta_n)$.

Para cada n -celda singular $\sigma \in C_n(\Delta_n)$, definamos $\tau_n(\sigma) = z$, donde

$$\lambda'_n(\sigma) - \mu'_n(\sigma) - \tau_{n-1} \circ \delta_n(\sigma) = \delta'_{n+1}(z).$$

Observe que por la forma como se construyó τ_n , se tiene que

$$\lambda'_n - \mu'_n = \delta'_{n+1} \circ \tau_n + \tau_{n-1} \circ \delta_n.$$

Ahora, dado X un espacio topológico, definamos $h_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X \times I)$ en las n -celdas singulares $\sigma \in C_n(X)$ como:

$$h_n(\sigma) = (\sigma \times id)_{n+1} \circ \tau_n(id),$$

donde $id : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ es la función identidad.

Veamos que h_n definida de esta manera, satisface la ecuación

$$\lambda_n - \mu_n = \delta'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n.$$

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) \\ & \searrow h_n & \downarrow \lambda_n \quad \mu_n & \swarrow h_{n-1} & \\ C_{n+1}(X \times I) & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C_n(X \times I) & \xrightarrow{\partial'_n} & C_{n-1}(X \times I) \end{array}$$

donde $\lambda, \mu : X \rightarrow X \times I$ son las funciones continuas definidas como $\lambda(x) = (x, 0)$ y $\mu(x) = (x, 1)$.

Observemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1}(\Delta_n) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & C_n(\Delta_n) & \xrightarrow{\delta_n} & C_{n-1}(\Delta_n) \\ & \searrow \tau_n & \downarrow \lambda_n \quad \mu_n & \swarrow \tau_{n-1} & \\ C_{n+1}(\Delta_n \times I) & \xrightarrow{\delta'_{n+1}} & C_n(\Delta_n \times I) & \xrightarrow{\delta'_n} & C_{n-1}(\Delta_n \times I) \\ (\sigma \times id)_{n+1} \downarrow & & (\sigma \times id)_n \downarrow & & \\ C_{n+1}(X \times I) & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C_n(X \times I) & \xrightarrow{\partial'_n} & C_{n-1}(X \times I) \end{array}$$

Por la conmutatividad del cuadrado izquierdo inferior en el anterior diagrama, tenemos que

$$\begin{aligned} \partial'_{n+1} \circ h_n(\sigma) &= \partial'_{n+1} \circ (\sigma \times id)_{n+1} \circ \tau_n(id) \\ &= (\sigma \times id)_n \circ \delta'_{n+1} \circ \tau_n(id). \end{aligned}$$

Luego,

$$\partial'_{n+1} \circ h_n(\sigma) + h_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = (\sigma \times id)_n \circ \delta'_{n+1} \circ \tau_n(id) + h_{n-1} \circ \partial_n(\sigma). \quad (8)$$

Ahora, del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C_{n-1}(\Delta_n) & \xrightarrow{\sigma_{n-1}} & C_{n-1}(X) \\ \tau_{n-1} \downarrow & & \downarrow h_{n-1} \\ C_n(\Delta_n \times I) & \xrightarrow{(\sigma \times id)_n} & C_n(X \times I) \end{array}$$

se tiene que

$$h_{n-1} \circ \sigma_{n-1} = (\sigma \times id)_n \circ \tau_{n-1}.$$

Por otro lado, la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_n(\Delta_n) & \xrightarrow{\delta_n} & C_{n-1}(\Delta_n) \\ \sigma_n \downarrow & & \downarrow \sigma_{n-1} \\ C_n(X) & \xrightarrow{\sigma_n} & C_{n-1}(X) \end{array}$$

implica que

$$\sigma_{n-1} \circ \delta_n = \partial_n \circ \sigma_n.$$

Así,

$$\begin{aligned} h_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) &= h_{n-1} \circ \partial_n \circ \sigma_n(id) = h_{n-1} \circ \sigma_{n-1} \circ \delta_n(id) \\ &= (\sigma \times id)_n \circ \tau_{n-1} \circ \delta_n(id). \end{aligned} \quad (9)$$

Reemplazando 9 en 8 obtenemos que

$$\begin{aligned} \partial'_{n+1} \circ h_n(\sigma) + h_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) &= (\sigma \times id)_n \circ (\delta'_{n+1} \circ \tau_n(id) \\ &\quad + \tau_{n-1} \circ \delta_n(id)). \end{aligned}$$

Finalmente, como

$$\lambda'_n(id) - \mu'_n(id) = \delta'_{n+1} \circ \tau_n(id) + \tau_{n-1} \circ \delta_n(id),$$

entonces tenemos que

$$\partial'_{n+1} \circ h_n(\sigma) + h_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = (\sigma \times id)_n (\lambda'_n(id) - \mu'_n(id)),$$

pero la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_n(\Delta_n) & \xrightarrow{\sigma_n} & C_n(X) \\ \lambda'_n \downarrow \quad \mu'_n & & \downarrow \mu_n \\ C_n(\Delta_n \times I) & \xrightarrow{(\sigma \times id)_n} & C_n(X \times I) \end{array}$$

implica $(\sigma \times id)_n \circ \lambda'_n(id) = \lambda_n \circ \sigma_n(id) = \lambda_n(\sigma)$ y $(\sigma \times id)_n \circ \mu'_n(id) = \mu_n \circ \sigma_n(id) = \mu_n(\sigma)$, de donde tenemos que

$$\partial'_{n+1} \circ h_n(\sigma) + h_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = \lambda_n(\sigma) - \mu_n(\sigma).$$

Ahora verifiquemos que dada $\varphi : X \rightarrow X'$ continua, si $h_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X \times I)$ y $h'_n : C_n(X') \rightarrow C_{n+1}(X' \times I)$ son los homomorfismos construidos como arriba, entonces se tiene que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{\varphi_n} & C_n(X') \\ h_n \downarrow & & \downarrow h'_n \\ C_{n+1}(X \times I) & \xrightarrow{(\varphi \times id)_{n+1}} & C_{n+1}(X' \times I) \end{array} \quad (10)$$

En efecto, dada una n -celda singular $\sigma \in C_n(X)$, tenemos que $h'_n(\varphi_n(\sigma)) = h'_n(\varphi \circ \sigma) = (\varphi \circ \sigma \times id)_{n+1} \circ \tau_n(id)$. Por otro lado,

$$(\varphi \times id)_{n+1}(h_n(\sigma)) = (\varphi \times id)_{n+1} \circ (\sigma \times id)_{n+1} \circ \tau_n(id).$$

Veamos ahora que los homomorfismos de grupos

$(\varphi \circ \sigma \times id)_{n+1}$ y $(\varphi \times id)_{n+1} \circ (\sigma \times id)_{n+1}$ son iguales. Para ver esto, basta ver que coinciden en los generadores del grupo libre abeliano $C_{n+1}(\Delta_n \times I)$.

En efecto, si $\mu \in C_{n+1}(\Delta_n \times I)$ es un generador, es decir, $\mu : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n \times I$ es una $(n+1)$ -celda singular, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} (\varphi \times id)_{n+1} \circ (\sigma \times id)_{n+1} \circ \mu &= (\varphi \times id)_{n+1} \circ (\sigma \times id) \circ \mu \\ &= (\varphi \times id) \circ (\sigma \times id) \circ \mu \\ &= (\varphi \circ \sigma \times id) \circ \mu. \end{aligned}$$

Por otro lado, $(\varphi \circ \sigma \times id)_{n+1} \circ \mu = (\varphi \circ \sigma \times id) \circ \mu$.

Así, concluimos que

$$(\varphi \circ \sigma \times id)_{n+1} = (\varphi \times id)_{n+1} \circ (\sigma \times id)_{n+1},$$

lo que implica que

$$(\varphi \circ \sigma \times id)_{n+1} \circ \tau_n(id) = (\varphi \times id)_{n+1} \circ (\sigma \times id)_{n+1} \circ \tau_n(id).$$

Lo anterior es precisamente la conmutatividad del diagrama 10.

Quedó faltando verificar el paso inicial de la inducción, es decir, mostrar que existe $\tau_0 : C_0(\Delta_n) \rightarrow C_1(\Delta_n \times I)$ tal que $\lambda'_0 - \mu'_0 = \delta'_1 \circ \tau_0 + \tau_{-1} \circ \delta_1$, donde $\tau_{-1} \equiv 0$, es decir, necesitamos verificar que $\lambda'_0 - \mu'_0 = \delta'_1 \circ \tau_0$.

En efecto, como $\Delta_n \times I$ es arco-conexo, entonces $H_0(\Delta_n \times I) \cong \mathbb{Z}$, más aún, la secuencia

$$C_1(\Delta_n \times I) \xrightarrow{\delta'_1} C_0(\Delta_n \times I) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

es exacta, es decir, $\ker(\varepsilon) = \text{im}(\delta'_1)$, donde $\varepsilon : C_0(\Delta_n \times I) \rightarrow \mathbb{Z}$ es el mapeo aumentación, es decir, $\varepsilon(\sum n_i \sigma_i) = \sum n_i$.

Observemos que $\lambda'_0(\sigma) - \mu'_0(\sigma) \in \ker(\varepsilon)$ para toda 0-celda singular $\sigma \in C_0(\Delta_n)$, ya que

$$\lambda'_0(\sigma) - \mu'_0(\sigma) = \lambda' \circ \sigma - \mu' \circ \sigma,$$

de donde $\varepsilon(\lambda'_0(\sigma) - \mu'_0(\sigma)) = 0$. Por lo tanto, $\lambda'_0(\sigma) - \mu'_0(\sigma) \in \text{im}(\delta'_1)$, es decir, $\lambda'_0(\sigma) - \mu'_0(\sigma) = \delta'_1(z)$ para cierto $z \in C_1(\Delta_n \times I)$.

Definimos $\tau_0 : C_0(\Delta_n) \rightarrow C_1(\Delta_n \times I)$ en cada generador del grupo abeliano libre $C_0(\Delta_n)$, como $\tau_0(\sigma) = z$, donde $\lambda'_0(\sigma) - \mu'_0(\sigma) = \delta'_1(z)$.

Note que τ_0 definido de esta manera claramente satisface la ecuación $\lambda'_0 - \mu'_0 = \delta'_1 \circ \tau_0$. $\square$

Como consecuencia del teorema anterior, veamos que dos espacios topológicos que sean homotópicamente equivalentes tienen grupos de homología singular isomorfos.

Teorema 4. Sean X y Y espacios topológicos homotópicamente equivalentes. Entonces $H_n(X) \cong H_n(Y)$ para todo $n \geq 0$.

Demostración. Por hipótesis, existen funciones continuas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $f \circ g \sim id_Y$ y $g \circ f \sim id_X$. Por lo tanto, $(f \circ g)_\bullet \sim (id_Y)_\bullet$ y $(g \circ f)_\bullet \sim (id_X)_\bullet$. Esto implica que para todo $n \geq 0$ se tiene que $H_n(f \circ g) = id_{H_n(Y)}$ y $H_n(g \circ f) = id_{H_n(X)}$.

Como $H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g)$ y $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$, tenemos que $H_n(f) \circ H_n(g) = id_{H_n(Y)}$ y $H_n(g) \circ H_n(f) = id_{H_n(X)}$, lo que implica que $H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ es un isomorfismo de grupos. $\square$

Un caso particular de una equivalencia homotópica es lo que se conoce como un retracts de deformación.

Definición 5. Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$ un subespacio. Definimos un retracto de X a A , como una función continua $\rho : X \rightarrow A$ tal que $\rho \circ i = id$, donde $i : A \rightarrow X$ es la inclusión.

Decimos que A es un retracto de deformación de X , si existe $F : X \times I \rightarrow X$ continua tal que $F(x, 0) = x$ para todo $x \in X$, $F(x, 1) \in A$ para todo $x \in X$ y $F(a, 1) = a$ para todo $a \in A$.

Si además se tiene que $F(a, t) = a$ para todo $a \in A$ y todo $t \in I$, entonces se dice que A es un retracto de deformación fuerte de X .

Observación 2. Observe que si A es un retracto de deformación de X , entonces tenemos $F : X \times I \rightarrow X$ continua tal que $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) \in A$ y $F(a, 1) = a$. Esto implica que la función $\rho = F(x, 1) : X \rightarrow X$ es un retracto de X a A , ya que $F(x, 1) \circ i = id$ puesto que $F(a, 1) = a$ y $F(x, 1) \in A$. Claramente, $id_X \sim \rho$ pues $F(x, 0) = id_X$ y $F(x, 1) = \rho$.

Una definición equivalente de retracto de deformación es que la función id_X es homotópica a un retracto $\rho : X \rightarrow A$.

Ejemplo 2. Considere la esfera $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ y consideremos el espacio topológico $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. S^n es un retracto de deformación fuerte de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, ya que la función que a cada punto $x \in X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ le asigna la intersección de la recta que lo une con el origen y S^n , definida como $F : X \times I \rightarrow X$, $F(x, t) = (1-t)x + tx/||x||$, es una función continua en X que satisface que $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) = x/||x|| \in S^n$, y $F(a, 1) = a/||a|| = a$ para todo $a \in S^n$. Además, $F(a, t) = a(1-t) + ta = a$ para todo $a \in S^n$.

Ejemplo 3. Consideremos la bola $B_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$. Veamos que $\{0\}$ es un retracto de deformación fuerte de B_n . En efecto, definamos $F : B_n \times I \rightarrow B_n$ como $F(x, t) = (1-t)x$. Claramente F está bien definida y es continua. Además, $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) = 0$, $F(0, 1) = 0$, y $F(0, t) = 0$.

Proposición 3. Si $A \subset X$ es un retracto de deformación de X , entonces $H_n(A) \cong H_n(X)$ para todo $n \geq 0$.

Demostración. Supongamos que A es un retracto de deformación de X . Entonces $id_X \sim \rho$ donde $\rho : X \rightarrow A$ es un retracto, es decir, $\rho \circ i = id_A$. Tenemos entonces que $i \circ \rho = \rho \sim id_X$ y $\rho \circ i \sim id_A$. Por lo tanto A es homotópicamente equivalente a X , y por el teorema anterior, $H_n(X) \cong H_n(A)$ para todo $n \geq 0$. $\square$

Como consecuencia de lo anterior, tenemos que $H_i(B_n) \cong \{0\}$ para $i > 0$ y $H_0(B_n) \cong \mathbb{Z}$, esto ya que $\{0\}$ es un retracto de deformación de B_n , o en otras palabras, B_n se puede contraer al origen, y sabemos que $H_i(\{0\}) = \{0\}$ si $i > 0$ y $H_0(\{0\}) = \mathbb{Z}$.

Por otro lado, para la esfera $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ se tiene que $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ si $n > 0$ y $H_0(S^0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. No mostraremos la prueba de este hecho, pero el lector interesado puede consultar [Mun18].

Podemos concluir entonces lo siguiente:

Proposición 4. Para todo $n \geq 0$, $S^n \subset B_{n+1}$ no puede ser un retracto de deformación de B_{n+1} .

Demostración. Se sigue del hecho de que para $n > 0$ se tiene que $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, mientras que $H_n(B_{n+1}) = \{0\}$, y para $n = 0$, $H_0(S^0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ mientras que $H_0(B_1) \cong \mathbb{Z}$. $\square$

Corolario 1. Para todo $n \geq 1$, no existe un retracto de B_n en S^{n-1} .

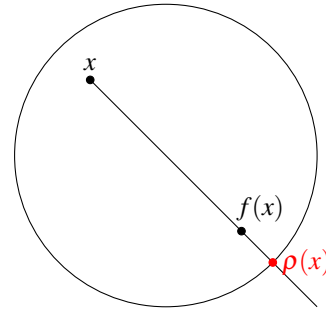
Demostración. Supongamos que existe un retracto $\rho : B_n \rightarrow S^{n-1}$. Definamos $F : B_n \times I \rightarrow B_n$ como $F(x, t) = (1-t)x + t\rho(x)$. Claramente F es continua, $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) = \rho(x) \in S^{n-1}$ y $F(a, 1) = \rho(a) = a$ para todo $a \in S^{n-1}$. Por lo tanto, S^{n-1} es un retracto de deformación de B_n , lo cual es absurdo. $\square$

5. Prueba del teorema del punto fijo de Brouwer

Veamos que de este último corolario, se sigue el teorema del punto fijo de Brouwer.

Teorema 5 (Punto fijo de Brouwer). Sea $f : B_n \rightarrow B_n$ una función continua. Entonces f tiene un punto fijo, es decir, existe $x_0 \in B_n$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Demostración. Supongamos que tenemos $f : B_n \rightarrow B_n$ continua, tal que f no deja fijo ningún punto de B_n . Veamos que con f podemos construir un retracto de B_n en S^{n-1} . Para cada $x \in B_n$, como $x \neq f(x)$, consideremos la línea recta que pasa por x y $f(x)$, y definamos $\rho(x)$ como una de las intersecciones de esta recta con la esfera S^{n-1} , como muestra el siguiente dibujo.



Veamos cómo definir explícitamente la función ρ .

Observe que la recta que une el punto x con el punto $f(x)$ se puede parametrizar como $(1-t)x + tf(x)$, con $t \in \mathbb{R}$. Ahora, encontrar el punto $\rho(x)$ equivale a encontrar los valores de t para los cuales se tiene que $\|(1-t)x + tf(x)\| = 1$.

Resolvamos la ecuación $\|(1-t)x + tf(x)\|^2 = \|x + t(f(x) - x)\|^2 = 1$. Usando el producto interno de $\mathbb{R}^n$, sabemos que esta última ecuación es equivalente a la ecuación

$$\langle x + t(f(x) - x), x + t(f(x) - x) \rangle = 1,$$

que por las propiedades del producto interno es equivalente a

$$\|x\|^2 + 2t\langle x, f(x) - x \rangle + t^2\|f(x) - x\|^2 = 1.$$

Esta última ecuación se convierte en la siguiente ecuación cuadrática:

$$\|f(x) - x\|^2 t^2 + 2\langle x, f(x) - x \rangle t + \|x\|^2 - 1 = 0,$$

que tiene como soluciones a

$$t = \frac{-2\langle x, f(x) - x \rangle \pm \sqrt{4\langle x, f(x) - x \rangle^2 - 4\|f(x) - x\|^2(\|x\|^2 - 1)}}{2\|f(x) - x\|^2},$$

es decir,

$$t = \frac{-\langle x, f(x) - x \rangle \pm \sqrt{\langle x, f(x) - x \rangle^2 - \|f(x) - x\|^2(\|x\|^2 - 1)}}{\|f(x) - x\|^2},$$

donde observe que $\langle x, f(x) - x \rangle^2 - \|f(x) - x\|^2(\|x\|^2 - 1) \geq 0$ ya que $\|x\| \leq 1$ y donde $f(x) - x \neq 0$.

Para cada $x \in B_n$, definamos

$$t_x = \frac{-\langle x, f(x) - x \rangle + \sqrt{\langle x, f(x) - x \rangle^2 - \|f(x) - x\|^2(\|x\|^2 - 1)}}{\|f(x) - x\|^2}.$$

Es claro que $(1-t_x)x + t_x f(x) \in S^{n-1}$, por lo tanto, podemos definir $\rho : B_n \rightarrow S^{n-1}$ como $\rho(x) = (1-t_x)x + t_x f(x)$.

Observe que ρ es continua, ya que f lo es y $f(x) - x \neq 0$ para todo $x \in B_n$.

Finalmente, si $x \in S^{n-1}$, entonces $t_x = 0$ y por lo tanto $\rho(x) = x$.

Concluimos entonces que ρ es un retracts de B_n en S^{n-1} , absurdo.

Así, f tiene que tener un punto fijo. $\square$

Observe que el teorema del punto fijo de Brouwer se generaliza trivialmente a cualquier bola, es decir, si $B_n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$ y $f : B_n(r) \rightarrow B_n(r)$ es una función continua, entonces existe $x_0 \in B_n(r)$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Referencias.

[Mun00] James Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2000.

[Mun18] J.R Munkres, *Elements of algebraic topology*, CRC press, 2018.

[Vic94] James Vick, *An introduction to algebraic topology*, Springer-Verlag, 1994.

Acerca del autor: El profesor Juan Pablo trabaja en las áreas de álgebra conmutativa, álgebra homológica y geometría algebraica, y tiene un interés en general por la matemática y las aplicaciones de esta ciencia a otras áreas. Amante de la guitarra clásica.

EL CIRCUITO CAÓTICO MÁS SIMPLE

Omar Fernando Granados Vergara *

omarf.granadosv@konradlorenz.edu.co

Resumen

En este artículo estudiamos las ecuaciones correspondientes al circuito de Chua con dos parámetros, desde conceptos primordiales como la ley de Ohm, la ley de Kirchhoff y variables de estado, entre otros. Además, representamos dichas ecuaciones en su forma normalizada permitiendo ver cómo es el comportamiento caótico de uno de los primeros sistemas que se pudieron manipular física y teóricamente.

1. Introducción

En la actualidad, una parte de la investigación científica se ha enfocado en el estudio de sistemas naturales de forma indirecta, esto es, mediante un modelo que los representa. Existen diferentes tipos de modelos como las maquetas, algunos tipos de gráficos, etc. En particular, en la rama de ingeniería electrónica se ha estudiado el modelo no lineal más influyente en circuitos electrónicos y de fuerte influencia en sistemas dinámicos, conocido como circuito Chua¹.

La importancia de este circuito radica en que emula de manera adecuada un sistema físico (tangible) y que fue comprobado en el laboratorio (Zhong y Ayrom), diseñado por Leon O. Chua en 1971, en su búsqueda por encontrar un tipo de resistencia con memoria (memristor) que fuese capaz de determinar el último flujo de potencial que pasó por ella. Tras múltiples diseños no exitosos, las primeras evidencias de su existencia se dieron en 1983 en un aula de clase en su residencia en la Universidad de Waseda en Japón, en una simulación realizada por T. Matsumoto, donde encontraron comportamientos anormales en el diseño propuesto por Leon Chua. Sin embargo, hasta 1984 se dio su primer montaje y prueba, permitiendo encontrar una amplia gama de atractores caóticos generados por el circuito.

2. Conceptos previos

La teoría del caos es una rama de las matemáticas, que se encuentra en ciertos tipos de sistemas dinámicos, es de-

cir aquellos sistemas cuyo estado evoluciona con el tiempo, con la característica de ser sensibles a variaciones dadas por las condiciones iniciales. Estas variaciones (por lo general pequeñas) en las condiciones iniciales pueden representar grandes diferencias en el comportamiento futuro, llevando a no ser posible dar una predicción a largo plazo.

La teoría del caos permite estudiar sistemas como el control de la población y epidemias, el movimiento de bancos de peces, aves e insectos migratorios, el comportamiento del cerebro, el cambio climático, etc.

Definición 2.1 (Bas20). *Un oscilador es un circuito electrónico que produce una señal que se repite (oscila). Los osciladores convierten corriente DC de una fuente de alimentación en corriente AC y entre algunas de sus aplicaciones se encuentran los sistemas de audio.*

Definición 2.2. *Un circuito es un conjunto de elementos electrónicos conectados entre sí, por los que puede circular una corriente eléctrica.*

Ley 2.1 (de la corriente de Kirchhoff). [McA19] *La ley de la corriente de Kirchhoff dice que la suma de todas las corrientes que fluyen hacia un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen del nodo. Se puede escribir como:*

$$\sum i_{in} = \sum i_{out},$$

donde $\sum i_{in} = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n$ y $\sum i_{out} = i_a + i_b + i_c + \dots + i_v$.

y su representación grafica se puede ver en la Figura 1

Ley 2.2 (de voltaje de Kirchhoff). [McA19] *La ley de voltaje de Kirchhoff dice que la suma de los voltajes alrededor de una malla es igual a cero. Podemos escribir la ley de voltaje de Kirchhoff como:*

$$V_{AB} + V_{BD} + V_{CA} + V_{DA} = 0,$$

donde V_{AB} representa el potencial entre el segmento AB, de igual manera en los segmentos BD, CD y CA.

Y su representación grafica se puede ver en la Figura 2

Ley 2.3 (de Ohm). [Maz21] *La ley de Ohm se usa para determinar la relación entre tensión (voltaje V), corriente (intensidad i) y resistencia (R) en un circuito eléctrico, y se establece por las relaciones derivadas de la siguiente ecuación:*

$$V = i \cdot R.$$

*Estudiante de Matemáticas, Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Bogotá-Colombia

¹Su estructura es dada por elementos lineales (aquellos elementos que tienen la propiedad de escalamiento. Suponiendo que tiene dos propiedades como: resistencia y voltaje, si duplica el valor de la resistencia, se duplica el valor de voltaje.) como son los capacitores, resistores e inductores y un único elemento no lineal o de linealidad a trozos (diodo Chua), el cual es el sistema caótico más sencillo.

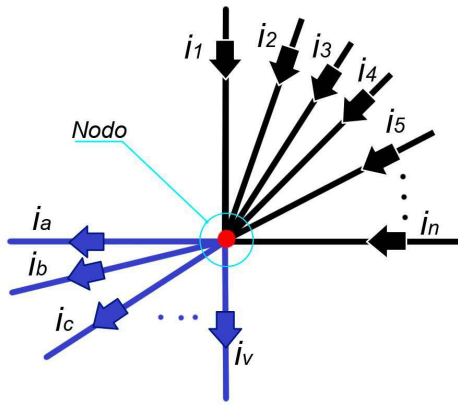


Figura 1: Sumatoria de corrientes en un nodo. Tomada de [Zap21].

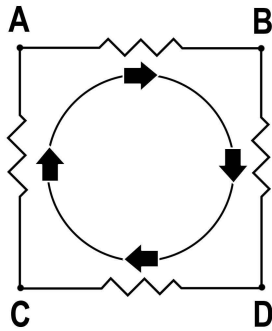


Figura 2: Sumatoria de voltajes en una malla. Tomada de [Zap21].

2.1. Elementos pasivos y activos de un circuito

[Bas20] Los elementos pasivos son aquellos que no tienen la capacidad de controlar la corriente por medio de otra señal eléctrica. En el circuito son los siguientes:

1. Inductancias o Bobinas (denotado como “ L ”).
2. Capacitancias o Condensadores (denotados como “ C ”).
3. Resistores o resistencias (denotadas como “ R ”).

[Bas20] Los elementos activos son aquellos que pueden controlar el flujo eléctrico. Los circuitos de aplicaciones prácticas tienen al menos un componente activo. Estos pueden ser: transistores, tubos de vacío, amplificadores operacionales, etc. Los elementos activos en el circuito son, los amplificadores operacionales, los cuales forman el memristor (denotado como “ NR ”).

2.2. Variables de estado

Las variables de estado son aquellas que pueden describir nuestro sistema en un instante de tiempo determinado. Tam-

bién se pueden identificar como aquellas variables que pueden presentar cambios con respecto al tiempo, entre ellas se encuentran:

1. **Capacitor:** [Dom18] Es un elemento pasivo que almacena cargas eléctricas entre un par de placas separadas por un dieléctrico, entre sus placas se crea una diferencia de potencial, la cual es creada por la acumulación de las cargas (esto tiene una relación directa con la energía almacenada por la capacitancia).

Por medio de desarrollos experimentales se encontró que la corriente instantánea en la capacitancia es directamente proporcional a la variación del voltaje en el tiempo:

$$i(t) = C \frac{dV(t)}{dt}.$$

2. **Inductor:** [Mec21] Es un elemento pasivo de dos terminales que almacena energía en un campo magnético (su construcción se basa en enrollar el conductor alrededor de un núcleo). De acuerdo con la ley de Faraday, la variación de corriente en el tiempo en un conductor induce una caída de voltaje en el mismo. Por otro lado, de las ecuaciones de Maxwell, una variación de la corriente en el conductor produce un campo magnético variable, que a su vez produce un campo eléctrico variable y por tanto se genera una caída de voltaje variable en el tiempo. Por medio de desarrollos experimentales, se encontró que el voltaje instantáneo en la inductancia es directamente proporcional a la variación de la corriente en el tiempo, planteado como:

$$V(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$$

Definición 2.3. [McA19] Se denomina conductancia eléctrica a la facilidad que ofrece un material al paso de la corriente eléctrica, es decir, la conductancia es el inverso multiplicativo de la resistencia eléctrica:

$$G = \frac{1}{R}.$$

2.3. Circuito de Chua

El circuito de Chua es uno de los modelos más populares que exhiben caos y ha sido estudiado extensamente desde su propuesta inicial, este oscilador electrónico ha servido como plataforma de prueba para muchas de las áreas de investigación que involucran procesos de bifurcación.

La facilidad de ser implementado, radica en que se usan elementos lineales que se puede considerar como un oscilador amortiguado el cual se compone por elementos pasivos tales como inductancia (L), resistencia (R) y capacitancia ($C1$, $C2$) conectadas a un dispositivo no lineal como es el diodo Chua y su representación circuital está dada en la Figura 3.

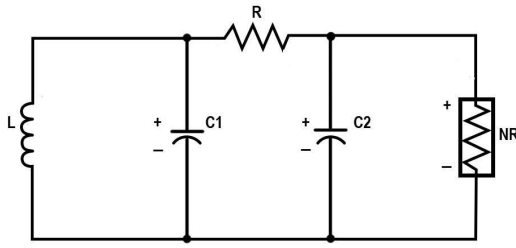


Figura 3: Diagrama de representación del circuito de Chua. Tomada de [Zap08].

3. Planteamiento del sistema de ecuaciones

En primera medida, es necesario considerar el diagrama del circuito de Chua (ver Figura 3), en el cual se puede aplicar los conceptos de electrónica anteriormente mencionados (ley de Ohm, ley de Kirchoff de corriente y voltaje, etc.) para el planteamiento inicial de nuestras ecuaciones.

Se aplica la ley de Kirchoff de corriente (sumatoria de corrientes en los nodos (2.1)), planteando en cada nodo el sentido que representará el flujo de la corriente y con ello ver cómo es el comportamiento en los componentes, llegando a aplicar su equivalente en variable de estado (2.2).

Con lo mencionado se tiene el diagrama (ver Figura 4) y las ecuaciones:

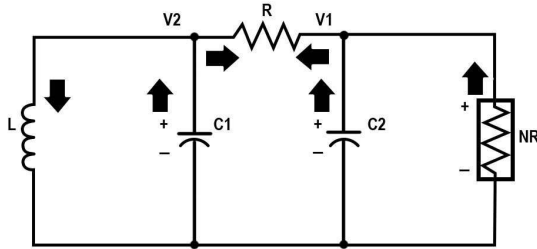


Figura 4: Ley de la corriente de Kirchoff.

$$i_{(C1)} = C_1 \frac{dV(t)}{dt}. \quad (1)$$

$$i_{(C2)} = C_2 \frac{dV(t)}{dt}. \quad (2)$$

$$V_{(L)} = L \frac{di(t)}{dt}. \quad (3)$$

Ahora se realiza un análisis por medio de las leyes de Kirchoff de voltaje (la suma de voltajes en una malla es igual a cero (2.2), permitiendo trazar (ver Figura 5):

Siguiendo con el análisis del inductor en la malla 3, se tiene:

$$V_{(L)} + V_2 = 0,$$

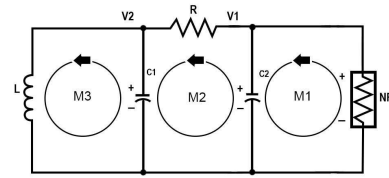


Figura 5: Ley de Kirchoff de voltaje.

reemplazando (3) en $V_{(L)}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} -V_2 &= L \frac{di(t)}{dt}, \\ -\frac{V_2}{L} &= \frac{di(t)}{dt}, \end{aligned} \quad (4)$$

continuando con el capacitor C_2 en la malla 2, tenemos:

$$i_{(L)} = i_{(R)} + i_{(C1)}.$$

Aplicando la ley de Ohm (2.3), y (2) en el capacitor, quedando en:

$$i_{(L)} = \frac{(V_1 - V_2)}{R} + C_1 \frac{dV(t)}{dt},$$

despejando el voltaje de caída en el capacitor C_1 , se obtiene

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV(t)}{dt} &= i_{(L)} - \frac{(V_1 - V_2)}{R}, \\ \frac{dV(t)}{dt} &= \frac{i_{(L)}}{C_1} + \frac{(V_2 - V_1)}{R \cdot C_1}. \end{aligned} \quad (5)$$

En seguida, al analizar el capacitor C_2 , en referencia del nodo V_1 (ley de corriente de Kirchoff (2.1)) y con respecto a la malla 2 (ver Figura 5) (ley de voltaje de Kirchoff (2.2)), se observa el comportamiento de las trayectorias trazadas y cómo influye el diodo de Chua de la malla 1 sobre C_1 (ver Figura 5), permitiendo encontrar las corrientes a partir de la siguiente expresión:

$$i_{(NR)} - i_{(R)} + i_{(C1)} = 0.$$

Viendo la composición de la malla 1 (Figura 5), se plantea la función $f(V_{NR})$, que representará el voltaje del diodo Chua, el cual se explica en el análisis del diodo Chua (3.1).

En consecuencia, al aplicar en (1), la ley de Ohm (2.3) sobre la resistencia (R) y el estimado sobre el diodo Chua, se tiene:

$$C_1 \frac{dV(t)}{dt} = \frac{(V_1 - V_2)}{R} - f(V_{NR}).$$

Despejando el voltaje de caída en el capacitor C_1

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{(V_1 - V_2)}{C_1 \cdot R} - \frac{f(V_{NR})}{C_1}. \quad (6)$$

Esto finaliza la revisión del comportamiento del sistema en manera general (sin incluir el diodo Chua) de modo que se tienen tres ecuaciones diferenciales (4), (5) y (6):

$$\begin{aligned} -\frac{V_2}{L} &= \frac{di(t)}{dt}, \\ \frac{dV(t)}{dt} &= \frac{i_{(L)}}{C_2} + \frac{(V_2 - V_1)}{R \cdot C_2}, \\ \frac{dV(t)}{dt} &= \frac{(V_1 - V_2)}{C_1 \cdot R} - \frac{f(V_{NR})}{C_1}. \end{aligned}$$

Para simplificar un poco las ecuaciones, se aplica el concepto de conductancia visto en el literal 2.3, en las ecuaciones (5) y (6) respectivamente, llegando a:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{i_{(L)}}{C_2} + G \frac{(V_2 - V_1)}{C_2}. \quad (7)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = G \frac{(V_1 - V_2)}{C_1} - \frac{f(V_{NR})}{C_1}. \quad (8)$$

3.1. Análisis del diodo de Chua

El diodo de Chua NR , está conformado por una fuente de alimentación, dos amplificadores operacionales en conexión paralela de impedancia negativa (osciladores) y las respectivas conexiones de las resistencias que influyen en el sistema, como se puede ver en la Figura 6.

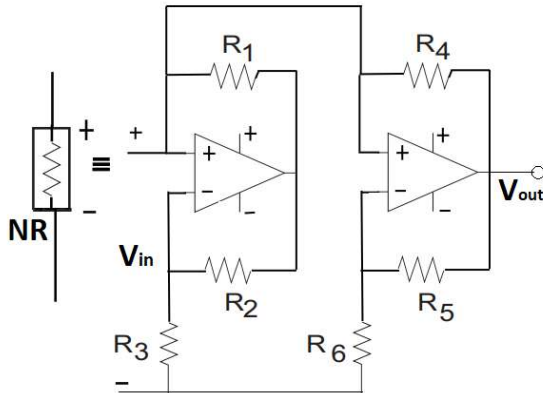


Figura 6: Composición del diodo Chua. Tomada de [Zap08]

El NR se estudiará basado a los estados de los amplificadores operacionales (OP), saturación² en negativo, comportamiento lineal y saturación en positivo.

- $V_0 < E_{(sat-)}$ Saturación negativa.
- $-E \leq V_0 \leq E$ Comportamiento lineal.
- $V_0 > E_{(sat+)}$ Saturación positiva.

Los estados anteriormente mencionados se deben a la alimentación de los integrados OP y a la señal oscilante de realimentación de los mismos. Esto se representa gráficamente en la Figura 7.

²Indica cuál es el máximo voltaje que podrá entregar el amplificador operacional. Esto depende de la referencia del amplificador usado.

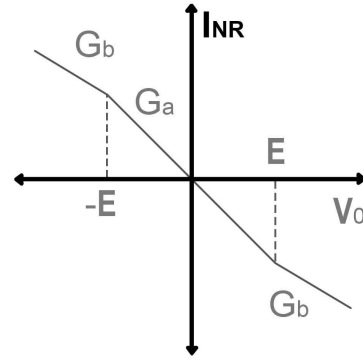


Figura 7: Relación corriente-voltaje del diodo Chua. Tomada de [Zap08].

Los valores de G_b , G_a son la conductancia obtenida en la relación de los amplificadores operacionales para sus puntos de linealidad y no linealidad, E es el valor de voltaje de ruptura de los amplificadores operacionales dados por el fabricante. La función que representa el diodo de Chua es:

$$f(V_0) = G_b V_0 + 0,5(G_a + G_b)(|V_0 + E| - |V_0 - E|).$$

De acuerdo con las ecuaciones (4), (7) y (8) en el modo que se encuentran (representan voltajes o corrientes dependiendo las unidades de cada uno), esto puede presentar problemas en el caso donde se operen entre sí (se debería llevar a unidades similares para poder operar), por lo cual al normalizar las ecuaciones se tendrán sistemas adimensionales (sin unidades), lo que facilita las operaciones para encontrar la solución al sistema algebraico, conocido como estado estacionario, punto fijo o de equilibrio³, donde puede existir multiplicidad en las soluciones⁴. Para llegar a esto primero se ingresan las nuevas variables consideradas como x, y, z .

Para iniciar, se toma en cuenta la función $f(V_0)$, que tiene pendiente negativa en G_a, G_b y un punto de ruptura que depende del voltaje de saturación del amplificador operacional B.

Estos elementos G_a, G_b están en función de los valores de los componentes del circuito:

$$G_a = -\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_6},$$

³Son estados fijos, una vez el sistema entra en ellos, permanece invariable en todos los instantes futuros, estos se clasifican según el comportamiento de las condiciones iniciales cercana a ellos (atractores, repulsores, cíclicos).

⁴Los diversos conjuntos de variables dependientes que resuelven el sistema.

$$Gb = -\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4},$$

$$B = \frac{R_5 V_{sat}}{R_5 + R_6}.$$

Con lo mencionado anteriormente respecto a las ecuaciones, se presenta la forma normalizada o adimensional de los voltajes en los capacitores V_{C_1} , V_{C_2} y la corriente en el inductor i_L en el circuito de Chua:

$$x = \frac{V_{C_1}}{B}, \quad y = \frac{V_{C_2}}{B}, \quad z = \frac{R}{B} i_L,$$

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1}, \quad \beta = \frac{R^2}{L} C_2, \quad a = G_a \cdot R, \quad b = Gb \cdot R.$$

Al reemplazar en las ecuaciones (4), (7) y (8), se tiene un sistema de tres ecuaciones diferenciales que en principio depende de dos parámetros α y β , como se ve a continuación:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(y - x - f(x)), \quad (9)$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y + z, \quad (10)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\beta y. \quad (11)$$

La normalización de la función no lineal del diodo de Chua es:

$$f(x) = bx + 0,5(a - b)(|x + 1| - |x - 1|). \quad (12)$$

4. Puntos de equilibrio

Se puede verificar del sistema de ecuaciones que el punto $(0,0,0)$ es de equilibrio. De acuerdo con lo anterior, se procede a revisar los estados que se ven en la Figura 7, donde es probable que se presenten comportamientos inesperados que en este caso son los generados por el diodo Chua.

$$f(x) = \begin{cases} G_b x + (G_b - G_a) & \text{si } (x < -1) \\ G_a x & \text{si } (-1 \leq x \leq 1) \\ G_b x + (G_b - G_a) & \text{si } (x > 1) \end{cases}$$

Como G_a y G_b representan el valor de las pendientes probables del sistema, para ello se consideran los valores de $(x = -1 \text{ y } x = 1)$ y considerando a $(y = 0 \text{ y } z = 0)$. Al evaluar en las ecuaciones (9), (10) y (11) se tiene que existen tres puntos de equilibrio en el sistema: $(1, 0, -1)$ en el punto cuando el valor $a = -1$, $(0, 0, 0)$ en el origen y $(-1, 0, 1)$, en el punto cuando el valor $a = 1$.

Ahora, con los puntos de equilibrio encontrados, se procede a realizar el análisis del comportamiento en los alrededores de los mismos (4.3)

4.1. Cálculo de la matriz jacobiana

La solución de un problema de este tipo es más cómodo por aproximaciones basadas en la serie de Taylor de forma vectorial:

$$\vec{G}(\vec{X}) = \vec{G}(\vec{x}^n) + J(\vec{x}^n)[\vec{x} - \vec{x}^n] + \dots, \quad (13)$$

donde $\vec{x}^n$ representa los puntos de equilibrio, y el truncamiento del segundo término refiere al estudio del comportamiento lineal. La ecuación 13 representa estrictamente la suma de vectores, donde $J(\vec{x}^n)$ es una matriz denominada Jacobiano de las funciones, evaluando en el estado estacionario. Además, los elementos de la matriz representan las derivadas parciales evaluadas en $(\vec{x}^n)$. Para el sistema dado, en el cual se tiene tres ecuaciones diferenciales, la matriz Jacobiana es:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} & \frac{\partial g_3}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

NOTA: Al considerar valores comerciales en el circuito se encuentra que a y b que están en la ecuación (12), como $a = -1,22$, $b = -0,728$.

4.2. Simulación

Existen muchos programas en los cuales se pueden simular circuitos eléctricos, como Orcad, Multisim, Spice, etc., pero en este caso se usó Python, dado que permite realizar dicha simulación desde un ámbito más matemático y menos circuital. Además, el entorno del programa es amistoso y permite su trabajo en línea sin necesidad de descargar paquetes al ordenador, el Python usado es Python 3 en el entorno de Google Collaboratory.

Por lo tanto, el uso de Python trae consigo una ventaja mayor que el de cualquier simulador circuital y esta es que permite el mostrar las tres señales simultáneamente como se ve en la Figura 8.

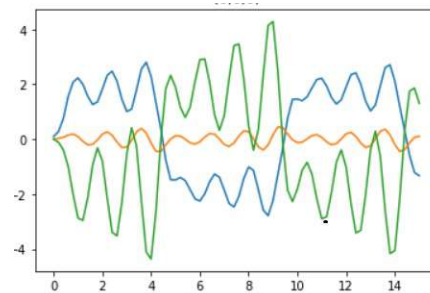


Figura 8: Señal en C_1 , C_2 y L .

La señal de color azul muestra $V_{C_1}(t)$, la señal amarilla muestra $V_{C_2}(t)$ y la señal verde muestra $L(t)$, obtenidas en el dominio del tiempo.

De igual manera, se obtuvieron señales en el dominio de la frecuencia, donde se presenta la simulación de las variables de los capacitores e inductores, en una sola gráfica como se ve en la Figura 9:

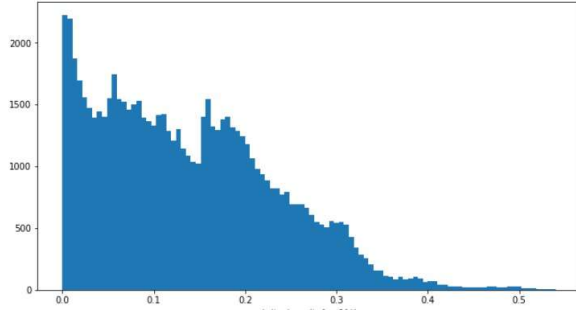


Figura 9: Frecuencia en C_1 , C_2 y L .

Al usar Python se tiene una ventaja aun mayor que la mencionada anteriormente y es el no uso de barrido DC que se debe ejecutar en simuladores de circuitos en los cuales permiten ver en modo XY (diagrama de Fases), especificando la variable de entrada (creando una señal de pulsos). En este caso no es necesario realizar estos pasos y se ejecutará la visualización de C_1 , C_2 y L en su diagrama de fase o (composición XY), pero mejor aún es cómo se comporta cada uno de manera independiente, como se ve en la figura 10.

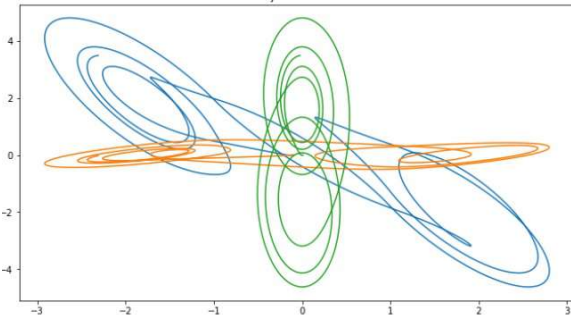


Figura 10: Diagrama de fases de C_1 vs C_2 , C_1 vs L y C_2 vs L .

Se observa que el sistema evoluciona con respecto al tiempo, teniendo dos polos y trayectorias que parecieran estar remarcadas. Esto se puede ver más claramente en la figura 12.

4.3. Interpretación de los valores propios

Al no ser lineal el sistema, se debe hacer uso del teorema de Hartman-Grobman el cual garantiza que, para puntos hiperbólicos, el comportamiento del sistema no lineal cerca del punto de equilibrio es "idéntico" al del sistema lineal correspondiente (si sus valores propios corresponden), lo cual se puede ver en la Figura 11.

Vlrs propios	Linealización		Sistema no lineal	
	Tipo	Estabilidad	Tipo	Estabilidad
Equilibrios Hiperbólicos				
$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$	nodo	I	nodo	I
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	punto silla	I	punto silla	I
$\lambda_3 < 0 < \lambda_2$	punto silla	I	punto silla	I
$\lambda_{1,2} = a \pm ib, a > 0$	espiral	I	espiral	I
$\lambda_{1,3} = a \pm ib, a > 0$	espiral	I	espiral	I
$\lambda_{2,3} = a \pm ib, a > 0$	espiral	I	espiral	I

Figura 11: Equivalencia Hartman-Grobman.

Al revisar nuestros valores propios encontramos que:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 3,08597391, \\ \lambda_2 &= -0,94298695 + 3,8669192i, \\ \lambda_3 &= -0,94298695 - 3,8669192i.\end{aligned}$$

De donde podemos inferir la existencia de un punto silla, así que por un lado las soluciones tenderán a aproximarse al punto de equilibrio pero por otro tenderán a alejarse del mismo y esto se repetirá en los dos puntos $(1, 0, -1)$ y $(-1, 0, 1)$.

Para verificar el análisis anterior, se realiza una simulación en Python donde se consideran diferentes puntos iniciales, donde pareciera que las trayectorias se estabilizan siguiendo algún tipo de patrón, pero no es posible indicar una curva hacia la cual convergen las órbitas sino que, aparentemente "fluctúan" sin periodicidad en dos regiones del espacio como se muestra en la Figura 12.

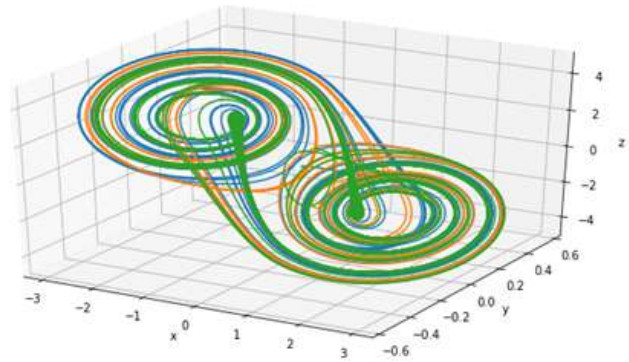


Figura 12: Simulación de diferentes trayectorias sobre los puntos de equilibrio.

5. Mapeo de Poincaré

Para tener una noción sobre lo que se quiere hacer con el mapeo de Poincaré, se debe tener en cuenta que es una aplicación que no se encuentra en el espacio del sistema, sino en un subespacio de dimensión inferior llamado sección de Poincaré. Y dicha aplicación lleva cada punto de dicha sección en el primer punto donde la órbita que lo contiene retorna a la misma.

Aplicándolo al circuito Chua, se puede tener una idea de que región conforma (el nacimiento y la muerte del doble desplazamiento (Ver Figura 13)), a partir de las trayectorias generadas, por el comportamiento y las características dotadas de los puntos de equilibrio. Al aplicar un corte en el plano (línea naranja) no es posible decir que las trayectorias evaluadas en la simulación están dadas a cruces entre sí mismas, o en cambio si estas trayectorias son muy cercanas entre si. Por otro lado lo que a primera vista se puede ver como un desplazamiento evidente, también es errático.

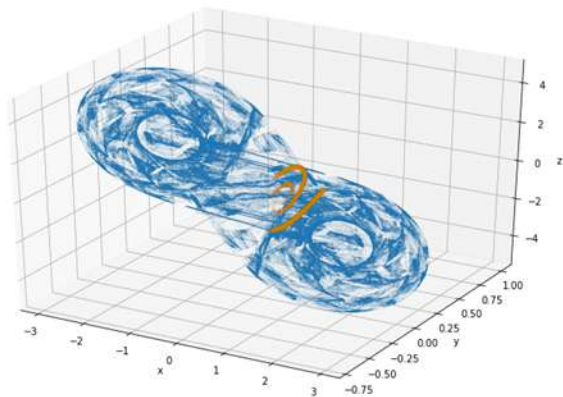


Figura 13: Simulación del Mapeo de Poincaré en el circuito Chua.

6. Comentarios

Por medio del mapeo de Poincaré se pueden dibujar dos tipos de órbitas homoclínicas posibles (de acuerdo a los puntos de equilibrio), donde una es por medio de la órbita homoclínica para un punto silla, y la segunda es la órbita homoclínica para un punto silla con foco, donde mostrará cómo inicia y termina el trayecto.

Para próximos análisis de este sistema se puede considerar si por los parámetros de Shilnicov, se puede llegar a tener un comportamiento similar con la variedad estable e inestable.

Referencias.

- [Arr21] Alexander Arredondo, *Clase de sistemas dinámicos*, Clases en la electiva sistemas dinámicos, periodo 2021-1, 2021.
- [Arr20] ———, Clases en la asignatura diseño y simulación, periodo 2020-1, 2020.
- [Bas20] Calvo et al. Bascones, *Electrónica*, 2020.
- [Dom18] Angel Dominguez, *Condensador en AC – Capacitor y la corriente alterna.*, <https://unicrom.com/condensador-en-ac-capacitor-y-la-corriente-alterna/>, 2018.
- [Flo08] Salvador Flores, *Modelo comportamental de una clase de circuitos caóticos mediante el uso de SC-CNNs*, Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Tonantzintla, Puebla, 2008.
- [Jim95] William Jimenez, *Sobre los puntos fijos hiperbólicos de un difeomorfismo local del plano.*, Revista de Matemática: Teoría y aplicaciones 2(2), recuperado de: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/matematica/article/view/118/98>, 1995.
- [Maz21] Glen Mazur, *¿Qué es la ley de Ohm?*, <https://www.fluke.com/es-co/informacion/blog/electrica/que-es-la-ley-de-ohm>, 2021.
- [McA19] Willy McAllister, *Las Leyes de Kirchhoff.*, <https://es.khanacademy.org/science/physics/circuits-topic/circuits-resistance/a/ee-kirchhoffs-laws>, 2019.
- [McA21] ———, *Componentes electrónicos inductor.*, <https://www.mecatronicalatam.com/es/tutoriales/electronica/componentes-electronicos/inductor/>, 2021.
- [Nar05] Juan Nariño, *Estudio de los efectos producidos al acoplar dos circuitos de chua y aplicaciones del circuito chua a las telecomunicaciones*, IEL2-2002-II-18, recuperado de : <https://repositorio.uniandes.edu.co/bitstream/handle/1992/15344/u234753.pdf?sequence=1>, 2005.
- [Pin10] Alejandro Pinto, *MATEMÁTICA CAS MM, Discriminante o Hessiano*, <https://blog.utp.edu.co/alejandro-pinto/files/2010/11/Discriminante-o-Hessiano.pdf>, 2010.
- [Zap08] Andres; Vidal Zapata Francisco, *Diversas rutas al caos en el circuito chua*, Universidad Simón Bolívar, Tecnológico de estudios superior de ECATEPEC, 2008.
- [Sam05] Martín Sambarino, *Tópicos de Sistemas Dinámicos*, Curso EMALCA-Costa Rica, 2005.
- [Zap21] Fanny Zapata, *Leyes de Kirchhoff*, <https://www.lifeder.com/leyes-kirchhoff/>, 2021.

Acerca del autor: Omar Fernando Granados Vergara es estudiante de séptimo semestre de matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Entre sus pasatiempos se encuentra la lectura, la cocina, el desarrollo y ejecución de aplicaciones de automatización. Entre sus proyectos futuros se encuentra el profundizar en el modelamiento de sistemas dinámicos.

MateXuento



La primera clase de una materia optativa Discusiones sobre el alcance de la ciencia y la filosofía

Clase inaugural de Filosofía para Ciencias, cerca de 50 estudiantes aguardan el inicio de la cátedra.

Se llama ente a todo aquello que “es”.

La filosofía es un saber que se ocupa teóricamente del ente, a ese nivel de abstracción, y las propiedades que como tal le son propias¹.

¡No existe un conocimiento más general!

Con esas palabras el Profesor Titular de la Cátedra de Filosofía para Ciencias, rompe el silencio que ocupaba el salón; ya no como una ligera bruma, sino que, como una espesa jalea, el silencio embarraba asiduamente cada espacio del aula, a sus ocupantes y a sus pensamientos, los cuales, en un casi total consenso no convenido, convergían en la opinión de que esta materia poco aportaría a sus procesos formativos.

Apuntalado por la mirada atónita de la clase que, en un intento por entender lo que acababan de escuchar se repetían mentalmente las palabras del Profesor, éste nuevamente habla a la multitud, más que una exposición, en una oda exclamó:

La filosofía es la ciencia de los objetos desde el punto de vista de la totalidad, mientras que las ciencias particulares son los sectores parciales del ser, provincias recortadas dentro del continente total del ser².

Una ciencia se sale de la filosofía cuando renuncia a considerar su objeto desde un punto de vista universal y totalitario³.

Tan violenta como su exhortación fue también la interrupción de su discurso, lo que dio lugar a una mirada inquieta del Profesor a su clase entera, aun cuando les intimidaba, no era esta su intención, los observaba del modo en que lo hace un ajedrecista a su rival, cuando este ha excedido el tiempo para realizar su movimiento, ansioso y vehemente.

No pasó mucho tiempo para que el escenario lograra su primer efecto manifiesto, con escrupulosa cautela una voz procedente de la concurrencia argumentó: Para Hawking *el conocimiento del mundo físico escapó de la filosofía cuando la ciencia se hizo demasiado técnica y matemática para Uste-*

des, los filósofos; dicho sea de paso, también argumentó que los filósofos redujeron tanto el ámbito de sus indagaciones que Wittgenstein, el filósofo más famoso del siglo pasado, dijo que la única tarea que le queda a la filosofía es el análisis del lenguaje⁴.

Disimulando el gesto de satisfacción que le produjo la respuesta del miembro del público, ese gozo resultante de lograr exactamente el efecto esperado, el Profesor responde a su alumnado:

El hecho, por ejemplo, de haber descubierto la neurona, el elemento mínimo del sistema nervioso, no puede autorizar a un neurólogo, por ilustre y sabio que sea, a escribir las banalidades y trivialidades más pedestres sobre los problemas elementales de la filosofía. Hay que convencerse de que la filosofía no es ciencia. La filosofía es una disciplina tan rigurosa, tan estrictamente rigurosa y difícil como la ciencia; pero no es ciencia, porque entre ambas hay mucha diferencia de propósito y de método, y entre otros éste: que cada ciencia tiene un objeto delimitado, mientras que, como he expuesto, la filosofía se ocupa de cualquier objeto en general⁵.

Interrumpiéndolo, una voz de entre las gentes le contravierte, en un tono inquisitivo aduce: la ciencia es la búsqueda de la verdad, del saber, y de eso trata el oficio de un científico, en ese orden de ideas ¿no considera Usted relevante la opinión de un científico tan respetable como Hawking, acerca del oficio marginal que ahora tiene la filosofía en la búsqueda del conocimiento?

Considero relevantes las opiniones de muchas personas - Dijo el Profesor, y continuó-, pero no por esto cualquier comentario de las mismas personas son una verdad revelada per sé, la falibilidad es una condición humana y de las obras humanas, como lo es la ciencia, evocando a Bunge, un filósofo con formación científica.

Por la misma senda de citar figuras científicas respetables, quisiera traer a colación un apartado de Bertrand Russell quien, como científico, seguramente es cuanto menos tan respetable para Usted, como lo es Sir Hawking:

La filosofía es el intento de responder a problemas finales, no de un modo negligente y dogmático, como lo hacemos en

¹Extraído de los Principios de filosofía de Adolfo Carpino.

²Extraído de las Lecciones preliminares de filosofía de Manuel García Morente.

³IBID

⁴Extraído de Historia del tiempo de Sir Stephen Hawking

⁵Extraído de las Lecciones preliminares de filosofía de Manuel García Morente.

*la vida ordinaria y aun en el dominio de las ciencias, sino de una manera crítica, después de haber examinado lo que hay de embrollado en ellos, y suprimido la vaguedad y la confusión que hay en el fondo de nuestras ideas habituales*⁶...

En un ambiente de debate y confrontación la clase terminó, el Profesor fue el primero en abandonar el aula, a pesar de hacerlo sin prisas, esto fue posible ya que, contrario a la usanza común en el gentío, que abandona el salón de clase con las rapideces propias de las manadas en huida, los integrantes de este grupo se mantuvieron sentados, realizando movimientos cortos y lentos, buscándose unos a otros los ojos con la mirada, con extrañeza y con perplejidad.

El tránsito del Profesor por el pasillo se vio interrumpido por una frase, casi una sentencia, una voz joven y determinada señaló: “No encuentro una cuestión relevante que no pueda ser abordada por las ciencias”. Era casi una pregunta, ya que a estas alturas tal manifestación no podría quedarse sin réplica.

El Profesor se puso en frente de su ahora interlocutor, a quien le preguntó el ámbito de las ciencias en las que se desarrollaban sus estudios, al saber que eran las fisicomatemáticas le dijo:

En gracia de discusión jugaremos en su campo, le propongo que se pregunte de qué manera puede abordarse científicamente el debate del principio antrópico, defendido y atacado tan ampliamente por físicos de una absoluta respetabilidad y renombre, parafraseándolo podríamos decir que dicho principio asegura que **el universo debe tener unas propiedades que permitan a la vida inteligente desarrollarse**; luego de que piense en eso para la próxima clase. . .

Interrumpiendo, dijo el alumno: Es un tema que de alguna forma la ciencia ya ha tratado, pero para los fines de esta discusión es necesario plantear un conjunto de premisas que permitan el razonamiento deductivo adecuado Profesor, pensemos en las premisas:

Si bien es cierto que el valor de las constantes físicas que han podido medirse en el universo presentan un altísimo grado de sensibilidad⁷ en el que una variación relativamente pequeña haga inviable el desarrollo de un universo relativamente estable, que permita las condiciones suficientes para la vida inteligente, y que a la vez tales condiciones son tremendamente improbables⁸, podemos plantear la singularidad que da lugar al big bang como un elemento de un espacio muestral en el que haya un enorme -o infinito- número de elementos, lo que además de hacer la singularidad *no tan singular*⁹, daría lugar a que la generación de universos sea un experimento aleatorio en el que cada conjunto (medible) de universos viables para dar lugar a la inteligencia, tenga una probabilidad asociada, así que simplemente existimos y pensamos el universo en el que estamos por que si fuera otro menos regu-

lar, no existiríamos ahí, existirán muchos universos inviables -los más, estadísticamente hablando-, pero no habrá cuenta de ellos por parte de una vida inteligente.

Ahora bien, por otra parte, el mecanismo de la evolución no es mi línea de experticia, pero vista como un tipo de algoritmo, el algoritmo genético¹⁰ se basa en la mutación (variaciones aleatorias en el cromosoma) y la combinación o cruce genético, lo que da lugar a nuevos individuos donde los de mayor desempeño o adaptación al medio, serán la siguiente generación susceptible de mutación y/o cruce. La repetición intensa y extensa de tal experimento da lugar a generaciones ulteriores más capaces y adaptadas. Este mismo mecanismo puede ocurrir previo a la existencia de un cromosoma y aplicarse directamente a conjuntos de moléculas, algunos experimentos de mediados del siglo pasado han demostrado que ciertas proteínas que corresponden a los componentes más fundamentales de la vida pueden surgir de combinaciones aleatorias.

A pesar de que el mecanismo previamente descrito presenta un alto nivel de inestabilidad en razón a que parece ser caótico, ya que pequeñas variaciones en los elementos iniciales podrían dar lugar a agudas variaciones en las trayectorias individuales, las matemáticas ya han tratado este tema.

Los atractores caóticos, entre ellos el más famoso, el de Lorenz, son objetos matemáticos en los que se describen trayectorias con un alto grado de inestabilidad, en el que variaciones pequeñísimas en las condiciones iniciales dan lugar a dramáticos cambios en las trayectorias resultantes. Aun así, hay una estabilidad no tan evidente y es la estabilidad de la cuenca, es decir, aunque todas las trayectorias son distintas luego de determinado tiempo, vistas en la gran escala, describen una geometría muy semejante, definida y acotada¹¹.

Aunque la materia pueda presentar distintas maneras de organizarse, y la vida, como una forma organizada de materia pueda evolucionar con diferentes trayectorias en el sistema caótico de la adaptación, hasta llegar a la inteligencia que es una propiedad de la materia altamente organizada¹², la vida inteligente puede ser esa cuenca estable del modelo, en la que vista a gran escala, la existencia del sapiens no es muy diferente de otra forma de vida inteligente y es un resultado más que previsible de las trayectorias de la evolución.

Frente a una respuesta tan sofisticada, curiosamente, mi argumento, el que expuse en clase, se hace aún más pertinente -dice el Profesor, prosigue-; ¿qué es existir? es una pregunta fundamental en la filosofía occidental, ¿la existencia es material (ajena a un observador) o inmaterial y dependiente de un observador?; ¿la existencia sin un observador se da aun cuando no haya prueba de ello? De manera más directa preguntaré por algunos términos por Usted empleados:

¿Qué es vida? Sabiendo que es un hecho científicamente

⁶Extraído de los problemas de la filosofía de Bertrand Russell.

⁷Mayor detalle de estos argumentos en el libro Cosmic coincidences de John Gribbin y Sir Martin Rees.

⁸Mayor detalle de estos argumentos en el libro The anthropic cosmological principle de John Barrow.

⁹La edición de febrero de 2015 de la revista Investigación y Ciencia contiene un divertido artículo referente a esta materia denominado: Multiversos.

¹⁰Una introducción la ofrece el libro Inteligencia Artificial, un enfoque moderno de Stuart Russell.

¹¹Para más detalle ver el libro The essence of chaos de Edward Lorenz.

¹²Una introducción a este tema puede hallarse en el libro Genesis and Evolutionary Development of Life de Alexandr Oparin.

¹³Un interesante libro que trata estas cuestiones es Origen de la vida sobre la tierra de Alexandr Oparin.

aceptado que un virus, por ejemplo, no está vivo, no es una pregunta simple. Según el autor las definiciones cambian¹³, pero podría ser respetable por representar la opinión de una parte importante de la comunidad científica, que son las características de la vida: la organización, la transformación de entradas en energía (metabolismo), un ciclo vital de crecimiento, desarrollo y muerte, la transmisión de información (por ejemplo, genética) mediante la reproducción y la reacción al entorno; de este modo una estrella que nace, transforma sus elementos en energía, tiene diferentes capas y/o niveles (por lo que su materia está organizada), mantiene una temperatura interna, reacciona a los estímulos gravitacionales, y al final de su ciclo explota dando lugar a elementos que se convertirán en nuevos núcleos de estrellas diferentes a la original (¿evolucionadas?) ¿está más viva que un virus?

¿Qué es inteligencia? Se intenta resolver esta cuestión a veces empleando términos como autoconciencia y sentido de autopreservación, lo que no cambia mucho la situación, solo el sustantivo de la pregunta. Entonces una forma de inteligencia artificial basada en Deep Learning, ubicada espacialmente, enterada de su rol en el devenir de un experimento, informada plenamente del contexto de la humanidad, que decida con base en su experiencia y que sepa qué es y de dónde salió, que

se preserve a sí misma, ¿es consciente?, ¿es inteligente?, ¿lo es más que un gusano?, ¿lo es más que un animal que no se esté autopreservando?, ¿podría serlo más que un hombre?

Algunos entienden estas cuestiones como relevantes, otros las consideran las más relevantes que se pueden tratar; y sobre ellas, precisamente en el ámbito de los temas de esta naturaleza, la ciencia es una herramienta inadecuada; abordar los problemas fundamentales del *ente* con el método científico, es como usar un martillo para aflojar una tuerca.

Dayron Fabián Achury-Calderón

dayronf.achuryc@konradlorenz.edu.co

Acerca del autor: Fabián Achury-Calderón es ingeniero de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y matemático de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Se ha interesado por estudiar la interacción de las matemáticas con otras ciencias. Es Auxiliar de la Justicia y de manera independiente asesora compañías en asuntos financieros y de dirección estratégica. Le apasionan la ópera, el ballet y las ciencias sociales. Sus pasatiempos favoritos son la lectura y la colección de registros de radio internacional. Disfruta recorrer museos cuando viaja y admite que se conmueve con facilidad. Algún día espera aprender a tocar piano.

K' Problema

Es año electoral en Colombia, donde constitucionalmente el presidente es elegido mediante el método de sufragio directo, esto es, será presidente el candidato que obtenga la mitad más uno de los votos. En Colombia esta votación se da en un escenario conocido como **la primera vuelta**, donde participan diversos candidatos de otro variado ramillete de partidos políticos. Cuando ninguno de dichos candidatos obtiene la mayoría, y es lo usual, se da paso a un segundo escenario conocido como **la segunda vuelta**, en la que solo participan los dos candidatos con mayor votación de la primera vuelta, y ya en este caso, se declara presidente a quien obtenga mayor número de votos. ¿Las matemáticas detrás de una votación presidencial, son solo las estadísticas y pronósticos que aparecen en los medios de comunicación y su respectiva efectividad? ¿o hay algo más? Veamos:



Figura 1: En la elección presidencial de 2022 se han presentado hasta 60 candidatos.

Para empezar, debemos tener claro que existen numerosos sistemas de elección que se aplican en una diversidad de circunstancias, no necesariamente de carácter político. En Colombia se aplica el método de la **mayoría absoluta o de pluralidad**. En realidad, ya que es bien sabido que en una elección bajo pluralidad, el ganador no necesariamente representa a satisfacción a las mayorías, lo que se aplica es un **método secuencial**, cuya finalidad es descartar candidatos hasta quedar en básicamente dos posibles opciones, esto es lo que hemos llamado la primera y la segunda vuelta.

Y un buen sistema de elección pluralista, se caracteriza, principalmente por las siguientes propiedades [HK18]:

- Un sistema de votación es **anónimo** si trata a todos los votantes por igual, lo que significa que si dos votantes

intercambian votos, el resultado de la elección seguirá siendo el mismo.

- Un sistema de votación es **neutral** si trata a ambos candidatos por igual. Esto significa que, si cada votante cambiara su voto de un candidato a otro, el resultado de la elección cambiaría, en consecuencia: el candidato ganador se convertiría en el candidato perdedor y el candidato perdedor se convertiría en el candidato ganador. (Y en el caso de un empate, todos los que cambiaron sus votos no tendrían ningún efecto en el resultado de la elección).
- Un sistema de votación es **monótono** si es imposible que un candidato ganador se convierta en un candidato perdedor al ganar votos (y no perder otros) o que un candidato perdedor se convierta en un candidato ganador al perder votos (y no ganar ninguno).

Veamos como en el clásico artículo de Kenneth May [May52] se aborda esta situación.

Suponemos n individuos y dos alternativas de elección, denotadas x y y , donde se asumen las siguientes variables:

- el i -ésimo individuo prefiere x a y , denotado xP_iy .
- el i -ésimo individuo es indiferente a x y y , denotado xI_iy .

Con esto, para cada i se cumple una y sólo una de las siguientes opciones:

$$yP_ix, \quad yI_ix \quad \text{o} \quad xP_iy.$$

Así, a cada individuo le asociamos una variable D_i que puede tomar uno de los valores $-1, 0, 1$ para cada una de estas tres situaciones. De manera similar, para el grupo, escribimos $D = -1, 0, 1$ según yPx, yIx , o xPy , es decir, dependiendo de si la decisión del grupo es a favor de y , es de indiferencia, o si es a favor de x . Si se toma el producto cartesiano

$$U \times U \times \cdots \times U. \quad (1)$$

que corresponde al conjunto de todas las diferentes tuplas n ordenadas $(D_1, D_2, \dots, D_n)$ cuyos elementos son miembros de U . Cada miembro del producto cartesiano representa un posible conjunto de preferencias individuales. En este punto se construye la función

$$D = f(D_1, D_2, \dots, D_n), \quad (2)$$

llamada **función de decisión de grupo**, la cual va del producto cartesiano $U \times U \times \cdots \times U$ en U , donde $U = \{-1, 0, 1\}$.

Vamos a hacer cuatro suposiciones sobre esta función que forman un conjunto de condiciones necesarias, suficientes e independientes, que es sólo el método en sí de toma de decisiones grupales por mayoría simple. Para definir este método con precisión, dejemos que $N(-1)$, $N(0)$ y $N(1)$ representen respectivamente el número de -1 , 0 y 1 en la función de decisión. Entonces, **decisión de mayoría simple** significa una función de decisión que produce $D = -1, 0, 1$ según $N(1) - N(-1)$ sea negativo, cero o positivo. Una definición equivalente es que $D = -1, 0, 1$ dependiendo de si $\sum D_i$ es negativo, cero o positivo. Así, las cuatro suposiciones son:

- La función de decisión de grupo está definida y tiene un valor único para cada elemento de $U \times U \times \dots \times U$.
- La función de decisión de grupo es una función simétrica de sus argumentos.
- $f(-D_1, -D_2, \dots, -D_n) = -f(D_1, D_2, \dots, D_n)$.
- Si $D = f(D_1, D_2, \dots, D_n) = 0$ o 1 , y $D'_i = D_i$ para todo $i \neq i_0$, y $D'_{i_0} > D_{i_0}$, entonces $D' = f(D'_1, \dots, D'_n) = 1$.

Esta formalidad matemática, no es más que la inclusión de los términos: siempre decidible, anónimo, equitativo y neutral como elementos vitales del sistema de elección. Con todo esto se puede enunciar y probar este famoso resultado de los años cincuenta:

Teorema 0.1 (de May). *Una función de decisión de grupo es el método de decisión de mayoría simple si y solo si siempre es decisiva, igualitaria, neutral y responde positivamente.*

Otra manera de pensar el teorema de May es que en resumen establece que en una elección de dos candidatos con un número impar de votantes, la regla de la mayoría es el único sistema de votación que es anónimo, neutral y monótono, y que evita la posibilidad de empates [HK18].

Así, al menos desde el punto de vista matemático, nuestro sistema electoral es óptimo. Podría ser otro, claro, pero lo que tenemos, está bien establecido. Ahora vamos a lo que les depara a los colombianos el próximo capítulo electoral del país.

El lunes 7 de febrero en diversos diarios nacionales se da a conocer la encuesta realizada por la empresa **YanHass S.A.** cuyos resultados arrojaron que, como dicen en las noticias, si las elecciones fueran hoy, Gustavo Petro ganaría la primera vuelta con una intención de voto del 27%, la segunda opción es el **Voto en Blanco**, con el 19%, y luego siguen: Rodolfo Hernández 12%, No Sabe/No Responde con un 8%, Sergio Fajardo con 7%, Alejandro Char con 5%, Oscar Iván Zuluaga con 4%, Juan Manuel Galán, Federico Gutiérrez y Francia Márquez con 3%, Ingrid Betancourt y Enrique Peñalosa con 2%, Carlos Amaya, Camilo Romero, Alejandro Gaviria, Aydeé Lizarazo, Jorge Robledo, Luis Pérez y David Barguil con un 1% ...

Lo primero llamativo en este caso es que las opciones voto en blanco y no sabe no responde, corresponden al 27%, un número muy importante de indecisos a quienes se les debe conquistar por su voto. Pero solo dos días antes se dio a

conocer otra encuesta, realizada por el **Centro Nacional de Consultoría**, en la que, ganaría la primera vuelta Gustavo Petro 27%, seguido de Rodolfo Hernández 14%, Voto en blanco 11%, Ingrid Betancourt 7%, No Sabe/No Responde 8%, Sergio Fajardo 6%, Álex Char 5%, Juan Manuel Galán 4%, Óscar Iván Zuluaga 4%, Enrique Peñalosa 2%, Alejandro Gaviria 2%, David Barguil 1%...

En este caso lo llamativo es que el cuarto lugar es ocupado por la candidata Ingrid Betancur con un nada despreciable 7%, mientras que en la otra encuesta ni siquiera apareció, y por otro lado la diferencia en la intención de voto en blanco difiere por 8 puntos porcentuales.

¿De dónde surgen las discrepancias entre ambas encuestas? Lo que sabemos es que en la encuesta del CNE los ciudadanos fueron consultados entre el 26 de enero y el 2 febrero, con un total de 2.206 personas entrevistadas, en 43 municipios de todas las regiones de Colombia. Mientras que la encuesta de Yanhass fue hecha entre el 25 y el 31 de enero con una muestra de 1.225 encuestas distribuidas en 60 municipios del país.

Como este es un país sin memoria, recordemos algunos resultados históricos ¹:

Las elecciones presidenciales de 2002 fueron ganadas por Álvaro Uribe, pero al principio de la contienda, en el año 2000, Uribe no superaba el margen de error en las encuestas, aparecía con apenas 1.36% en intención de voto. En noviembre de 2000 subió a 8% y a fin de año llegaba al 10%. En mayo de 2001 19% de intención de voto y en octubre ya era 23%. En enero de 2002 Uribe paso al primer lugar de las encuestas con el 39% de intención de voto, allí permaneció hasta la previa de las elecciones donde llegó a marcar 52% de la intención de voto en las encuestas, de hecho fue electo con el 53% de los votos de aquella contienda.

En las elecciones presidenciales de 2010 se vivió uno de los capítulos más tristes en términos de contiendas electorales recientes en Colombia. En mayo de 2009, un año antes de las elecciones Antanas Mockus aparecía con el 5% de la intención de voto, pero en abril de 2010 Mockus ya estaba en primer lugar con un 38%, que en mayo ya era del 45%. Tristemente, en la primera vuelta Juan Manuel Santos obtenía la victoria con el 46.6% de los votos contra solo 21% de Mockus. Al final en la segunda vuelta Santos fue elegido presidente con el 61% de los votos mientras Mockus quedaba con 28%. La realidad, Mockus era presidente solo en las redes de sus jóvenes seguidores. ¿Cómo habría sido Colombia con él como presidente?

Si nos acogemos a la historia podemos concluir que, a pesar de los resultados de las encuestas de estos días, Petro debe estar muy intranquilo y Barguil debe tener esperanza.

Pero qué dicen las matemáticas de todo esto. En Estados Unidos se utiliza la expresión 'fuzzy math' (matemáticas difusas), para describir la estrategia de utilizar los números de las encuestas, sacándolos de su contexto o realizando con ellos

¹Datos tomados de Cuadernos del Centro de Pensamiento no. 23, Encuestas y Realidades Políticas en Elecciones Presidenciales. Edición: agosto de 2018.

una interpretación favorable a quien los presenta, sin aportar las mediciones que llevan a establecer dicha conclusión.

Los conjuntos difusos son una generalización de los conjuntos clásicos. En la lógica clásica un elemento pertenece o no a un conjunto, mientras que en la lógica difusa un elemento tiene grados de pertenencia a un conjunto, esto es, utiliza expresiones que no son ni totalmente ciertas ni completamente falsas. En el caso clásico a todo elemento se le asigna 0 si no pertenece y 1 si pertenece a un conjunto. Por otro lado, el grado de pertenencia de un elemento x en un conjunto difuso A está determinado por una **función de pertenencia o característica** $\mu_A(x)$ que asigna valores en el intervalo $[0, 1]$. Cuanto más cerca se encuentre $\mu_A(x)$ del 1, mayor será la pertenencia del elemento x al conjunto A . Si consideramos un conjunto de referencia X , un conjunto difuso tiene la siguiente representación [BE02]

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}. \quad (3)$$

Las funciones de pertenencia son de diversos tipos, algunas de las que se encuentran y aplican con mayor frecuencia son las triangulares, las trapezoidales, las campanas de Gauss o las exponenciales entre otras muchas, y con ellas, se construyen todas las relaciones usuales de lógica de conjuntos.

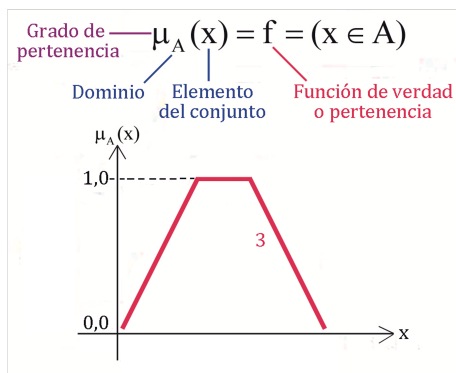


Figura 2: Elementos característicos de una función de pertenencia.

Aunque originalmente la intención detrás del uso de la lógica difusa era crear un formalismo para manipular de forma más eficiente la imprecisión y la ambigüedad del razonamiento humano expresado lingüísticamente, hoy en día se aplica ampliamente en el campo del control automático de procesos, donde junto con las redes neuronales y los algoritmos genéticos son consideradas como técnicas computacionales complementarias.

Un ejemplo concreto de 'fuzzy math' a la gringa, aplicado en un contexto no matemático es el siguiente: basados en los resultados de las encuestas de estos días en Colombia, un reconocido canal de televisión publicó: Si las elecciones a la presidencia se llevarán a cabo hoy, habría prácticamente **un empate** entre Gustavo Petro 27 %, y Rodolfo Hernández 14 %. Al respecto el periodista Felix de Bedout escribió en su Twitter:

Si una diferencia de 27% a 14% es prácticamente un empate, las posibilidades de Colombia de clasificar al mundial deben estar en el 95 %. Sí, sí Colombia, sí, sí Caribe.

Ahora sí, en el contexto matemático, ¿cómo la lógica difusa nos puede dar luces sobre las discrepancias entre diferentes encuestas, la evolución real de la intención de voto de los candidatos a lo largo de la campaña política o cómo anticipar nuevos casos como los de Uribe y Mockus? En Teoría de la Información se denomina distancia de Hamming a la efectividad de los códigos de bloque y depende de la diferencia entre una palabra de código válida y otra. Cuanto mayor sea esta diferencia, menor es la posibilidad de que un código válido se transforme en otro código válido por una serie de errores. en términos prácticos, define el número de bits que tienen que cambiarse para transformar una palabra de código válida en otra palabra de código válida. Si dos palabras de código difieren en una distancia d , se necesitan d errores para convertir una en la otra². Con toda formalidad matemática esto es:

Definición 0.1. Si $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es un conjunto referencial discreto y A y B son dos conjuntos difusos con funciones de pertenencia $\mu_A(x) = [a_x^1, a_x^2]$ y $\mu_B(x) = [b_x^1, b_x^2]$ respectivamente. La distancia de Hamming entre los dos conjuntos está dada por

$$d(A, B) := \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (|a_{x_i}^1 - b_{x_i}^1| + |a_{x_i}^2 - b_{x_i}^2|) \quad (4)$$

Aplicar lógica difusa en el análisis y diseño de las encuestas, permite por un lado, medir el nivel de incertidumbre que tienen los votantes cuando se enfrentan a la toma de la decisión **a quién le doy mi voto**, con lo cual se pueden manejar niveles reales de aceptación y rechazo de candidatos. Y por otra parte, si el conjunto A contiene las cualidades del presidente ideal y el conjunto B se asigna a cada uno de los candidatos y recoge sus principales características, con el cálculo de la distancia de Hamming, se podrá concluir, de entre todos los candidatos, quién es el que posee la distancia mínima respecto al ideal, que a la postre sería la mejor opción para ocupar la presidencia. Información más que útil para los votantes.

Elegir un buen político, qué problema...

Referencias.

- [BE02] James J. Buckley and Efsandiar Eslami, *An introduction to fuzzy logic and fuzzy sets*, Advances in Soft Computing, Physica-Verlag, Heidelberg, 2002.
- [HK18] Jonathan K. Hodge and Richard E. Klima, *The mathematics of voting and elections: a hands-on approach*, Mathematical World, vol. 30, American Mathematical Society, Providence, RI, 2018.
- [May52] Kenneth O. May, *A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decisions*, Econometrica **20** (1952), 680-684.

John A. Arredondo
alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co

² Así lo define literalmente Wikipedia o cualquier otra referencia del tema.

Política Editorial

El Paskín Matemático es una producción del Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Está abierto a todos y todas. Si tienes interés en escribir un artículo con cualquier tipo de contenido matemático, reseñar a un personaje, comentar un problema o tienes comentarios sobre nuestra publicación, envía un mensaje a paskin@konradlorenz.edu.co

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + b}$$

El Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz fue creado en 1998. Conoce más acerca de nuestro programa en nuestra página institucional

<http://www.konradlorenz.edu.co/es/aspirantes/carreras-universitarias/carrera-de-matematicas/presentacion.html>

Bogotá, Colombia. 2022

PASKÍN MATEMÁTICO

Volumen 4, No. 1, 2022

Contenido

- Mikhail Malakhaltsev y Fabio Ortiz Guzmán
Geometría no euclidiana: ideas y personas1
- Celia Alondra Guzmán May y Gustavo Ríos Segural
Puntos de Lagrange en el Sistema Solar8
- Juan Pablo Hernández Rodas
Teorema del punto fijo de Brouwer22
- Omar Fernando Granados Vergara
El circuito caótico más simple33
- Dayron Fabián Achury-Calderón
MateKuento40
- John A. Arredondo
K'Problema43

La verdadera satisfacción de las matemáticas está en aprender de los demás y compartir con los demás. Todos tenemos una comprensión clara de algunas cosas y conceptos turbios de muchas otras. No hay forma de quedarse sin ideas que necesiten aclaración.

William Thurston



$$V + E + F = 2$$

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\xi x} dx$$

$$\sin \frac{3}{4}$$

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$