



e-ISSN
2665-2471

PAS XIN MATEMÁTICO

 **KONRAD
LORENZ**
FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

Vol. 3

No. 2

$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\sin \frac{3}{4}$

$V + E + F = 2$

$m=s$

$\sqrt[3]{a^4}$

$\sum_{n=1}$

$(x)=d$

$\Delta x \rightarrow 0$

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot [\text{Adj}(A)]^t$

$n! = \prod_{k=1}^n k$

$\sqrt{x^2-x}-x^2$

$\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$

y^3

$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\tan \alpha}$

???

$\frac{x_A + x_C}{2}$

$m \cdot S/2$

$(x) = \frac{d}{3}$

$f(x) \sim \frac{\alpha \pi}{2}$

$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} \cdot \frac{(n-1)x}{1+(n-1)2x^2}$

PASKÍN MATEMÁTICO

<https://editorial.konradlorenz.edu.co/paskin-matematico.html>

e-mail: paskin@konradlorenz.edu.co

Editor

John A. Arredondo

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co

Comité Editorial

Carlos Alberto Díez

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
carlosa.diezf@konradlorenz.edu.co

Julían Jiménez Cárdenas

Universidad de los Andes
jo.jimenezc1@uniandes.edu.co

Camilo Ramírez Maluendas

Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales
camramirezma@unal.edu.co

Andrés Mauricio Rivera

Pontificia Universidad Javeriana, Sede Cali
amrivera@javerianacali.edu.co

Esta publicación puede ser difundida y reproducida con fines académicos y científicos por todos aquellos que tengan a bien hacer un correcto uso de su contenido.

ISSN 2665-2471

Fundación Universitaria Konrad Lorenz: Tel: (57 1) 347 23 11, Carrera 9 Bis No. 62-43 Bogotá – Colombia, email: info@konradlorenz.edu.co. **Carácter académico:** Institución Universitaria. Personería Jurídica por Resolución 18537 del 4 de noviembre de 1981 del Ministerio de Educación Nacional. Institución de Educación Superior sujeta a inspección y vigilancia por el Ministerio de Educación Nacional (Art. 2.5.3.2.10.2, Decreto 1075 de 2015).

DIBUJOS DE NIÑOS Y EL GRUPO ABSOLUTO DE GALOIS

Ruben A. Hidalgo *

ruben.hidalgo@ufrontera.cl

1. Introducción

En nuestros primeros cursos de estructuras algebraicas nos encontramos con ciertas estructuras llamadas *grupos* (conjuntos no vacíos con una operación binaria asociativa, con un elemento neutro y donde cada uno de sus elementos tiene un elemento inverso). El orden de un grupo es la cardinalidad del conjunto (los grupos pueden ser finitos o infinitos).

Una estrategia clásica para entender la estructura interna de un grupo dado, es la de considerar acciones del grupo en consideración en ciertos conjuntos (alguna vez escuché a un matemático mexicano la siguiente frase: A los grupos, así como a las personas, se les conocen por sus acciones”).

En el caso de un grupo finito, una herramienta clásica (que se puede obtener mirando ciertas acciones particulares) es la proporcionada por los Teoremas de Sylow, los cuales permite obtener información a partir de las potencias de los primos que dividen al orden del grupo.

En el caso de grupos infinitos la situación resulta ser un poco más complicada. En este caso, una estrategia podría ser la determinación de los grupos finitos que se pueden obtener como imagen homomorfa (en otras palabras, entender sus subgrupos normales de índice finito).

Un elemento del cuerpo $\mathbb{C}$, de los números complejos, es llamado *algebraico* si resulta ser un cero de algún polinomio en una variable con coeficientes enteros. El conjunto $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$, de los números algebraicos, es cerrado bajo las operaciones de suma, resta, multiplicación y división (como números complejos), en otras palabras, resulta ser un cuerpo. En este caso, podemos considerar su grupo de automorfismos $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, llamado el *grupo absoluto de Galois*, el cual codifica la teoría clásica de Galois. La estructura del grupo absoluto de Galois es muy misteriosa, este misterio se puede ver reflejado en el problema inverso de Galois (que aún en estos días muestra una gran resistencia):

¿Es todo grupo finito una imagen homomorfa del grupo absoluto de Galois?

En 1984, Alexander Grothendieck escribió una propuesta de proyecto en Francia: “*Esquisse d’un Programme*” [14]. En dicha propuesta Grothendieck introduce unos objetos combinatorios muy simples, a los cuales llamó *Dessins d’Enfants* (Dibujos de Niños) y observó que había una acción muy natural del grupo absoluto de Galois en esos objetos. Por desgracia, no pudo lograr la aprobación de este proyecto. Al poco

tiempo abandonó la matemática y se fue a vivir a los Pirineos, donde mantuvo muy poco contacto con otras personas y en especial con la academia. Falleció el 13 noviembre de 2014.

Así, la idea de Grothendieck era poder obtener información interna de tal grupo por medio de la combinatoria asociada a tales objetos (los dibujos de niños). Muchos matemáticos han dedicado su tiempo a elaborar estas ideas dejadas por Grothendieck y, en particular, en la búsqueda de invariantes de Galois. Es un tema muy activo en la actualidad, donde se unen varios temas (que en un comienzo podrían verse alejados) como lo son: Análisis complejo, Combinatoria, Geometría algebraica, Topología, Teoría de grupos, Teoría de Galois, etc.

La idea de estas notas, es mostrar de manera muy somera que son estos *dibujos de niños* (mostrando varias definiciones equivalentes). Dos textos modernos que recomiendo para estudiar en detalles los dibujos de niños son [10, 21].

2. Acción de Grupos

Consideremos un conjunto $E \neq \emptyset$. Denotamos por $\text{Sym}(E)$ al grupo de las permutaciones (simetrías) de E (con la operación binaria dada por la regla de composición). Cuando $E = \{1, \dots, n\}$ (donde $n \geq 1$), es clásico denotar este grupo por el símbolo $\mathfrak{S}_n$.

Una *acción* de un grupo G en el conjunto E es un homomorfismo

$$\theta : G \rightarrow \text{Sym}(E),$$

es decir, una función para la cual vale la siguiente propiedad:

$$\theta(gh) = \theta(g) \circ \theta(h), \quad \forall g, h \in G.$$

Si el homomorfismo θ es inyectivo, entonces hablamos de una *acción fiel*.

Si $e \in E$, entonces usaremos la notación

$$g(e) := \theta(g)(e).$$

en cuyo caso, la propiedad de que θ es un homomorfismo se lee como

$$g_1 g_2(e) = g_1(g_2(e)).$$

El G -estabilizador de $e \in E$, por tal acción, es el subgrupo de G definido como:

$$G_e = \{g \in G : g(e) = e\}.$$

*Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera. Casilla 54-D, Temuco, Chile

El grupo de automorfismos de la acción θ es definido como el centralizador del subgrupo $\theta(G)$ en $\text{Sym}(E)$:

$$C_G < \text{Sym}(E).$$

Observación 2.1. Si tenemos una acción $\theta : G \rightarrow \text{Sym}(E)$, la cual no es fiel, entonces se puede obtener una que sí es fiel considerando la acción natural del grupo cociente $G/\ker(\theta)$. Por eso, en esta notas sólo nos centraremos en acciones fieles.

La acción $\theta : G \rightarrow \text{Sym}(E)$ es llamada:

1. **Semiregular** si, para cada $e \in E$, vale que $|G_e| = 1$ (estabilizador trivial).
2. **Transitiva** si, para todo par $e_1, e_2 \in E$, existe $g \in G$ con $g(e_1) = e_2$.
3. **Regular** si es semiregular y transitiva.

El siguiente resultado muestra ciertas relaciones entre los objetos antes definidos.

Afirmación 2.1. Sea $\theta : G \rightarrow \text{Sym}(E)$ una acción transitiva y $C_G < \text{Sym}(E)$ el centralizador de $\theta(G)$ en $\text{Sym}(E)$. Entonces las siguientes propiedades valen.

1. C_G actúa semiregularmente en E (en su acción natural por simetrías).
2. C_G actúa regularmente si y sólo si G actúa regularmente.
3. Si G actúa regularmente, entonces $G \cong C_G$.
4. Para $e \in E$ vale que $C_G \cong N_G(G_e)/G_e$, donde $N_G(G_e)$ es el subgrupo normalizador de G_e en G .

Demostración. Sea $e \in E$ fijo. Entonces (por la transitividad) tenemos una biyección

$$\phi : G/G_e \rightarrow E : gG_e \mapsto g(e) = \theta(g)(e).$$

Esta biyección permite trasladar nuestra acción

$$\theta : G \rightarrow \text{Sym}(E),$$

a la acción de Cayley

$$\theta_\phi := \phi^{-1} \circ \theta \circ \phi : G \rightarrow \text{Sym}(G/G_e),$$

dada por

$$\theta_\phi(h)(gG_e) := hgG_e, \quad \forall h \in G.$$

Por lo anterior, podemos asumir que $E = G/G_e$ y $\theta = \theta_\phi$.

Veamos ahora quien es el grupo C_G para esta acción. Para que $\alpha \in \text{Sym}(G/G_e)$ esté en C_G es necesario y suficiente tener la igualdad

$$\alpha \circ \theta(h) = \theta(h) \circ \alpha, \quad \forall h \in G,$$

es decir,

$$\alpha(hgG_e) = h\alpha(gG_e), \quad \forall h, g \in G.$$

Tomando $g = 1$ (el elemento neutro de G), lo anterior dice:

$$\alpha(hG_e) = h\alpha(G_e), \quad \forall h \in G.$$

Ahora, si $\alpha(G_e) = bG_e$, para cierto $b \in G$, entonces

$$\alpha(hG_e) = hbG_e, \quad \forall h \in G.$$

Ahora, para que α esté bien definida, es necesario que $b \in N_G(G_e)$. En efecto, si $t \in G_e$, entonces se debe tener que

$$\alpha(htG_e) = \alpha(hG_e), \quad \forall h \in G, \forall t \in G_e,$$

equivalentemente,

$$htbG_e = hbG_e \quad \forall h \in G, \forall t \in G_e,$$

es decir,

$$b^{-1}tb \in G_e \quad \forall t \in G_e.$$

De esta manera,

$$C_G = \{\alpha_a : G/G_e \rightarrow G/G_e : hG_e \mapsto ha^{-1}G_e : a \in N_G(G_e)\}.$$

Notemos que

$$\alpha_{ab} = \alpha_a \circ \alpha_b,$$

en efecto,

$$\begin{aligned} \alpha_{ab}(hG_e) &= h(ab)^{-1}G_e = \\ &= (hb^{-1})a^{-1}G_e = \alpha_a(hb^{-1}G_e) = \alpha_a(\alpha_b(hG_e)). \end{aligned}$$

De esta manera, obtenemos un homomorfismo sobreyectivo

$$\Phi : N_G(G_e) \rightarrow C_G : a \mapsto \alpha_a$$

cuyo kernel es G_e , es decir,

$$C_G \cong_\Phi N_G(G_e)/G_e,$$

de donde obtenemos la parte 4. de la Afirmación 2.1.

Si G actúa regularmente, entonces $G_e = \{1\}$ y $N_G(G_e) = G$, de donde obtenemos que $G \cong C_G$, es decir la parte 3.

Veamos la parte 1. Sea $\rho \in C_G$ tal que $\rho(e_0) = e_0$, para algún $e_0 \in E$. La condición de que $\rho \in C_G$ quiere decir que $g(\rho(e)) = \rho(g(e))$, para cada $e \in E$ y cada $g \in G$. Si $e \in E$, entonces (por la transitividad) existe algún $g \in G$ tal que $e = g(e_0)$. Luego,

$$\rho(e) = \rho(g(e_0)) = g(\rho(e_0)) = g(e_0) = e,$$

de donde obtenemos que ρ es la permutación identidad.

Veamos ahora la parte 2. Supongamos que C_G actúa regularmente en E . Entonces esta acción es transitiva y, por la parte 1 de la Afirmación 2.1, aplicada a esta acción, tenemos que el centro C_{C_G} de C_G actúa de manera semiregular. Como $\theta(G) < C_{C_G}$, tenemos que la acción θ es semiregular y (como ya era una acción transitiva), es una acción regular.

Veamos ahora en la otra dirección. Como la acción θ es regular, tenemos que $G_e = \{1\}$, para cada $e \in E$. Luego, en la forma de la acción descrita al comienzo, tenemos que (ya que en este caso $N_G(G_e) = G$)

$$C_G = \{\alpha_a : G \rightarrow G : h \mapsto ha^{-1} : a \in G\},$$

de donde vemos que la acción de C_G es regular. $\square$

3. Automorfismos de $\mathfrak{S}_n$

Nosotros estaremos interesados en acciones de un grupo finito sobre un conjunto finito E . En este caso, podemos asumir que $E = \{1, \dots, n\}$ para cierto $n \geq 1$; luego $\text{Sym}(E) = \mathfrak{S}_n$.

Recordemos que el conjunto de todos los automorfismos de un grupo K forman a su vez un grupo (con la regla de composición) denotado como $\text{Aut}(K)$.

Cada elemento $k \in K$ define un automorfismo

$$\phi_k : K \rightarrow K : h \mapsto khk^{-1},$$

llamado un *automorfismo interior*. Estos forman un subgrupo normal $\text{Inn}(K)$ de $\text{Aut}(K)$.

Si consideramos el homomorfismo sobreyectivo

$$K \rightarrow \text{Inn}(K) : k \mapsto \phi_k,$$

podemos ver que $\text{Inn}(K) \cong K/C_K$, donde $C_K \leq K$ es el subgrupo centralizador de K . En particular, si C_K es trivial, se tiene que $\text{Inn}(K) \cong K$ (como es el caso de $K = \mathfrak{S}_n$, $n \geq 3$).

Un automorfismo que no es interior es llamado un *automorfismo exterior*. El grupo cociente

$$\text{Out}(K) = \text{Aut}(K)/\text{Inn}(K),$$

es llamado el *grupo de automorfismos exteriores* de K .

El siguiente resultado determina estos grupos de automorfismos para el caso particular $K = \mathfrak{S}_n$, $n \geq 1$.

Afirmación 3.1. Sea $n \geq 1$. Entonces

1. Si $n \in \{1, 2\}$, entonces $\text{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ es trivial.
2. El subgrupo $\text{Inn}(\mathfrak{S}_6) \cong \mathfrak{S}_6$ es un subgrupo de índice dos de $\text{Aut}(\mathfrak{S}_6)$.
3. Si $n \geq 3$ y $n \neq 6$, entonces $\text{Aut}(\mathfrak{S}_n) = \text{Inn}(\mathfrak{S}_n) \cong \mathfrak{S}_n$.

Demostración. Como $\mathfrak{S}_1$ es el grupo trivial y $\mathfrak{S}_2 \cong \mathbb{Z}_2$, se tiene que sus grupos de automorfismos son el grupo trivial. Supongamos ahora que $n \geq 3$. En este caso, como el centralizador es trivial, tenemos que $\text{Inn}(\mathfrak{S}_n) \cong \mathfrak{S}_n$.

Consideremos algún elemento $\phi \in \text{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ diferente de la identidad. Denotemos por $\mathcal{C}$ al conjunto de las clases de conjugación de los elementos de K . Los elementos de $\mathcal{C}$ son subconjuntos de $\mathfrak{S}_n$ de la forma $[\tau] = \{\sigma\tau\sigma^{-1} : \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$, donde $\tau \in \mathfrak{S}_n$. En particular, ϕ induce una biyección $\hat{\phi} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, definido por $\hat{\phi}([\tau]) = [\phi(\tau)]$.

Si τ tiene orden dos, entonces sabemos que esta permutación es un producto disjunto de una cierta cantidad de $k \geq 1$ transposiciones (donde $2k \leq n$). Más aún, dos elementos de orden dos son conjugados en $\mathfrak{S}_n$ si y sólo si tienen la misma cantidad de transposiciones en sus descomposiciones anteriores. De esta manera, podemos observar que la clase de conjugación de τ tiene cardinalidad

$$\left(\binom{n}{2} \binom{n-2}{2} \cdots \binom{n-2(k-1)}{2} \right) / k! = \frac{n!}{2^k(n-2k)!k!}.$$

Ahora, si miramos la clase de conjugación del elemento $\tau = (1, 2)$, entonces $\phi(\tau)$ debe ser un elemento de orden dos, digamos con $k \geq 1$ transposiciones. Como la clase de $[\tau]$ y $[\phi(\tau)]$ deben tener la misma cardinalidad, lo anterior nos dice que

$$2(n-2)! = 2^k(n-2k)!k!.$$

La igualdad anterior funciona sólo para $k = 1$ en el caso $n \neq 6$. En el caso $n = 6$, esta igualdad funciona para $k \in \{1, 3\}$.

Supongamos ahora que $n \neq 6$. En este caso, lo anterior nos dice que $\hat{\phi}$ fija la clase $[(1, 2)]$, es decir, si tomamos una transposición $(a, b) \in \mathfrak{S}_n$, entonces $\phi((a, b))$ sigue siendo una transposición. Consideremos las transposiciones $\tau_j = (j, j+1)$, donde $j = 1, \dots, n-1$. Sabemos que estas transposiciones generan $\mathfrak{S}_n$. Sean $\phi(\tau_j) = \sigma_j$, las cuales ahora sabemos deben ser transposiciones. Como τ_1 y τ_2 no conmutan, tampoco lo pueden hacer σ_1 y σ_2 . Así es que podemos asumir que $\sigma_1 = (l_1, l_2)$ y $\sigma_2 = (l_2, l_3)$, donde l_1, l_2 y l_3 son diferentes. Ahora, como τ_1 y τ_3 conmutan y τ_2 y τ_3 no conmutan, lo mismo debe ocurrir con σ_1, σ_2 y σ_3 ; luego podemos ver que $\sigma_3 = (l_3, l_4)$, donde $l_4 \notin \{l_1, l_2, l_3\}$. Procediendo de manera inductiva, obtendremos que $\sigma_j = (l_j, l_{j+1})$, donde $l_{j+1} \notin \{l_1, \dots, l_j\}$. Si $\eta \in \mathfrak{S}_n$ es la permutación definida por $\eta(l_j) = j$, tenemos que $\eta^{-1}\sigma_j\eta = \tau_j$ (estamos usando la multiplicación de permutaciones por la izquierda). Luego, (si ϕ_η denota como antes el automorfismo interior definido por η) tenemos que $\phi_\eta \circ \phi$ fija cada τ_j y (como estas transposiciones forman un conjunto de generadores) debemos tener que es el automorfismo identidad, es decir, $\phi = \phi_\eta^{-1} = \phi_{\eta^{-1}} \in \text{Inn}(\mathfrak{S}_n)$.

En el caso $n = 6$, notemos que el argumento anterior nos dice que si ϕ deja invariante la clase de conjugación de $(1, 2)$, entonces este es un automorfismo interior. Pero en este caso podríamos tener que ϕ enviase la clase de $(1, 2)$ en la clase de $(1, 2)(3, 4)(5, 6)$, en cuyo caso ϕ es un automorfismo exterior (un automorfismo interior necesariamente preserva las clases de conjugación). En esta última posibilidad, notemos que ϕ debe llevar la clase de $(1, 2)(3, 4)(5, 6)$ en la clase de $(1, 2)$, es decir, ϕ^2 debe ser un automorfismo interior; luego, $[\text{Aut}(\mathfrak{S}_6) : \text{Inn}(\mathfrak{S}_6)] \leq 2$. Lo que quedaría por verificar es la existencia de un automorfismo exterior. Esto es un poco más complicado, pero la idea es la siguiente.

En $\mathfrak{S}_6$ tenemos que el estabilizador de un punto es isomorfo a $\mathfrak{S}_5$ (tenemos seis de tales subgrupos, ellos formando una clase de conjugación de subgrupos) y no es subgrupo transitivo. Todo automorfismo interior necesariamente permuta esos subgrupos.

Ahora, en $\mathfrak{S}_6$ existen otros seis subgrupos isomorfos a $\mathfrak{S}_5$ (formando una clase de conjugación de subgrupos) que son transitivos. Una manera de ver estos subgrupos es de la siguiente manera. Primero observemos que en $\mathfrak{S}_5 = \langle \alpha = (1, 2), \beta = (1, 2, 3, 4, 5) \rangle$ hay exactamente seis 5-subgrupos de Sylow (cada uno de ellos isomorfos a $\mathbb{Z}_5$): $H_1 = \langle (1, 2, 3, 4, 5) \rangle$, $H_2 = \langle (1, 2, 3, 5, 4) \rangle$, $H_3 = \langle (1, 2, 4, 3, 5) \rangle$, $H_4 = \langle (1, 2, 4, 5, 3) \rangle$, $H_5 = \langle (1, 2, 5, 3, 4) \rangle$ and $H_6 = \langle (1, 2, 5, 4, 3) \rangle$. Ahora podemos considerar la acción por conjugación

$$\theta : \mathfrak{S}_5 \rightarrow \text{Sym}(\{H_1, \dots, H_6\}),$$

$$\sigma(H_j) = \sigma^{-1}H_j\sigma.$$

Se puede calcular que:

$$\alpha(H_1) = H_6, \alpha(H_2) = H_4, \alpha(H_3) = H_5,$$

$$\beta(H_1) = H_1, \beta(H_2) = H_4, \beta(H_3) = H_2,$$

$$\beta(H_4) = H_6, \beta(H_5) = H_3, \beta(H_6) = H_5.$$

Esta acción nos determina el siguiente subgrupo transitivo de $\mathfrak{S}_6$:

$$\langle (1,6)(2,4)(3,5), (2,4,6,5,3) \rangle \cong \mathfrak{S}_5.$$

Es un bonito ejercicio ver que es posible encontrar una automorfismo de $\mathfrak{S}_6$ que lleva los primeros seis subgrupos (que no eran transitivos) en los segundos (que sí son transitivos). $\square$

4. Grafos y Mapas

Un **grafo** es un triple $\Gamma = (V, E, \iota)$, donde $V \neq \emptyset$ y E son conjuntos disjuntos, y $\iota : E \rightarrow 2^V$ es una función tal que, para cada $e \in E$, la imagen $\iota(e)$ tiene cardinalidad 1 o 2. Los elementos de V son llamados los **vértices** y los de E los **ejes**.

Si $\iota(e) = \{v_1, v_2\} \in E$ (donde podría ocurrir que $v_1 = v_2$), decimos que v_1 y v_2 son **vecinos** y que v_1 y v_2 son adyacentes al eje e .

Si V y E son ambos conjuntos finitos, entonces decimos que Γ es un **grafo finito**. En este caso, el **grado** de un vértice es igual al número de ejes adyacentes a él (con el cuidado de contar por dos cada eje de cardinalidad 1, los cuales son llamados bucles).

El grafo es llamado **conexo** si dados dos vértices cualesquiera, $v, w \in V$, es posible encontrar una colección finita de ejes $e_1, \dots, e_n \in E$, tales que: $v \in \iota(e_1)$, $w \in \iota(e_n)$ y, para cada $j = 1, \dots, n-1$, $\iota(e_j) \cap \iota(e_{j+1}) \neq \emptyset$ y $\iota(e_j) \cap \iota(e_{j+1}) \cup \iota(e_j) \cap \iota(e_{j-1}) = \iota(e_j)$ (es decir, podemos viajar desde uno de ellos hasta el otro a través de ejes sin tener que saltar).

Observación 4.1. En estas notas, nuestros grafos serán finitos (y en el caso de dibujos de niños también serán conexos, con cada uno de sus vértices de grado al menos uno y no tendrán bucles). Además, si el grafo es conexo y no hay ejes ($E = \emptyset$), entonces $V = \{v\}$.

Dos grafos $\Gamma_1 = (V_1, E_1, \iota_1)$ y $\Gamma_2 = (V_2, E_2, \iota_2)$ se llaman **isomorfos** si existen biyecciones $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ y $\psi : E_1 \rightarrow E_2$ que preservan las adyacencias, es decir, si $e = \{v, w\} \in E_1$, entonces $\psi(e) = \{\phi(v), \phi(w)\} \in E_2$.

Cuando $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$, un isomorfismo es llamado un **automorfismo** del grafo Γ . El conjunto de todos los automorfismos del grafo Γ (con la operación de composición) resulta ser un ejemplo de un grupo (el cual es finito cuando el grafo es finito) denotado por $\text{Aut}(\Gamma)$.

Ejemplo 4.1 (Grafos completos). Sea $n \geq 1$. El grafo completo $K_n = (V, E, \iota)$ (ver Figura 1) es dado por

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$E = \{e_{i,j} : i, j \in \{1, \dots, n\}, i < j\} \text{ (si } n = 1, \text{ entonces } E = \emptyset)$$

$$\iota(e_{i,j}) = \{v_i, v_j\}.$$

En este ejemplo, $\text{Aut}(K_n) \cong \mathfrak{S}_n$.

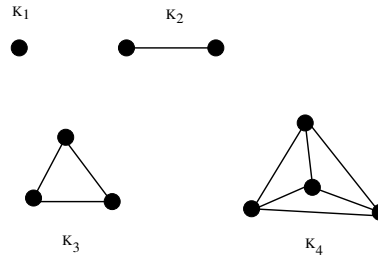


Figura 1: Grafos completos K_1, K_2, K_3 y K_4 .

4.1. Dibujando grafos en superficies compactas orientables: mapas

Una **superficie orientable** es un espacio topológico X , Hausdorff, conexo y segundo numerable (es decir, hay una base para su topología con una cantidad numerable de elementos), junto con una colección $\mathcal{A} = \{(U_j, z_j) : j \in J\}$, donde:

1. cada $U_j \subset X$ es un abierto y $\bigcup_{j \in J} U_j = X$,
2. cada $z_j : U_j \rightarrow V_j$, donde V_j es un abierto del plano $\mathbb{R}^2$, es un homeomorfismo, y
3. si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces $z_j \circ z_i^{-1} : z_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable con jacobiano positivo.

Una superficie compacta orientable es homeomorfa a la esfera unitaria S^2 (género $g = 0$) o bien a una suma conexa finita de $g \geq 1$ (llamada su género) copias del toro $S^1 \times S^1$.

Consideremos un grafo finito $\Gamma = (V, E, \iota)$. Una **incrustación** de Γ en una superficie compacta orientable X corresponde a un grafo $\widehat{\Gamma} = (\widehat{V}, \widehat{E}, \widehat{\iota})$ que es isomorfo a Γ , donde

1. $\widehat{V} \subset X$;
2. cada elemento de $\widehat{E}$ es una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$, cuya restricción al intervalo abierto $(0, 1)$ es inyectiva, de manera que $\alpha(0), \alpha(1) \in \widehat{V}$ y $\alpha((0, 1)) \cap \widehat{V} = \emptyset$ (así, podemos pensar que un eje es nada más que un arco simple conectando dos puntos de $\widehat{V}$),
3. si $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ son dos elementos diferentes de $\widehat{E}$, entonces $\alpha((0, 1)) \cap \beta((0, 1)) = \emptyset$,
4. si $\alpha \in \widehat{E}$, entonces $\widehat{\iota}(\alpha) = \{\alpha(0), \alpha(1)\}$.

Usaremos el símbolo $\Gamma \hookrightarrow X$ para denotar una incrustación de Γ en X . Es importante notar que pueden haber muchas incrustaciones “diferentes” de Γ en la misma superficie X (por diferentes nos referimos que no existe un homeomorfismo $T : X \rightarrow X$ que preserve la orientación y que lleve una incrustación en la otra). La idea de una incrustación de un grafo es que podamos dibujar tal grafo en una superficie.

Proposición 4.1. *Todo grafo finito Γ se puede incrustar en alguna superficie compacta orientable X .*

Idea. Primero observemos que podemos incrustar nuestro grafo en $\mathbb{R}^3$. Ahora, consideramos una vecindad tubular del grafo para obtener un objeto tres-dimensional (llamado un cuerpo de asas) cuya frontera es una superficie compacta orientable. Ahora empujamos el grafo hacia la frontera adecuadamente para obtener el resultado. $\square$

Una incrustación $\Gamma \hookrightarrow X$ se dice que define un **mapa** en X si cada componente de $X \setminus \Gamma$, las que llamaremos **caras** del mapa, es topológicamente un disco (podemos pensar en que cada cara es un país y los ejes de Γ son las fronteras entre países). Notemos que para que obtengamos un mapa, es necesario que Γ sea conexo (esto es lo que asegura que cada cara es un disco topológico).

Proposición 4.2. *Todo grafo finito y conexo Γ se puede incrustar en alguna superficie compacta orientable X de manera que produzca un mapa en X .*

Idea. Si el grafo no tiene ejes (es decir, $E = \emptyset$), entonces Γ es tan sólo un vértice y lo podemos incrustar en S^2 . Supongamos ahora que $E \neq \emptyset$. Por la Proposición 4.1, podemos considerar una incrustación $\Gamma \hookrightarrow X$. Identifiquemos Γ con su grafo incrustado (y que arriba hemos denotado por el símbolo $\hat{\Gamma}$). Al cortar X por Γ obtenemos una colección finita de componentes conexas, $X_1, \dots, X_n$, cada una de ellas es una superficie orientable y no compacta. Si cada una de ellas es topológicamente un disco, entonces estamos listos.

Supongamos que alguna de ellas, digamos X_r , no es topológicamente un disco. Entonces, se pueden dibujar una cantidad finita (y dos a dos disjuntas) de curvas simples y cerradas que dividan a X_r en una colección de superficies, cada una de ellas no siendo topológicamente un disco (es decir, en cada una de esas componentes vemos en su borde parte del grafo). Ahora, podemos cortar X_r por tales curvas y pegar discos a los bordes que se obtienen (ver Figura 2) para así obtener una superficie (no necesariamente conexa) $\hat{X}_r$ cuyas componentes resultan ser topológicamente discos. Si reemplazamos X_r por $\hat{X}_r$ y volvemos a agregar Γ a estas nuevas componentes, observamos que obtenemos una nueva superficie compacta orientable, de género menor que X , y una incrustación de Γ en ella que define un mapa. $\square$

4.2. Fórmula de Euler

Supongamos que tenemos una incrustación $\Gamma \hookrightarrow X$ del grafo finito $\Gamma = (V, E, \iota)$ en una superficie compacta orientable X de género g , la cual induce un mapa. Denotemos por γ el número de caras de tal mapa (notemos que necesariamente $\gamma \geq 1$). La **Fórmula de Euler** nos entrega una relación entre el género g de X y los datos del grafo Γ , la cual dice:

$$2 - 2g = |V| - |E| + \gamma,$$

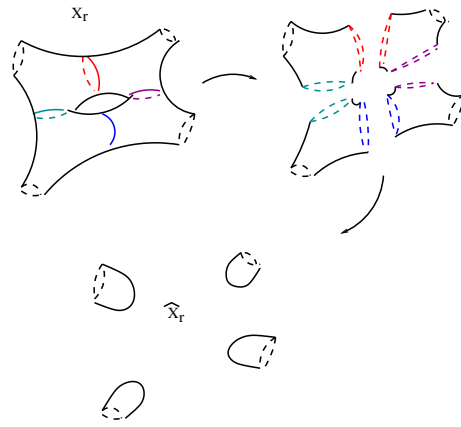


Figura 2: El proceso de cortar y pegar.

donde $|V|$ y $|E|$ denotan las cardinalidades de V y E , respectivamente. Lo anterior nos dice que

$$g = 1 + (|E| - |V| - \gamma)/2,$$

es decir, γ debe tener la misma paridad que $|E| - |V|$, y que minimizar el valor de $g \geq 0$ es equivalente a maximizar el valor de γ tal que $1 \leq \gamma \leq 2 + |E| - |V|$ manteniendo la paridad antes mencionada. Este problema de minimización de g sigue siendo una pregunta abierta; se sabe que este es un problema del tipo NP-difícil y que el problema de determinar cuándo un grafo con n vértices tiene género minimal g es NP-completo [34].

El Teorema de Kuratowski da condiciones necesarias y suficientes para que un grafo conexo se pueda incrustar en la esfera S^2 (esencialmente, esa condición es que no podamos dibujar el grafo completo K_5 o el grafo completo bipartito $K_{3,3}$ dentro del grafo).

Ejemplo 4.2. *El grafo completo K_n se puede incrustar en S^2 sólo para $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. El grafo K_5 puede incrustarse en un toro ($g = 1$). De manera más general, se sabe que el género minimal de una incrustación de K_n que defina un mapa es $\mu(K_n) = \lceil (n-3)(n-4)/12 \rceil$ (ver, [29]).*

4.3. Conjeturas SE y CDC

Consideremos un grafo finito y conexo Γ , una superficie compacta y orientable X y una incrustación $\Gamma \hookrightarrow X$ que induce un mapa sobre X .

En el caso que cada cara de tal mapa es frontera de un ciclo de Γ (un camino simple y cerrado), entonces se dice que el mapa es *circular*. Este concepto “circular” aparece en [30]. Ejemplos de mapas no-circulares son dados por aquellos que tienen una sola cara. Una condición necesaria para la existencia de un mapa circular (para Γ) es que este grafo sea 2-conexo (al quitar cualquier vértice, el grafo resultante sigue siendo conexo). La “Conjetura SE” (strong embedding conjecture) [18] dice que la propiedad de ser 2-conexo es también una condición suficiente. Relacionada a la conjetura

anterior es la “Conjetura CDC” (cycle double cover conjecture) establecida por Szekeres [33] y Seymour [32] (ver también [30, pag. 10]) la cual asegura que todo grafo finito, conexo y sin puentes (quitando cualquier eje el grafo mantiene la conectividad) admite una lista de ciclos de manera que cada eje está contenido en exactamente dos de ellos. La Conjetura CDC se ha verificado para ciertos tipos de grafos en [39] y también se sabe que es válida para los grafos completos K_n . La Conjetura SE implica la Conjetura CDC, pero no son equivalentes.

4.4. matriz de adyacencia de grafos finitos

Todo grafo finito, con n vértices, puede describirse mediante una matriz de tamaño $n \times n$, llamada su **matriz de adyacencia**. Esta matriz se construye enumerando cada vértice con un valor en $\{1, \dots, n\}$ (sin repetir) y colocando en la posición (i, j) el número de ejes que conectan los dos vértices con índices i y j . Por construcción, esta matriz es simétrica.

Si escogemos otra enumeración de los vértices, la matriz de adyacencia cambia por conjugación por una matriz de permutación (es decir, en cada columna y en cada fila sólo hay ceros salvo un único lugar donde hay un uno).

Describir un grafo por medio de sus matrices de adyacencia permite trabajar con ellos usando programas matemáticos computacionales (por ejemplo, con GAP [9]).

Proposición 4.3. *Sea A una matriz de adyacencia del grafo Γ . El grupo de automorfismos de Γ se identifica con las matrices de permutación que conmutan con A . Para determinar si existe un camino de longitud k que conecta el vértice i con el vértice j , debemos mirar A^k y ver si su coeficiente (i, j) es diferente de cero. Esto permite decidir, usando A , cuando Γ es conexo.*

Idea. Un automorfismo del grafo permuta los vértices y preserva las adyacencias. $\square$

Pregunta 4.1. *¿Cómo determinaría la 2-conexidad del grafo por medio de su matriz de adyacencia?*

Ejemplo 4.3. *El grafo completo K_n tiene una única matriz de adyacencia, siendo esta aquella matriz que tiene todos su coeficientes fuera de la diagonal igual a 1 y sobre la diagonal igual a 0.*

Ejemplo 4.4. *Consideremos el grafo (ver Figura 3) $\Gamma = (V = \{v_1, v_2, v_3\}, E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}, \iota)$, donde*

$$\iota(e_1) = \iota(e_2) = \{v_1\}, \iota(e_3) = \{v_1, v_2\}, \iota(e_4) = \iota(e_5) = \{v_2, v_3\}.$$

En este caso, una matriz de adyacencia de Γ es dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

En este caso, cada elemento de $\text{Aut}(\Gamma)$ debe fijar cada vértice, dejar invariante los conjuntos de ejes $\{e_1, e_2\}$,

$\{e_4, e_5\}$ y fijar el eje e_3 . Luego, sólo hay cuatro de tales automorfismos (representados de manera permutacional de los ejes):

$$\rho_1 = (e_1)(e_2)(e_3)(e_4)(e_5), \rho_2 = (e_1, e_2)(e_3)(e_4)(e_5),$$

$$\rho_3 = (e_4, e_5)(e_1)(e_2)(e_3), \rho_4 = (e_1, e_2)(e_3)(e_4, e_5),$$

de donde podemos observar que $\text{Aut}(\Gamma) \cong \mathbb{Z}_2^2$.

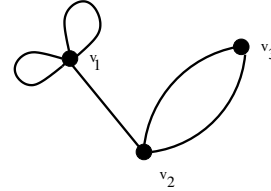


Figura 3: El grafo Γ del Ejemplo 4.4.

4.5. Grafos bipartitos

Hay ciertos grafos que permiten una coloración de sus vértices usando dos colores (por ejemplo, blanco y negro), de manera que vértices vecinos tienen diferentes colores. Notar que en este caso, para cada eje $e \in E$ del grafo debemos tener que $\iota(e)$ es de cardinalidad dos (es decir, no podemos tener bucles). Un grafo con una coloración por dos colores es llamado un grafo **bipartito**.

Si tenemos un grafo finito, y queremos ver si podemos particionar su conjunto de vértices V en dos conjuntos disjuntos V_N y V_B de manera dos vértices del mismo conjunto no estén conectados por un eje, entonces necesitamos ver los circuitos en Γ (caminos cerrados).

Proposición 4.4. *Un grafo finito es bipartito si y sólo si cada circuito tiene longitud par.*

Dos grafos bipartitos son llamados **isomorfos como grafos bipartitos** si existe un isomorfismo entre ellos como grafos pero con la propiedad extra que el isomorfismo preserva los colores (es decir, envía vértices negros en vértices negros). Esto también permite definir el concepto de un **automorfismo de un grafo bipartito**. El conjunto de todos los automorfismos del grafo bipartito Γ (con la operación de composición) resulta ser un subgrupo de $\text{Aut}(\Gamma)$, el cual denotaremos por $\text{Aut}_{bip}(\Gamma)$. Este subgrupo tiene índice a lo más dos (genéricamente ambos grupos coinciden, por ejemplo, si existe un vértice negro cuyo grado no es igual a ningún grado de un vértice blanco).

Notar que si partimos con un grafo bipartito, entonces podemos permutar los colores de sus vértices. Estos dos grafos bipartitos son considerados diferentes (independiente de si son o no isomorfos).

La matriz de adyacencia de un grafo bipartito finito es siempre de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ {}^t A_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4.5. Consideremos el grafo bipartito (ver Figura 4) con matriz de adyacencia dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

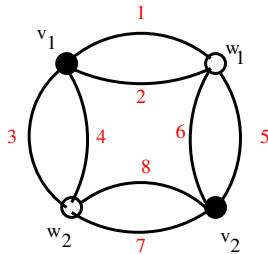


Figura 4: El grafo bipartito del Ejemplo 4.5

Ejemplo 4.6 (Grafos bipartitos completos). Sean $n, m \geq 1$. El grafo completo $K_{n,m} = (V = V_N \cup V_B, E, \iota)$ es dado por (ver Figura 5)

$$V_N = \{v_1, \dots, v_n\}, V_B = \{w_1, \dots, w_m\}$$

$$E = \{e_{i,j} : i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\}$$

$$\iota(e_{i,j}) = \{v_i, w_j\}.$$

En este ejemplo,

$$\text{Aut}(K_{n,m}) \cong \begin{cases} \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m, & n \neq m \\ (\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n) \rtimes \mathbb{Z}_2, & n = m \end{cases}$$

$$\text{Aut}_{\text{bip}}(K_{n,m}) \cong \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m.$$

La matriz de adyacencia de $K_{n,m}$ es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

donde B es una matriz de tamaño $n \times m$ y todos sus coeficientes igual a 1.

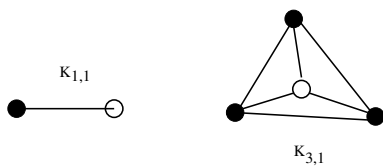


Figura 5: Grafos bipartitos completos $K_{1,1}$ y $K_{3,1}$

4.6. Una descripción permutacional de grafos bipartitos finitos

Sea $\Gamma = (V, E, \iota)$ un grafo bipartito finito, el cual puede no ser conexo,

Pediremos que cada uno de sus vértices tenga grado al menos 1.

Sean $V_N \subset V$ (respectivamente, $V_B \subset V$) el conjunto de los vértices negros (respectivamente, blancos).

Sea α (respectivamente, β) la cardinalidad de V_N (respectivamente, V_B), es decir, el número de vértices negros es α y el de blancos es β . Tenemos dos particiones $E_N = \{N_1, \dots, N_\alpha\}$ y $E_B = \{B_1, \dots, B_\beta\}$ del conjunto de los ejes E , donde los N_j (respectivamente, B_i) se obtienen considerando los ejes adyacentes a los vértices negros (respectivamente, blancos). El hecho que cada eje sólo es adyacente a un solo vértice de un color dado, garantiza que efectivamente E_N y E_B son dos particiones de E . Así, al grafo bipartito le hemos asociado el par (E_N, E_B) .

Observación 4.2. Si el conjunto de ejes E de un grafo bipartito tiene cardinalidad finita $n \geq 1$, entonces podemos considerar una biyección entre E y $\{1, \dots, n\}$. Usando esta identificación, podemos describir los grafos bipartitos finitos con n ejes (y cada uno de sus vértices con grado al menos 1) por medio de pares de particiones de $\{1, \dots, n\}$.

Ejemplo 4.7. Consideremos el grafo bipartito Γ del Ejemplo 4.5. En este caso (usando las enumeraciones dadas a los ejes), tenemos

$$E_N = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}\}, E_B = \{\{1, 2, 5, 6\}, \{3, 4, 7, 8\}\}.$$

En este ejemplo se puede ver que

$$\text{Aut}_{\text{bip}}(\Gamma) = \langle \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6 \rangle \cong ((\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2,$$

donde

$$\rho_1 = (1, 2), \rho_2 = (3, 4), \rho_3 = (5, 6), \rho_4 = (7, 8),$$

$$\rho_5 = (1, 3)(2, 4)(5, 7)(6, 8), \rho_6 = (1, 5)(2, 6)(4, 8)(3, 7).$$

Ahora, consideramos otro grafo bipartito $\hat{\Gamma} = (\hat{V}, \hat{E}, \hat{\iota})$, con respectivo par $(\hat{E}_N, \hat{E}_B)$ de permutaciones de $\hat{E}$. Si ambos grafos bipartitos Γ y $\hat{\Gamma}$ son isomorfos, entonces hay (por la definición) una biyección $\psi : E \rightarrow \hat{E}$ que preserva las adyacencias. Tal biyección envía la partición E_N (respectivamente, E_B) a la partición $\hat{E}_N$ (respectivamente, $\hat{E}_B$). Recíprocamente, si existe una biyección entre E y $\hat{E}$ preservando las particiones, entonces Γ y $\hat{\Gamma}$ son isomorfos.

Proposición 4.5. Sean $\Gamma = (V, E, \iota)$ y $\hat{\Gamma} = (\hat{V}, \hat{E}, \hat{\iota})$ dos grafos bipartitos finitos (donde cada uno de los vértices tenga grado al menos uno). Sean (E_N, E_B) y $(\hat{E}_N, \hat{E}_B)$ sus respectivos pares de particiones. Entonces ambos grafos bipartitos son isomorfos si y sólo si existe una biyección $\psi : E \rightarrow \hat{E}$ que envía la partición E_N (respectivamente, E_B) a la partición $\hat{E}_N$ (respectivamente, $\hat{E}_B$).

Observación 4.3. Como ya habíamos visto en la Observación 4.2, todo grafo bipartito finito con $n \geq 1$ ejes se puede identificar con un par (E_N, E_B) , donde E_N y E_B son dos particiones del conjunto $\{1, \dots, n\}$. El resultado anterior nos dice, en esta identificación, que dos tales pares (E_N, E_B) y $(\hat{E}_N, \hat{E}_B)$ corresponden a grafos bipartitos isomorfos (luego, ambos tienen la misma cantidad n de ejes) si y sólo si existe una permutación $\eta \in \text{Sym}(\{1, \dots, n\}) = S_n$ tal que $\eta(E_N) = \hat{E}_N$ y $\eta(E_B) = \hat{E}_B$.

4.6.1. Una equivalencia

Como hemos visto arriba, a cada grafo bipartito finito con conjunto $E \neq \emptyset$ de ejes le podemos asociar un par (E_N, E_B) , donde E_N y E_B son dos particiones de E .

Ahora, de manera recíproca, consideremos un par (P, Q) , donde P y Q son particiones de un conjunto $E \neq \emptyset$. Supongamos que $P = \{P_1, \dots, P_\alpha\}$ y $Q = \{Q_1, \dots, Q_\beta\}$. Podemos construir un grafo bipartito finito (a priori podría no ser conexo) $\Gamma_{P,Q}$ declarando los elementos de P como los vértices negros, los elementos de Q como los vértices blancos y consideramos tantos ejes entre P_j y Q_i como la cardinalidad de la intersección $P_j \cap Q_i$. Este grafo bipartito tiene la propiedad que cada uno de sus vértices tiene grado al menos 1. Se puede notar que $E_N = P$ y $E_B = Q$.

Dos pares (P, Q) y $(\hat{P}, \hat{Q})$ como antes son equivalentes si existe una permutación de E que lleve la partición P (respectivamente, Q) a la partición $\hat{P}$ (respectivamente, $\hat{Q}$).

Proposición 4.6 (Equivalencia). *Los procesos anteriormente descritos determinan una correspondencia biyectiva entre las clases de isomorfía de grafos bipartitos finitos (con todos sus vértices de grado positivo) y clases de equivalencias de pares (P, Q) , como arriba.*

Pregunta 4.2. Usando la descripción anterior, de grafos bipartitos finitos (con todos sus vértices de grado positivo) por medio de pares de permutaciones:

¿Qué condiciones deben tener los pares de particiones (P, Q) del conjunto E para que represente un grafo bipartito conexo?

Observación 4.4 (Automorfismos). Consideremos un grafo bipartito $\Gamma = (V, E, \iota)$ donde $V = V_N \cup V_B$, V_N los vértices negros y V_B los vértices blancos. Denotemos por $\text{Sym}(E)$ al grupo de las permutaciones de E (con la operación de composición). Cada automorfismo de Γ como grafo bipartito (es decir, que deja invariante V_N) induce una única permutación en $\text{Sym}(E)$ que preserva ambas particiones E_N y E_B . Recíprocamente, cada permutación de E que preserva ambas particiones induce un automorfismo de Γ . Así, se puede verificar que tenemos un homomorfismo de grupos inyectivo $\Theta: \text{Aut}_{bip}(\Gamma) \rightarrow \text{Sym}(E)$ con $\Theta(\text{Aut}_{bip}(\Gamma))$ siendo el subgrupo de $\text{Sym}(E)$ cuyas permutaciones son exactamente aquellas que preservan ambas particiones E_N y E_B .

4.6.2. Una observación de conteo

Por lo visto anteriormente, para determinar cuántos grafos bipartitos con $n \geq 1$ ejes (y todos sus vértices de grado positivo), debemos mirar cuantos pares de particiones (P, Q) de $E = \{1, \dots, n\}$ podemos obtener.

Cada partición determina una partición de n , es decir, una tupla $(s_1, \dots, s_m)$, donde m es su longitud, tal que

$$1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_m, \quad s_1 + \dots + s_m = n.$$

Hay varias maneras de representar tales particiones, uno de ellos es por medio de ciertas tablas llamadas *esquemas de Young* (estos son muy útiles en la teoría de representaciones de grupos). Un resultado muy famoso, debido a Hardy y Ramanujan (1918), dice que cuando n tiende al infinito, el valor de $p(n)$ es asintótico al valor $e^{\pi\sqrt{2n/3}}/4n\sqrt{3}$. Existe una serie convergente (pero muy complicada), debida a Rademacher (1937), que permite calcular el valor $p(n)$.

Supongamos que $P = \{P_1, \dots, P_t\}$, donde P_j tiene cardinalidad r_j . Tenemos una partición $(r_1, \dots, r_t)$ de n . Módulo equivalencia, podemos suponer que

$$P_1 = \{1, \dots, r_1\}, P_2 = \{r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2\}, \dots,$$

$$P_t = \{r_1 + \dots + r_{t-1} + 1, \dots, n\}.$$

De esta manera, el número de particiones P (módulo equivalencia) es $p(n)$.

Ahora, para determinar una segunda partición Q , primero consideramos, por cada partición $(s_1, \dots, s_m)$ de n , particiones de E de la forma $Q = \{Q_1, \dots, Q_m\}$, con Q_j de cardinalidad s_j . Esta cantidad es dada por

$$\binom{n}{s_1} \binom{n-s_1}{s_2} \dots \binom{n-(s_1+\dots+s_{m-2})}{s_{m-1}}.$$

Pero ahora, cada una de esas particiones Q se tienen que identificarlas por medio de todas las permutaciones de E que preservan la partición de P . Así podemos ver lo difícil que es intentar contar el número de grafos bipartitos (módulo equivalencia) de un número dado de ejes.

5. Dibujos de Niños

Un **Dibujo de Niños** (Dessins d' Enfants en francés) es un par $\mathcal{D} = (X, \Gamma)$, donde X es una superficie compacta conexa orientable, Γ es un grafo bipartito (finito y conexo) junto a una incrustación $\Gamma \hookrightarrow X$ que induce un mapa (es decir, un mapa bipartito).

Cada cara del mapa bipartito, es decir, cada componente de $X \setminus \Gamma$, es llamada una **cara del dibujo** y su borde es dado por una curva poligonal; el número de lados de esta curva es par y la mitad de este valor es llamado su **grado**.

Denotemos por α el número de los vértices negros, por β el de vértices blancos, por γ el de caras, por $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_\alpha$ los grados de los vértices negros, por $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_\beta$ los grados de los vértices blancos y por $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_\gamma$ los

grados de las caras. El **pasaporte** del dibujo es dada por la tupla

$$(a_1, \dots, a_\alpha; b_1, \dots, b_\beta; c_1, \dots, c_\gamma).$$

En el caso que $a_1 = \dots = a_\alpha$, $b_1 = \dots = b_\beta$ y $c_1 = \dots = c_\gamma$, decimos que el dibujo es **uniforme**.

Observación 5.1. *Notemos que puede ocurrir, y así es en muchos casos, que un mismo grafo bipartito se pueda representar de muchas maneras diferentes (inclusive en la misma superficie X), con lo cual podemos tener diferentes dibujos de niños con el mismo grafo bipartito. En el pasaporte del dibujo, las dos primeras tuplas codifican la información del grafo bipartito.*

Dos dibujos de niños $\mathcal{D}_1 = (X_1, \Gamma_1)$ y $\mathcal{D}_2 = (X_2, \Gamma_2)$ son llamados **isomorfos** si existe un homeomorfismo $F : X_1 \rightarrow X_2$ que preserve la orientación y de manera que induce un isomorfismo de los grafos bipartitos correspondientes.

Observación 5.2. *Existen dibujos de niños que no son isomorfos, pero que tienen el mismo pasaporte.*

Un **automorfismo de un dibujo de niños** $\mathcal{D} = (X, \Gamma)$ es un automorfismo del grafo bipartito Γ que es inducido por un isomorfismo de $\mathcal{D}$ consigo mismo. El conjunto de tales automorfismos resulta ser un grupo, llamado el **grupo de automorfismos** de $\mathcal{D}$ y el cual denotaremos por $\text{Aut}(\mathcal{D})$.

Decimos que el dibujo $\mathcal{D}$ es **regular** si su grupo de automorfismos $\text{Aut}(\mathcal{D})$ actúa de manera transitiva sobre sus ejes, es decir, dados cualquier par de ejes $e_1, e_2 \in E$, existe un automorfismo $\rho \in \text{Aut}(\mathcal{D})$ tal que $\rho(e_1) = e_2$. Todo dibujo regular es uniforme, pero existen dibujos uniformes que no son regulares.

Observación 5.3. *Consideremos un grafo bipartito finito y conexo $\Gamma = (V = V_N \cup V_B, E, \iota)$, donde V_N (respectivamente, V_B) denota al conjunto de los vértices negros (respectivamente, blancos) de un dibujo de niños $\mathcal{D} = (X, \Gamma)$. Entonces se puede construir un cubrimiento ramificado $Q : X \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$, donde S^2 denota la esfera unitaria con centro en el origen, con a lo más tres valores de ramificación, digamos contenidos en el conjunto $\{p = (0, 0, -1), q = (0, 0, 1), r = (0, 0, 1)\}$, de manera que $Q^{-1}(p)$ es la colección de los vértices negros, $Q^{-1}(q)$ es la colección de vértices blancos y cada punto de $Q^{-1}(r)$ pertenece a una y sólo una cara, y tal que $Q^{-1}(I) = \Gamma$, donde $I \subset S^2$ es un arco simple conectando p con q disjunto de r . En particular, $Q : X \setminus (Q^{-1}(p) \cup Q^{-1}(q) \cup Q^{-1}(r)) \rightarrow S^2 \setminus \{p, q, r\}$ es una función de cubrimiento. Esto permite observar una relación natural entre clases de isomorfía de dibujos de niños y clases de conjugación de subgrupos de índice finito del grupo libre de rango dos F_2 .*

5.1. Una descripción permutacional de dibujos de niños

Consideremos un dibujo de niños $\mathcal{D} = (X, \Gamma)$. Como $\Gamma = (V, E, \iota)$ es un grafo bipartito, donde cada uno de sus vértices es de grado al menos uno, tenemos asociado su par (E_N, E_B)

de particiones de E . Supongamos que $E_N = \{N_1, \dots, N_\alpha\}$, $E_B = \{B_1, \dots, B_\beta\}$, donde

$$N_j = \{n_{j,1}, \dots, n_{j,r_j}\}, \quad B_i = \{b_{i,1}, \dots, b_{i,s_i}\}.$$

Ahora, usando la orientación de la superficie X , podemos ordenar los ejes de cada N_j y cada B_i de manera cíclica (siguiendo la orientación opuesta a las manecillas de un reloj). Así, módulo permutación de los índices, podemos suponer que tales orientaciones son las siguientes:

$$\sigma_j = (n_{j,1}, \dots, n_{j,r_j}), \quad \tau_i = (b_{i,1}, \dots, b_{i,s_i}).$$

De esta manera obtenemos dos permutaciones de E

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_\alpha \in \text{Sym}(E),$$

$$\tau = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_\beta \in \text{Sym}(E).$$

Hemos asociado al dibujo de niños un par $(\sigma, \tau) \in \text{Sym}(E) \times \text{Sym}(E) = \text{Sym}(E)^2$.

Se puede verificar (debido a la conexidad de Γ) que el grupo $M = \langle \sigma, \tau \rangle$ es un subgrupo transitivo de $\text{Sym}(E)$ (es decir, dados dos ejes $e_1, e_2 \in E$ siempre existe algún $\rho \in M$ tal que $\rho(e_1) = e_2$). Este grupo se llama el **grupo de monodromía** del dibujo $\mathcal{D}$.

Debemos observar, por la construcción de las permutaciones σ y τ , que existe una correspondencia uno a uno entre:

1. los ciclos disjuntos de σ con los vértices negros;
2. los ciclos disjuntos de τ con los vértices blancos;
3. los ciclos disjuntos de $\tau\sigma$ con las caras del dibujo;
4. las longitudes de los ciclos de σ con los grados de los vértices negros correspondientes;
5. las longitudes de los ciclos de τ con los grados de los vértices blancos correspondientes;
6. las longitudes de los ciclos de $\tau\sigma$ con los grados de las caras correspondientes.

Tenemos también las siguientes propiedades.

1. El número de ejes es igual a la suma de los grados de los vértices negros.
2. El número de ejes es igual a la suma de los grados de los vértices blancos.
3. El número de ejes es igual a la suma de los grados de las caras.
4. El dibujo es uniforme si y sólo si todos los ciclos de σ , τ y $\tau\sigma$ tienen, respectivamente, la misma longitud.
5. (Fórmula de Euler) si g denota el género de X , $n \geq 1$ el número de ejes y $\gamma \geq 1$ el número de caras del dibujo, entonces

$$2 - 2g = \alpha + \beta + \gamma - n,$$

es decir,

$$g = 1 - (\alpha + \beta + \gamma - n)/2.$$

Cada automorfismo de $\mathcal{D}$, al ser inducido por un homeomorfismo de X que preserva la orientación, induce una permutación $\rho \in \text{Sym}(E)$ tal que $\rho\sigma\rho^{-1} = \sigma$ y $\rho\tau\rho^{-1} = \tau$ (es decir, ρ pertenece al subgrupo centralizador $\mathcal{Z}_{\text{Sym}(E)}(M)$ del grupo de monodromía M en $\text{Sym}(E)$). Viceversa, cada $\rho \in \mathcal{Z}_{\text{Sym}(E)}(M)$ es inducido por un automorfismo del dibujo.

Proposición 5.1. *Sea $\mathcal{D}$ un dibujo de niños con grupo de monodromía $M \leq \text{Sym}(E)$, donde E es el conjunto de los ejes del dibujo. Entonces se cumple que.*

1. $\text{Aut}(\mathcal{D}) \cong \mathcal{Z}_{\text{Sym}(E)}(M)$.
2. Sea $e \in E$. El dibujo $\mathcal{D}$ es regular si y sólo si $\text{Stab}_M(e) = \{1\}$, en cuyo caso $\text{Aut}(\mathcal{D}) \cong M$.

En términos del grupo de monodromía, la equivalencia de dibujos de niños es descrita por el siguiente resultado.

Proposición 5.2. *Consideremos dos dibujos de niños $\mathcal{D}$ y $\widehat{\mathcal{D}}$, cuyos conjuntos de ejes son E y $\widehat{E}$, respectivamente. Sean (σ, τ) y $(\widehat{\sigma}, \widehat{\tau})$ sus respectivas permutaciones como fueron descritas arriba. Entonces, $\mathcal{D}$ y $\widehat{\mathcal{D}}$ son isomorfos si y sólo si existe una biyección $\eta : E \rightarrow \widehat{E}$ tal que $\rho\sigma\rho^{-1} = \widehat{\sigma}$ y $\rho\tau\rho^{-1} = \widehat{\tau}$.*

Observación 5.4. *Todo dibujo de niños con $n \geq 1$ ejes (módulo isomorfismos) corresponde a una tupla $(\sigma, \tau) \in \mathfrak{S}_n^2$, donde el grupo $M = \langle \sigma, \tau \rangle$ es un subgrupo transitivo de $\mathfrak{S}_n$. En tal caso, M es el correspondiente grupo de monodromía, σ (respectivamente, τ) corresponde a la permutación asociada a los vértices negros (respectivamente, vértices blancos) y su grupo de automorfismos al subgrupo $\mathcal{Z}_{\mathfrak{S}_n}(M)$. Dos tales pares $(\sigma, \tau), (\widehat{\sigma}, \widehat{\tau}) \in \mathfrak{S}_n^2$ definen dibujos isomorfos si y sólo si existe una permutación $\rho \in \mathfrak{S}_n$ tal que $\widehat{\sigma} = \rho\sigma\rho^{-1}$ y $\widehat{\tau} = \rho\tau\rho^{-1}$.*

Ejemplo 5.1. *Consideremos el grafo bipartito del Ejemplo 4.7. Podemos preguntarnos por los dibujos de niños que se pueden construir usando tal grafo. Por la descripción permutacional, necesitamos considerar todos los posibles pares $(\sigma, \tau) \in \text{Sym}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}) = \mathfrak{S}_8$, donde*

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \sigma_2, \quad \tau = \tau_1 \tau_2, \\ \sigma_1 &\in \{(1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 2, 4), \\ &\quad (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2)\}, \\ \sigma_2 &\in \{(5, 6, 7, 8), (5, 6, 8, 7), (5, 7, 6, 8), \\ &\quad (5, 7, 8, 6), (5, 8, 6, 7), (5, 8, 7, 6)\}, \\ \tau_1 &\in \{(1, 2, 5, 6), (1, 2, 6, 5), (1, 5, 2, 6), \\ &\quad (1, 5, 6, 2), (1, 6, 2, 5), (1, 6, 5, 2)\}, \\ \tau_2 &\in \{(3, 4, 7, 8), (3, 4, 8, 7), (3, 7, 4, 8), \\ &\quad (3, 7, 8, 4), (3, 8, 4, 7), (3, 8, 7, 4)\}. \end{aligned}$$

Hay 1296 posibles pares, pero módulo isomorfismos, sólo hay 27 (ver Sección 5.2) dibujos, los cuales están distribuidos (por género) como sigue.

1. Sólo uno de género $g = 0$, correspondiente a

$$\sigma = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8), \quad \tau = (1, 6, 5, 2)(3, 8, 7, 4).$$

2. Hay 10 de género $g = 1$, los cuales corresponden a:

$$\begin{aligned} \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8), \quad \tau = (1, 2, 5, 6)(3, 4, 7, 8), \\ \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8), \quad \tau = (1, 2, 5, 6)(3, 4, 8, 7), \\ \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8), \quad \tau = (1, 2, 5, 6)(3, 8, 7, 4), \\ \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8), \quad \tau = (1, 2, 6, 5)(3, 4, 8, 7), \\ \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8), \quad \tau = (1, 2, 6, 5)(3, 7, 8, 4), \\ \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8), \quad \tau = (1, 2, 6, 5)(3, 8, 7, 4), \\ \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8), \quad \tau = (1, 5, 2, 6)(3, 8, 7, 4), \\ \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 7, 6, 8), \quad \tau = (1, 5, 6, 2)(3, 7, 8, 4), \\ \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 7, 6, 8), \quad \tau = (1, 5, 6, 2)(3, 7, 4, 8), \\ \sigma &= (1, 3, 2, 4)(5, 7, 6, 8), \quad \tau = (1, 5, 2, 6)(3, 7, 4, 8). \end{aligned}$$

De ellos, el único que resulta ser regular es el último par, cuyo grupo de automorfismos es

$$\begin{aligned} &\langle (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8), (1, 3, 2, 4)(5, 7, 6, 8), \\ &\quad (1, 5, 2, 6)(3, 7, 4, 8) \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4. \end{aligned}$$

3. Hay 16 de género $g = 2$, los cuales corresponden a

$$\begin{aligned} \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8), \quad \tau = (1, 2, 5, 6)(3, 7, 4, 8), \\ \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8), \quad \tau = (1, 2, 6, 5)(3, 7, 4, 8), \\ \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8), \quad \tau = (1, 2, 6, 5)(3, 8, 4, 7), \\ \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8), \quad \tau = (1, 5, 2, 6)(3, 7, 4, 8), \\ \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8), \quad \tau = (1, 5, 2, 6)(3, 8, 4, 7), \\ \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 7, 6, 8), \quad \tau = (1, 2, 5, 6)(3, 4, 7, 8), \\ \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 7, 6, 8), \quad \tau = (1, 2, 5, 6)(3, 7, 8, 4), \\ \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 7, 6, 8), \quad \tau = (1, 2, 5, 6)(3, 7, 4, 8), \\ \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 7, 6, 8), \quad \tau = (1, 2, 5, 6)(3, 8, 7, 4), \\ \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 7, 6, 8), \quad \tau = (1, 2, 5, 6)(3, 8, 4, 7), \\ \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 7, 6, 8), \quad \tau = (1, 5, 6, 2)(3, 8, 4, 7), \\ \sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 7, 6, 8), \quad \tau = (1, 5, 2, 6)(3, 7, 4, 8), \\ \sigma &= (1, 3, 2, 4)(5, 7, 6, 8), \quad \tau = (1, 2, 5, 6)(3, 4, 7, 8), \\ \sigma &= (1, 3, 2, 4)(5, 7, 6, 8), \quad \tau = (1, 2, 5, 6)(3, 4, 8, 7), \\ \sigma &= (1, 3, 2, 4)(5, 7, 6, 8), \quad \tau = (1, 2, 5, 6)(3, 7, 4, 8), \\ \sigma &= (1, 3, 2, 4)(5, 7, 6, 8), \quad \tau = (1, 5, 2, 6)(3, 8, 4, 7). \end{aligned}$$

El último par es el único que determina un dibujo regular, cuyo grupo de automorfismos es

$$\begin{aligned} &\langle (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8), (1, 3, 2, 4)(5, 8, 6, 7), \\ &\quad (1, 5, 2, 6)(3, 7, 4, 8) \rangle \cong Q_8. \end{aligned}$$

5.2. Dibujos de niños con el mismo grafo bipartito

Dado un grafo bipartito finito conexo $\Gamma = (V = V_N \cup V_B, E)$, uno puede preguntarse cuántos dibujos de niños hay, módulo isomorfismos, cuyo grafo bipartito asociado sea isomorfo a Γ . Una manera de obtener una respuesta a la anterior, se puede proceder con el siguiente método [16] que puede fácilmente realizarse usando GAP [9]. Primero consideramos el par de particiones (E_N, E_B) del conjunto E , digamos $E_N = \{P_1, \dots, P_\alpha\}$, $E_B = \{Q_1, \dots, Q_\beta\}$. Consideramos el conjunto $\mathcal{F}_\Gamma$ formado por todos los pares $(\sigma, \tau) \in \text{Sym}(E)^2$ donde $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_\alpha$, $\tau = \tau_1 \cdots \tau_\beta$ son tales que σ_i (respectivamente, τ_j) es un ciclo que se forma usando los ejes en P_i (respectivamente, Q_j). De esta manera, $\mathcal{F}_\Gamma$ tiene cardinalidad

$$\prod_{i=1}^{\alpha} (|P_i| - 1)! \prod_{j=1}^{\beta} (|Q_j| - 1)!.$$

Cada elemento de $\text{Aut}_{\text{bip}}(\Gamma)$ induce una única permutación de E , lo cual permite observar la existencia de un homomorfismo inyectivo $\Theta : \text{Aut}_{\text{bip}}(\Gamma) \rightarrow \text{Sym}(E)$. Usando esta representación, podemos considerar la siguiente acción de $\text{Aut}_{\text{bip}}(\Gamma)$ sobre $\mathcal{F}_\Gamma$:

$$\text{Aut}_{\text{bip}}(\Gamma) \times \mathcal{F}_\Gamma \rightarrow \mathcal{F}_\Gamma$$

$$(\phi, (\sigma, \tau)) \mapsto (\Theta(\phi)^{-1} \sigma \Theta(\phi), \Theta(\phi)^{-1} \tau \Theta(\phi)).$$

El conjunto cociente $\mathcal{F}_\Gamma / \text{Aut}_{\text{bip}}(\Gamma)$ está en correspondencia biyectiva con el conjunto de las clases de isomorfía de los dibujos cuyo grafo bipartito es isomorfo a Γ . Más aún, si $(\sigma, \tau) \in \mathcal{F}_\Gamma$ y $\mathcal{D}_{(\sigma, \tau)}$ denota el dibujo asociado, entonces $\text{Aut}(\mathcal{D}_{(\sigma, \tau)}) \cong \text{Stab}_{\text{Aut}_{\text{bip}}(\Gamma)}((\sigma, \tau))$.

5.3. Dibujos Z-orientables

Se dice que un dibujo de niños es **Z-orientable** (Zapponi-orientable) si es posible pintar las caras del dibujo usando sólo dos colores (blanco y negro) de manera que caras adyacentes tengan colores diferentes (en otras palabras, el grafo dual es bipartito). El concepto de Z-orientabilidad fue originalmente introducido por Zapponi [38] para el caso de **dibujos de niños limpios** (clean dessins d'enfants) que son aquellos donde todos los vértices blancos tienen grado 2.

Como sabemos que un grafo (finito) es bipartito si y sólo si cada uno de sus circuitos tiene longitud par, en el caso de dibujos de género cero la condición de ser circular es equivalente a que cada vértice (blanco y negro) tenga grado par. En el caso de género al menos uno, esta condición es necesaria, pero no es suficiente.

Proposición 5.3 ([12]). *Sea $\mathcal{D} = (X, \Gamma)$ un dibujo de niños con grupo de monodromía $M = \langle \sigma, \tau \rangle \leq \text{Sym}(E)$, donde σ y τ son las permutaciones asociadas a los vértices negros (respectivamente, blancos), y sea $e \in E$ un eje. El dibujo $\mathcal{D}$ es Z-orientable si y sólo si la regla*

$$\sigma, \tau \mapsto -1,$$

define un homomorfismo $\theta : M \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ satisfaciendo que $\text{Stab}_M(e) \leq \ker(\theta)$.

Observación 5.5. *Si el dibujo es regular, entonces (como $\text{Stab}_M(e)$ es trivial) para verificar si el dibujo es Z-orientable, sólo se necesita ver si la regla*

$$\sigma, \tau \mapsto -1,$$

define un homomorfismo $\theta : M \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$.

Sea M el grupo de monodromía de un dibujo $\mathcal{D}$. Notemos del resultado anterior que la existencia de un homomorfismo θ , como se requiere, asegura que su kernel sea un subgrupo de índice dos de M . Luego, si el grupo de monodromía M no tiene un subgrupo de índice dos (por ejemplo, si M es un grupo simple; como lo es $M \cong \mathcal{A}_n$ con $n \geq 5$), entonces el dibujo $\mathcal{D}$ no puede ser Z-orientable.

Supongamos ahora que sabemos que M tiene un subgrupo de índice dos y consideremos el subgrupo normal $M^2 = \langle m^2 : m \in M \rangle$. Como M se genera por dos elementos, se tienen las siguientes tres posibilidades: (i) $M = M^2$, (ii) $M/M^2 \cong \mathbb{Z}_2$ or (iii) $M/M^2 \cong \mathbb{Z}_2^2$.

En el caso (i), no puede existir un homomorfismo sobreyectivo $\theta : M \rightarrow \mathbb{Z}_2$, luego el dibujo $\mathcal{D}$ no puede ser Z-orientable.

En el caso (ii), el dibujo $\mathcal{D}$ es Z-orientable si y sólo si $\text{Stab}_M(e) \leq M^2$ y $\tau\sigma \in M^2$.

En el caso (iii), el dibujo $\mathcal{D}$ es Z-orientable si y sólo si $\text{Stab}_M(e) \leq \langle M^2, \tau\sigma \rangle$.

Ejemplo 5.2. *Consideremos uno de los casos de género $g = 2$ del Ejemplo 5.1, dado por*

$$\sigma = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8), \tau = (1, 5, 2, 6)(3, 7, 4, 8)$$

en cuya situación $\tau\sigma = (1, 6, 2, 7)(3, 8, 4, 5)$ y $M = \langle \sigma, \tau \rangle \cong ((\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$. En este caso tenemos que $\sigma\tau^2 = (2, 4)(6, 8) \in \text{Stab}_M(1)$, por lo cual no es posible encontrar un homomorfismo θ como se requiere en la Proposición anterior; es decir, este dibujo no es Z-orientable.

5.4. Dibujos circulares

Como ya habíamos comentado, la Conjetura SE nos decía que todo grafo finito 2-conexo se puede incrustar en alguna superficie compacta orientable de manera que cada una las caras del mapa inducido es acotado por un ciclo del grafo. Decimos que un dibujo es *circular* si su mapa (bipartito) es circular. Como todo grafo puede ser transformado en un grafo bipartito agregando vértices en la mitad de sus ejes, podemos ver que la Conjetura SE es equivalente a que todo grafo bipartito 2-conexo admite un dibujo circular. En [8], en el caso que el dibujo es regular, Fan describe un criterio para que este sea circular en términos de su grupo de automorfismos (por ejemplo, si este grupo tiene subgrupo centralizador trivial, entonces el dibujo es circular). Usando tal criterio, Fan puede describir cuando un grafo bipartito completo $K_{n,m}$ ($n, m \geq 2$) posee un dibujo regular y circular. En [17] hay un criterio de

circularidad, en términos del grupo de monodromía, para la propiedad de ser circular (el cual generaliza el criterio de Fan).

Proposición 5.4 ([17]). *Sea $\mathcal{D}$ un dibujo de niños con grupo de monodromía $M = \langle \sigma, \tau \rangle \leq \text{Sym}(E)$. Entonces $\mathcal{D}$ es circular si y sólo si las siguientes propiedades valen:*

1. σ y τ no tienen ejes fijos (es decir, no hay vértices de grado uno);
2. cada ciclo de σ y cada ciclo de $\tau\sigma$ tienen a lo más un eje en común;
3. cada ciclo de τ y cada ciclo de $\tau\sigma$ tienen a lo más un eje en común.

El dibujo dado en Ejemplo 5.2 no es circular.

Este criterio también permite observar que el grafo completo bipartito $K_{3,5}$ admite un dibujo uniforme circular, pero (por el criterio de Fan) no admite dibujos regulares circulares.

5.5. Otras maneras equivalentes de describir dibujos de niños

Consideremos un dibujo de niños $\mathcal{D} = (X, \Gamma)$. Consideremos su grupo de monodromía $M = \langle \sigma, \tau \rangle \leq \text{Sym}(E)$, donde σ y τ son las permutaciones asociadas a los vértices negros (respectivamente, blancos). Asociado al dibujo $\mathcal{D}$ tenemos las tuplas $\mathfrak{B}_{\mathcal{D}} = (M, \sigma, \tau, E)$ y $\mathfrak{A}_{\mathcal{D}} = (M, \text{Stab}_M(e), \sigma, \tau)$, donde $e \in E$.

Sean $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ dos dibujos de niños con grupos de monodromías $M_1 = \langle \sigma_1, \tau_1 \rangle \leq \text{Sym}(E_1)$ y $M_2 = \langle \sigma_2, \tau_2 \rangle \leq \text{Sym}(E_2)$, respectivamente. Entonces, estos dos dibujos son isomorfos si y sólo si existen un isomorfismo $\theta : M_1 \rightarrow M_2$, definido por la regla $(\sigma_1, \tau_1) \mapsto (\sigma_2, \tau_2)$, y una biyección $\phi : E_1 \rightarrow E_2$ tal que (para cada $m \in M_1$) $\phi \circ m = \theta(m) \circ \phi$ y $\theta(\text{Stab}_{M_1}(e))$ es M_2 -conjugado a $\text{Stab}_{M_2}(\phi(e))$.

Esto permite definir, de manera equivalente, un dibujo de niños por los siguientes tipos de tuplas.

1. Un dibujo de niños es una tupla $\mathfrak{B} = (M, x, y, E)$, donde M es un grupo finito generado por $x, y \in M$, que actúa de manera transitiva sobre un conjunto finito $E \neq \emptyset$. Dos tales tuplas $\mathfrak{B}_1 = (M_1, x_1, y_1, E_1)$ y $\mathfrak{B}_2 = (M_2, x_2, y_2, E_2)$ definen dibujos isomorfos si y sólo si existe un isomorfismo $\theta : M_1 \rightarrow M_2$, definido por la regla $(x_1, y_1) \mapsto (x_2, y_2)$, y existe una biyección $\phi : E_1 \rightarrow E_2$ tal que $\phi \circ m = \theta(m) \circ \phi$. El grupo de automorfismos del dibujo $\mathfrak{B} = (M, x, y, E)$ es isomorfo al normalizador en M del M -estabilizador de un punto $e \in E$ cocientado por el estabilizador, es decir, $\text{Aut}(\mathfrak{B}) \cong N_M(\text{Stab}_M(e))/\text{Stab}_M(e)$.
2. Un dibujo de niños es una tupla $\mathfrak{A} = (M, H, x, y)$, donde M es un grupo finito generado por $x, y \in M$ y H es un subgrupo de M tal que $\cap_{m \in M} mHm^{-1} = \{1\}$. Dos tales tuplas $\mathfrak{A}_1 = (M_1, H_1, x_1, y_1)$ y $\mathfrak{A}_2 = (M_2, H_2, x_2, y_2)$ definen dibujos isomorfos si y sólo si existe un isomorfismo $\theta : M_1 \rightarrow M_2$, definido por la regla $(x_1, y_1) \mapsto (x_2, y_2)$,

tal que $\theta(H_1)$ es M_2 -conjugado a H_2 . El grupo de automorfismos del dibujo $\mathfrak{A} = (M, H, x, y)$ es isomorfo al normalizador en M del H cocientado por H , es decir, $\text{Aut}(\mathfrak{A}) \cong N_M(H)/H$.

6. Superficies de Riemann y Dibujos de Niños

Sea X un espacio topológico conexo y Hausdorff. Una **estructura de superficie de Riemann** en X es una colección (maximal) $\mathcal{A} = \{(U_i, z_i) : i \in I\}$ donde:

1. cada $U_i \subset X$ es un conjunto abierto no vacío;
2. $X = \cup_{i \in I} U_i$ (es decir, la colección $\{U_i : i \in I\}$ es un cubrimiento abierto de X);
3. existen abiertos $V_i \subset \mathbb{C}$ tales que $z_i : U_i \rightarrow V_i$ son homeomorfismos;
4. si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces $z_j \circ z_i^{-1} : z_i(U_i \cap U_j) \subset V_i \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa.

Los pares (U_i, z_i) son llamadas las cartas de la estructura de superficie de Riemann y $\mathcal{A}$ es llamado un **atlas (maximal) holomorfo**.

La condición de ser “maximal” no es necesaria para definir la estructura de superficie de Riemann debido al Lema de Zorn (es decir, para inducir una estructura de superficie de Riemann, basta con encontrar una colección $\mathcal{A}$ satisfaciendo las propiedades 1.-4.- arriba).

Una estructura de superficie de Riemann asegura que el espacio topológico debe ser segundo numerable (Teorema de Radón).

Un **biholomorfismo entre dos superficies de Riemann** $S_1 = (X_1, \mathcal{A}_1)$ y $S_2 = (X_2, \mathcal{A}_2)$ es un homeomorfismo $F : X_1 \rightarrow X_2$ (que necesariamente tendrá que preservar la orientación) que en coordenadas locales es holomorfa, es decir, para cada $p \in X_1$ existen cartas $(U_1, z_1) \in \mathcal{A}_1$ y $(U_2, z_2) \in \mathcal{A}_2$ tales que:

1. $p \in U_1$;
2. $F(U_1) \subset U_2$;
3. $z_2 \circ F \circ z_1^{-1} : z_1(U_1) \subset V_2 \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa.

En este caso, decimos que S_1 y S_2 son **isomorfas**.

El **grupo de automorfismos holomorfos** de una superficie de Riemann S es dado por el conjunto (junto con la operación de composición) de los biholomorfismos de S consigo misma.

El Teorema de Uniformización (Klein-Koebe-Poincaré) asegura que toda superficie real, segundo numerable, conexa y orientable posee estructuras de superficies de Riemann. En el caso compacto, las superficies orientables conexas son homeomorfas a: (i) S^2 (una superficie de género cero) o (ii) la suma conexas de $g \geq 1$ copias del toro $S^1 \times S^1$ (g es el género de la superficie). Más aún, en S^2 hay una única estructura

de superficie de Riemann (módulo isomorfismos). Para cada $g \geq 1$ fijo, hay infinitas estructuras de superficies de Riemann no isomorfas. Esto nos lleva a considerar espacios de móduli (espacios que parametrizan las clases de equivalencia de superficies de Riemann). Este es un tema larguísimo para otra exposición, sólo notar que resultan ser espacios complejos con singularidades (de hecho, son abiertos de variedades algebraicas definidas sobre $\mathbb{Q}$).

6.1. Algunos ejemplos

Ejemplos de superficies de Riemann son:

1. Los conjuntos abiertos conexos no vacíos del plano complejo. Estos son ejemplos no-compactos.

2. Un ejemplo de una superficie de Riemann compacta es dada por la **esfera de Riemann** $\widehat{\mathbb{C}}$. Esta consiste de la esfera $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ (con la topología inducida de la topología Euclídea de $\mathbb{R}^3$) y un atlas (no maximal) holomorfo es dado por $\mathcal{A} = \{(U_1, z_1), (U_2, z_2)\}$, donde

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_3 \neq 1\}, \\ U_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_3 \neq -1\}, \\ z_1 : U_1 &\rightarrow \mathbb{C} : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3}, \\ z_2 : U_2 &\rightarrow \mathbb{C} : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_1}{1+x_3} - i \frac{x_2}{1+x_3}. \end{aligned}$$

En este caso, $z_2 \circ z_1^{-1}(z) = 1/z$.

3. Otros ejemplos de superficies de Riemann pueden obtenerse de manera algebraica. Por ejemplo, sea $n \geq 2$ un entero, y consideremos una colección de polinomios homogéneos (pueden tener grados diferentes)

$$P_1, \dots, P_{n-1} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}].$$

Con estos polinomios podemos considerar la función

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} &\rightarrow \mathbb{C}^{n-1} \\ x = (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (P_1(x), \dots, P_{n-1}(x)). \end{aligned}$$

Sea $M = F^{-1}(0, \dots, 0)$. El Teorema de la Función Implícita nos asegura que si $(0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n-1}$ es un valor regular de F , entonces M resulta ser una subvariedad compleja de dimensión 2 (notemos que hemos quitado el origen del dominio de definición de F). Supongamos, en lo que sigue, que estamos en estas condiciones.

Ahora, consideremos el espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} / \sim$ (que parametriza los sub-espacios vectoriales uno-dimensionales del espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^{n+1}$). La relación (de equivalencia) $\sim$ es dada por $x \sim y$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $y = \lambda x$. Se tiene que este espacio es una variedad compleja compacta de dimensión n . La proyección natural

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto [x_1 : \dots : x_{n+1}] \end{aligned}$$

resulta ser holomorfa (de hecho una submersión).

Ahora, si proyectamos M por medio de π , obtenemos una superficie de Riemann compacta $S = \pi(M) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. Este tipo de superficies de Riemann son **curvas algebraicas complejas suaves**.

B. Riemann observó que cada superficie de Riemann compacta se puede ver como una curva algebraica compleja.

Un ejemplo de este tipo de superficies de Riemann son las **curvas de Fermat de grado k** : que corresponden a tener $n = 2$ y $P_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^k + x_2^k + x_3^k$. En este caso, la superficie de Riemann asociada es de género $g = (k-1)(k-2)/2$.

6.2. Dibujos de niños y superficies de Riemann: Pares de Belyi

Sea S una superficie de Riemann compacta. Una **función de Belyi** en S es una función holomorfa no-constante $\beta : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ con a lo más tres valores de ramificación, los que supondremos contenidos en el conjunto $\{0, 1, \infty\}$. En el caso de que exista una tal función de Belyi, diremos que S es una **curva de Belyi** y que el par (S, β) es un **par de Belyi**. Dos pares de Belyi (S_1, β_1) y (S_2, β_2) son llamado **isomorfos** si existe una función holomorfa biyectiva (es decir, un biholomorfismo) $A : S_1 \rightarrow S_2$ tal que $\beta_1 = \beta_2 \circ A$.

Dado un par de Belyi (S, β) , podemos construir un dibujo de niños $\mathcal{D} = (X, \Gamma)$ tomado $X = S$ y Γ siendo el grafo bipartito cuyos vértices negros (respectivamente, blancos) son las preimágenes por β de 0 (respectivamente, 1) y ejes son las preimágenes por β del intervalo abierto $(0, 1)$.

De manera recíproca, supongamos que tenemos un dibujo de niños $\mathcal{D} = (X, \Gamma)$. Como hemos dicho en la Observación 5.3, tenemos la existencia de un cubrimiento ramificado $Q : X \rightarrow S^2$ con a lo más tres valores de ramificación, digamos contenidos en el conjunto $\{p = (0, 0, -1), q = (0, 0, 1), r = (0, 0, 1)\}$, de manera que $Q^{-1}(p)$ es la colección de los vértices negros, $Q^{-1}(q)$ es la colección de vértices blancos y cada punto de $Q^{-1}(r)$ pertenece a una y sólo una cara, y tal que $Q^{-1}(I) = \Gamma$, donde $I \subset S^2$ es un arco simple conectando p con q disjunto de r . Consideremos un homeomorfismo que preserva la orientación $T : S^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $T(p) = 0$, $T(q) = 1$, $T(r) = \infty$ y $T(I) = [0, 1]$. Notemos que T no es único, pero sí lo es módulo homotopía relativa a los puntos p, q, r . Tomemos $\beta = T \circ Q : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ y en X consideramos la estructura de superficie de Riemann que se obtiene levantando aquella de la esfera de Riemann por β . De esta manera, obtenemos que (S, β) es un dibujo de niños que revierte el proceso anterior.

Proposición 6.1. *Los dos procesos, descritos anteriormente, definen una correspondencia biyectiva entre las clases de isomorfía de dibujos de niños y las clases de isomorfía de pares de Belyi.*

El resultado anterior nos dice que cada dibujo de niños, un objeto puramente combinatorio, es equivalente a un par de Belyi, un objeto analítico.

6.3. La acción del grupo absoluto de Galois sobre dibujos de niños

Como hemos visto en la sección anterior, un dibujo de niños $\mathcal{D} = (X, \Gamma)$ define un par de Belyi $(S_{\mathcal{D}}, \beta_{\mathcal{D}})$, donde $S_{\mathcal{D}}$ es una (única módulo biholomorfismos) estructura de superficie de Riemann en X .

En este caso, por el teorema del descenso de Weil [35], se tiene que: (i) $S_{\mathcal{D}}$ se puede realizar como una curva algebraica C donde los polinomios P_j que le definen tienen sus coeficientes en el cuerpo $\overline{\mathbb{Q}}$ de los números algebraicos y (ii) $\beta_{\mathcal{D}}$ se realiza como una función racional (es decir, como el cociente de dos polinomios homogéneos del mismo grado y relativamente primos) también con coeficientes en $\overline{\mathbb{Q}}$. (Más aún, el teorema de Belyi [1] nos asegura toda curva algebraica definida como ceros de polinomios sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, que define una superficie de Riemann, proviene de un par de Belyi).

Si $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, entonces podemos aplicar σ a los coeficientes de los polinomios P_j y a la función racional $\beta_{\mathcal{D}}$ anteriores para obtener los nuevos polinomios P_j^{σ} y la función racional $\beta_{\mathcal{D}}^{\sigma}$. Estos polinomios P_j^{σ} definen una nueva curva algebraica C^{σ} , que a su vez define una nueva superficie de Riemann $S_{\mathcal{D}}^{\sigma}$, donde $\beta_{\mathcal{D}}^{\sigma}$ es una función de Belyi. Este nuevo par de Belyi nos induce un dibujo de niños $\mathcal{D}^{\sigma} = (X, \Gamma_{\sigma})$.

Este proceso define una acción del grupo absoluto de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sobre la colección de (clases de equivalencia) de dibujos de niños. Esta acción resulta ser fiel, es decir, para cada $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, σ diferente de la identidad, hay algún dibujo de niños $\mathcal{D}$ de manera que $\mathcal{D}^{\sigma}$ no es equivalente a $\mathcal{D}$ [10, 21].

6.3.1. Invariantes

Ahora que tenemos una acción del grupo absoluto de Galois en los dibujos de niños, nos podemos preguntar si dados dos de estos dibujos de niños están o no en la misma órbita por tal acción. Una manera de distinguir órbitas es por medio de los llamados invariantes. Un invariante es un dato que podemos determinar de un dibujo de niños y de manera que es invariante por la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Ejemplos de algunos invariantes son: (i) el pasaporte del dibujo (en particular, el género de la superficie, el número de ejes, los grados de los vértices y caras), (ii) la clase de isomorfía del grupo de automorfismos, (iii) la clase de isomorfía del grupo de monodromía (sin marcado de generadores) y (iv) Z-orientabilidad.

Por desgracia, todos estos invariantes conocidos no son suficientes para separar órbitas (es decir, dado un número finito de los invariantes conocidos, se pueden encontrar dos dibujos con los mismos invariantes y que no son Galois equivalentes).

La búsqueda de nuevos invariantes es actualmente una área activa de investigación.

Agradecimientos.

Este artículo divulgativo ha sido parcialmente apoyado por el Proyecto Fondecyt 1190001. También deseo agradecer a

Saúl Quispe quien me ha ayudado a corregir varias partes de este escrito.

Referencias.

- [1] G. V. Belyi. On Galois extensions of a maximal cyclotomic field. *Mathematics of the USSR-Izvestiya* **14** No.2 (1980), 247–256.
- [2] P. B. Cohen, C. Itzykson and J. Wolfart. Fuchsian triangle groups and Grothendieck dessins. Variations on a theme of Belyi. *Comm. Math. Phys.* **163** (1994), 605–627.
- [3] M. D. E. Conder, G. A. Jones, M. Streit and J. Wolfart. Galois actions on regular dessins of small genera. *Revista Matemática Iberoamericana* No.1 **29** (2013), 163–181.
- [4] K. Coombes and D. Harbater. Hurwitz families and arithmetic Galois groups. *Duke Math. J.* **52** (1985), 821–839.
- [5] R. Cori and A. Machi. Maps, hypermaps and their automorphisms: a survey I, II, III. *Expositiones Math.* **10** (1992), 403–427; 429–447; 449–467.
- [6] J. M. Couveignes. Calcul et rationalité de fonctions de Belyi en genre 0. *Annales de l'Institut Fourier* **44** (1994).
- [7] M. Emsalem and P. Lochak. The action of the absolute Galois group on the moduli space of spheres with four marked points. In L. Schneps and P. Lochak (eds.), *The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants. London Math. Soc. Lect. Notes Ser.* **200**. Cambridge University Press, Cambridge, 1994, 307–321.
- [8] W. W. Fan. Circular regular dessins. *J. Algebr. Comb.* (2021). <https://doi.org/10.1007/s10801-020-00996-7>
- [9] The GAP Group. GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Version 4.4.12; 2008 (<http://www.gap-systems.org>)
- [10] E. Gironde and G. González-Diez. *Introduction to compact Riemann surfaces and dessins d'enfants*. London Mathematical Society Student Texts **79**. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [11] E. Gironde and G. González-Diez. A note on the action of the absolute Galois group on dessins. *Bull. London Math. Soc.* **39** No. 5 (2007), 721–723.
- [12] E. Gironde, G. González-Diez, R. A. Hidalgo and Gareth A. Jones. Zapponi-orientable dessins d'enfants. *Revista Matemática Iberoamericana* **36** (2) (2020), 549–570.
- [13] G. González-Diez and A. Jaikin-Zapirain. The absolute Galois group acts faithfully on regular dessins and on Beauville surfaces. *Proc. London Math. Soc.* **111** No. 4 (2015), 775–796.
- [14] A. Grothendieck. Esquisse d'un Programme (1984). In *Geometric Galois Actions*. In L. Schneps and P. Lochak (eds.), *London Math. Soc. Lect. Notes Ser.* **242**. Cambridge University Press, Cambridge, 1997, 5–47.
- [15] Y.-H. He and J. Read. Dessins d'enfants in $\mathcal{N} = 2$ generalised quiver theories. *J. High Energy Phys.* **85** (2015), 1–29. doi: 10.1007/JHEP08(2015)085
- [16] R. A. Hidalgo. Dessins d'enfants with a given bipartite graph. <https://arxiv.org/abs/1611.02901>
- [17] R. A. Hidalgo and Gareth A. Jones. Circular dessins d'enfants. Preprint.
- [18] F. Jaeger. A survey of the cycle double cover conjecture. In *Cycles in Graphs* (B. Alspach and C. Godsil, Eds.). *Ann. Discrete Math.* **27** (1985), 1–12.
- [19] R. Jagadeesan. A new $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -invariant of dessins d'enfants. *Proc. of the London Math. Soc.* (2015) doi: 10.1112/plms/pdv039
- [20] G. A. Jones and D. Singerman. Belyi functions, hypermaps and Galois groups. *Bull. London Math. Soc.* **28** (6) (1996), 561–590.
- [21] G. A. Jones and J. Wolfart. *Dessins d'Enfants on Riemann Surfaces*. Springer Monographs in Mathematics. 2016.

- [22] G. A. Jones and M. Streit. Galois groups, Monodromy Groups and Cartographic Groups. In Geometric Galois Actions. 2. The inverse Galois Problem, Moduli Spaces and Mapping Class Groups. L. Schneps and P. Lochak eds., *London Math. Soc. Lect. Notes Ser.* **243**. Cambridge University Press, Cambridge, 1997, 25–65.
- [23] B. Köck. Belyi’s theorem revisited. *Beitr. Algebra Geom.* **45** No.1 (2004), 253–265.
- [24] B. Köck and D. Singerman. Real Belyi theory. *The Quarterly J. of Math.* **58** (2007), 463–478.
- [25] B. Köck and E. Lau. A note on Belyi’s theorem for Klein surfaces. *The Quarterly J. of Math.* **61** (2010), 103–107.
- [26] S. K. Lando and A. K. Zvonkin. *Graphs on surfaces and their applications*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences **141** (II). Springer (2004).
- [27] M. Mulase and M. Penkava. Ribbon Graphs, Quadratic Differentials on Riemann Surfaces, and Algebraic Curves Defined over $\mathbb{Q}$. *The Asian Journal of Mathematics* **2** (4) (1998), 875–920.
- [28] R. Nedela. *Maps, Hypermaps and Related Topics*. *Com²MaC Lecture Notes Series* **18**. Combinatorial and Computational Mathematics Center, Pohang University of Science and Technology, 2007.
- [29] G. Ringel and J. W. T. Youngs. Solution of the Heawood map-coloring problem. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **60** (1968), 438–445.
- [30] R. B. Richter, P. D. Seymour and J. Širáň. Circular embeddings of planar graphs in nonspherical surfaces. *Discrete Mathematics* **126** (1994), 273–280.
- [31] L. Schneps. Dessins d’enfants on the Riemann sphere. In The Grothendieck theory of dessins d’enfants. Edited by Leila Schneps. *London Math. Soc. Lect. Notes Ser.* **200**. Cambridge University Press, Cambridge, 1994, 47–77.
- [32] P. D. Seymour. Disjoint paths in graphs. *Discrete Mathematics* **29** (3) (1980), 293–309.
- [33] G. Szekeres. Polyhedral decomposition of cubic graphs. *Bulletin of the Australian Mathematical Society* **8** (03) (1973), 367–387.
- [34] C. Thomassen. The graph genus problem is NP-complete. *Journal of Algorithms* **10** (4) (1989), 568–576.
- [35] A. Weil. The field of definition of a variety. *Amer. J. Math.* **78** (1956), 509–524.
- [36] J. Wolfart. The Obvious part of Belyi’s theorem and Riemann surfaces with many automorphisms. In Geometric Galois actions, Vol. 1, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, **242**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 97–112 (1997).
- [37] J. Wolfart. *ABC for polynomials, dessins d’enfants and uniformization—a survey*. Elementare und analytische Zahlentheorie, 313–345, Schr. Wiss. Ges. Johann Wolfgang Goethe Univ. Frankfurt am Main, 20, Franz Steiner Verlag Stuttgart, Stuttgart, 2006.
- [38] L. Zapponi. Fleurs, arbres et cellules: un invariant galoisien pour une famille d’arbres. *Compositio Mathematica* **122** (2000), 113–133.
- [39] C. Q. Zhang. *Circuit Double Cover of Graphs*. London Mathematical Society Lecture Note Series 399.

Acerca del autor: Rubén A. Hidalgo es actualmente profesor de la Universidad de La Frontera (desde 2015), universidad localizada en la Región de La Araucanía, en el sur de Chile. Su área de trabajo son las superficies de Riemann y dinámica compleja. Además, tiene como hobby la música folklórica andina y practica algunos instrumentos musicales como el charango, la guitarra y la quena.

Dennis Gabriela Coy Calderón*
dennisg.coyc@konradlorenz.edu.co

Resumen

En este artículo se introducirán algunos conceptos topológicos básicos con el fin de explicar uno de los campos más aplicados en el mundo del análisis de imágenes, la topología digital. Se presentarán algunos conceptos sencillos de esta área y se esbozarán algunos algoritmos sencillos de reconocimiento de imágenes acompañados de ejemplos.

1. Introducción

En los últimos años han incrementado las necesidades de la industria y la tecnología por desarrollar herramientas que faciliten y optimicen la ejecución de tareas repetitivas, que por lo general resultan tediosas para las personas.

Inspirados en los procesos naturales del ser humano, cada vez más emprendedores y creadores tecnológicos buscan simular el proceso cognitivo de recopilación y acción que este realiza y replicarlo artificialmente en computadores que generen respuestas a los estímulos naturales. Sin embargo, para realizar estas tareas, un ordenador requiere obtener información de su entorno con ayuda de algoritmos que reemplacen los sentidos del humano que le permiten sentir, escuchar y en especial observar.

Un ejemplo clásico cotidiano puede verse en las cámaras digitales, las cuales generan una imagen en un espacio bidimensional discreto, cuyos componentes son valores numéricos conocidos como **píxeles**, que bajo la estructura de un interpretador le otorga al espacio color, dando una aproximación de la imagen real similar al proceso de observación humano.

Considere la imagen en la Figura 1, como un evento observado por un espectador, que se desea fotografiar.



Figura 1: Imagen real vista por un observador.

Aplicando una cámara de baja calidad, logra obtener una aproximación de la imagen tal y como se muestra en la Figura 2. Esta imagen comparte algunas similitudes con la original, sin embargo, no se logra apreciar del todo un objeto específico. La aproximación obtenida es tan primitiva que fácilmente se puede recrear dicha representación utilizando un sistema discretizado de $\mathbb{R}^2$ aplicando una matriz de 5×7 que vista bajo el interpretador de color se obtendría una aproximación de la figura.

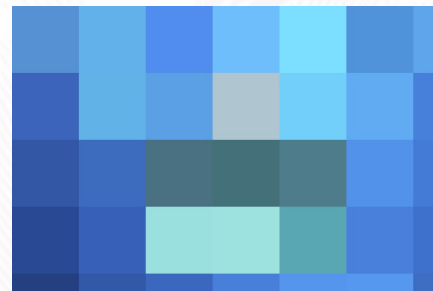


Figura 2: Aproximación de la realidad obtenida usando una cámara de baja calidad.

Como se puede observar, una imagen es aproximada a partir de pequeños retazos cuadrangulares de color, por lo cual, de forma similar al método de Arquímedes de aproximación o a las sumas de Riemann para obtener el área de una función, entre más cuadrados se utilicen, se obtendrá una aproximación mejor. Una cámara de mejor calidad permitiría usar una cantidad de píxeles mucho mayor, lo que aseguraría una aproximación de la imagen más nítida tal como se puede apreciar en la Figura 3, en la cual se puede identificar mejor la existencia de un delfín, sin embargo, este no se puede reconocer a simple vista.

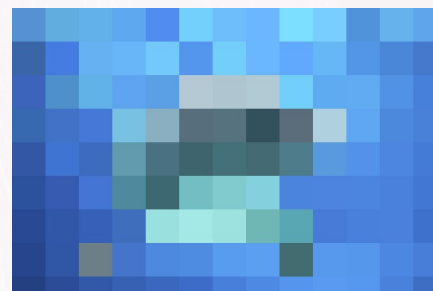


Figura 3: Aproximación de la realidad obtenida usando una refinación con respecto a la Figura 2.

*Estudiante de Matemáticas, Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Bogotá-Colombia

Finalmente, al usar un refinamiento de la cuadrícula que contiene todos los píxeles como se ve en la Figura 4, se logró mejorar la calidad de la imagen a un punto en el que se puede distinguir a un delfín, a pesar de que la imagen resultante no es del todo agradable. Visualmente sería difícil considerar que la imagen real y la representación virtual son la misma, sin embargo, vestigios de la intuición permiten determinar que la figura en cuestión es un animal acuático, con forma de delfín.

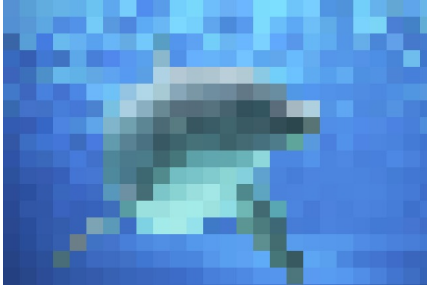


Figura 4: Aproximación de la realidad obtenida usando una cámara de mayor calidad a la de la Figura 3.

Como se pudo observar, la aplicación de algoritmos cada vez más sofisticados ha tenido un gran impacto en la sociedad actual, si bien los procesos que se realizan han enfocado gran parte de sus esfuerzos en mejorar y optimizar los algoritmos, existen opiniones variadas que dejan de lado el papel de la teoría matemática en el desarrollo de la nueva tecnología.

Si bien, el cerebro procesa las imágenes a partir de análisis de color, distribución de espacio, delimitación de fronteras, entre otras, dichas facultades son una capacidad inherente del ser humano para relacionarse con su entorno, por lo que no requiere conocimiento alguno para realizarlos. A pesar de que es un proceso natural para el ser humano, resulta bastante complejo replicarlo en ordenadores.

Por lo tanto, este artículo aplicará la teoría topológica del procesamiento de imágenes y los modelos de atención visual utilizados en la actualidad para responder la pregunta:

¿Cómo una máquina podría simular el proceso humano de ver e identificar a partir de esta información?

Con esto en mente, la siguiente sección realizará una contextualización teórica de las herramientas que implementa un visualizador artificial.

2. Conceptos utilizados en la visualización por computadora

En esta sección se hará un breve repaso sobre la definición de topología y lo usaremos para definir el espacio de estudio de las representaciones pictóricas, la topología digital en $\mathbb{Z}^2$ así como algunas de sus propiedades. Se iniciará introduciendo el concepto de topología y espacio topológico.

Definición 2.1. [Mun00] Considere un conjunto X . Una **topología** (o estructura topológica) en X es una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X que satisfacen las siguientes propiedades:

- $\emptyset$ y X son elementos de $\mathcal{T}$.
- La unión arbitraria de miembros de $\mathcal{T}$ es también un miembro de $\mathcal{T}$.
- La intersección finita de miembros de $\mathcal{T}$ es un miembro de $\mathcal{T}$.

Ejemplo 2.1. Considere el conjunto

$$X = \{1, 2, 3\}.$$

Sobre el cual se puede definir los conjuntos:

- $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{1\}, X\}$.
- $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, X\}$.

Donde $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son topologías de X .

Definición 2.2. [Rot98] Una pareja $(X, \mathcal{T})$ de un conjunto X y una topología $\mathcal{T}$ en X es llamada **espacio topológico**.

Ejemplo 2.2. El conjunto

$$X = \{1, 2, 3\},$$

con la topología

$$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, X\}$$

es un espacio topológico.

Definición 2.3. [Mun00] Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, entonces todo subconjunto U de X es un **conjunto abierto** de X si U pertenece a $\mathcal{T}$.

Definición 2.4. [Mun00] Un subconjunto A de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se conoce como **conjunto cerrado** si el conjunto $A \setminus X$ es abierto.

Definición 2.5. [Mun00] Dado un subconjunto A de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, el **interior** de A denotado por $\text{int}(A)$ se define como la unión de todos los conjunto abiertos contenidos en A .

Definición 2.6. [Mun00] Dado un subconjunto A de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, la **clausura** de A denotado por $\bar{A}$ se define como la intersección de todos los conjunto cerrados que contienen a A .

Los conceptos anteriores permiten definir topológicamente la frontera topológica de un conjunto, lo cual es de gran utilidad para el análisis de imágenes, aplicación que será mostrada más adelante

Definición 2.7. [Mun00] Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y S un subconjunto de X , se conoce como **frontera** de S al subconjunto

$$\partial S = \bar{S} \setminus \text{int}(S).$$

Introducido el concepto de espacio topológico y algunas nociones derivadas se puede definir el conjunto de interés para el estudio de imágenes, el plano digital.

Definición 2.8. [Ros79] El **plano digital** $\mathbb{Z}^2$ es el conjunto formado por los pares ordenados de números enteros, es decir

$$\mathbb{Z}^2 = \{(x, y) : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Ahora, se definirá el concepto de vecinos 4N y 8N, el cuál se suele utilizar para quitar ruido de la imagen.

Definición 2.9. [Kov10] Si $A = (x, y)$, $B = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ entonces se define la **distancia euclidiana** como

$$d(A, B) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}.$$

Definición 2.10. [Ros79] Se definen los **vecinos 4N** y **vecinos 8N** de un punto $A = (x, y)$ en $\mathbb{Z}^2$ de la siguiente forma:

- Los vecinos 4N son todos los puntos $B = (x_1, y_1) \in \mathbb{Z}^2$ tales que

$$d(A, B) \leq 1.$$

- Los vecinos 8N son todos los puntos $B = (x_1, y_1) \in \mathbb{Z}^2$ tales que

$$d(A, B) \leq \sqrt{2}.$$

Ejemplo 2.3. La Figura 5 muestra todos los puntos vecindades del punto (x, y) en $\mathbb{Z}^2$ según la distancia euclidiana.

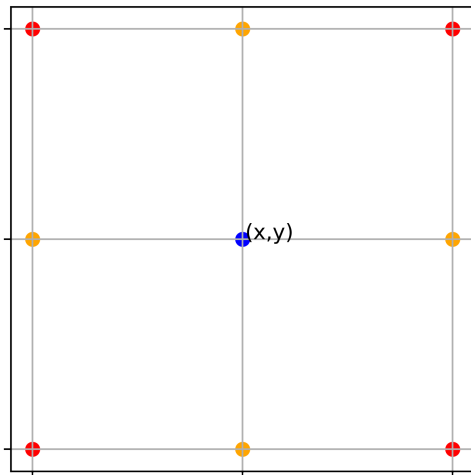


Figura 5: La imagen muestra un punto (x, y) en azul, el cual tiene como vecinos 4N a los puntos de color amarillo y a los puntos 8N como los puntos de color amarillo y rojo.

Note que, dada la definición, (x, y) es vecino de sí mismo, debido a que la distancia consigo mismo es cero.

Definición 2.11. [Rot98] Considere un conjunto X y una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X . Se dice que $\mathcal{B}$ es una **base** (para una topología en X) si se cumplen las siguientes condiciones:

- Para todo $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.
- Si B_1 y B_2 son elementos de $\mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Teorema 2.1. Considere un punto $A \in \mathbb{Z}^2$ de la forma $A = (x, y)$ y $U(A)$ el conjunto definido por

$$U(A) = \begin{cases} \{A\} & \text{si } x + y \text{ es impar;} \\ \{Q : Q \text{ es vecino 4N de } A\} & \text{si } x + y \text{ es par.} \end{cases}$$

Entonces,

$$\mathcal{B} = \{U(A) : A \in \mathbb{Z}^2\}$$

es una base topológica de una topología en $\mathbb{Z}^2$.

Demostración. Para probar que el conjunto es base, se deben satisfacer las siguientes condiciones.

- Para todo $A \in \mathbb{Z}^2$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $A \in B$.
Considere $A = (x, y)$, entonces, $B = U(A)$, ya que todo punto es vecindad de sí mismo.
- Si B_1 y B_2 son elementos de $\mathcal{B}$ y $A \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $A \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.
Si $A = (x, y) \in B_1 \cap B_2$ con $x + y$ impar, entonces $B_3 = U(A)$. Note que es imposible que $x + y$ sea par, ya que las vecindades de un punto par son todas impares. La única excepción es cuando $B_1 = B_2$.

□

Definición 2.12. [Ros79] La **topología digital** $\mathcal{T}$ de $\mathbb{Z}^2$ es la topología generada por la base

$$\mathcal{B} = \{U(A) : A \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Es decir, todo elemento en la topología es expresado como unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Con la definición anterior se estableció un espacio para poder estudiar diferentes imágenes, sin embargo, primero hay que definir la unidad fundamental de una imagen, el píxel.

Definición 2.13. El **píxel** es la unidad homogénea más pequeña del color que compone una imagen, y obtiene su nombre del vocablo inglés *pix* (*picture*) y el (*element*). Se representa mediante coordenadas cartesianas en el plano $\mathbb{Z}^2$.

Una vez definido el espacio, la estructura topológica del mismo y las unidades con las que se pueda expresar una imagen, es posible determinar concretamente algunas imágenes digitales, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

En la Figura 6 se puede observar una configuración de píxeles distribuidos a partir de puntos en una cuadrícula, la cual tiene como referencia las coordenadas del plano cartesiano $\mathbb{Z}^2$. En este caso particular, el plano está centrado en $(0, 0)$ y cada coordenada está asignando un color a un cuadrado específico de la distribución.

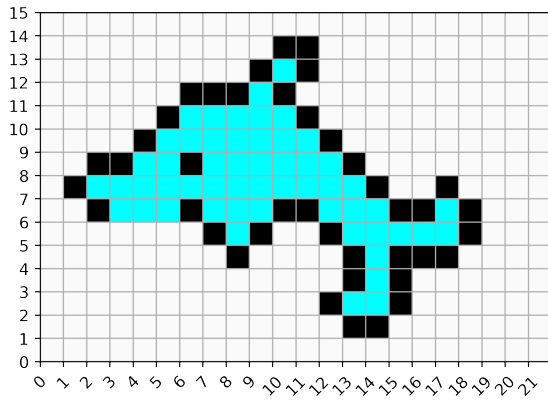


Figura 6: Imagen de un delfín construida a partir de píxeles.

Ejemplo 2.4. La distribución del color en términos generales se obtiene a partir de un vector de 3 coordenadas, cada coordenada indica la cantidad de rojo, verde y azul que se pondrá en cada píxel, esta convención se conoce como formato RGB. En este caso, los colores utilizados para dibujar la imagen fueron

$$\text{blanco} = [250, 250, 250],$$

$$\text{azul} = [0, 255, 255],$$

$$\text{negro} = [0, 0, 0],$$

Ya que a cada punto de $\mathbb{Z}^2$ se le asigna un cuadrado de color, se obtiene que la configuración actual que forma la imagen es un conjunto formado por la unión de subconjuntos de la base topológica, por lo cual, la representación pictórica obtenida; exceptuando algunos de los recuadros blancos exteriores a la imagen, los cuales se omiten por estética; es un subconjunto de la base topológica, lo que comúnmente se conoce como un conjunto abierto.

Como se puede observar en el ejemplo, un computador asigna colores a conjuntos de puntos en una cuadrícula, por lo cual, mientras los humanos como espectadores usan puntos o coordenadas para formar una imagen, el interpretador del ordenador realiza una equivalencia con los cuadrados dentro de la retícula, similar al proceso de construcción de una matriz.

Definición 2.14. [Ros79] Una **imagen digital** es un arreglo $\Pi \subset \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}$ de puntos en una cuadrícula, de coordenadas enteras (x, y) donde $1 \leq x \leq M \in \mathbb{Z}$ y $1 \leq y \leq N \in \mathbb{Z}$.

De acuerdo con la definición anterior, una imagen es un subconjunto de una imagen digital. La interpretación de un computador al color de una imagen se establece a partir de una función o regla de asignación

$$f: \Pi \rightarrow \Sigma,$$

siendo Π una cuadrícula definida anteriormente y Σ una representación de color identificada a partir de tripletas, valores hexadecimales, decimales entre otros.

Dado que ya se tiene la estructura completa de las imágenes de forma topológica totalmente establecida, ahora se trabajará uno de los conceptos más importantes de la topología digital, la conectividad.

Definición 2.15. [Ros79] Dado dos puntos A, B en una imagen digital Π , un camino de A a B es una secuencia de puntos $A = A_1, A_2, \dots, A_n = B$ tales que A_i es un $4N$ vecino o un $8N$ vecino de A_{i-1} .

Definición 2.16. [Ros79] Se dice que A y B puntos en una imagen digital Π están **conectados** si existe un camino de A a B formado únicamente por puntos de Π .

Identificar la conexión entre puntos de la imagen digital permite establecer interacciones entre los miembros del conjunto. Esta característica genera una relación de equivalencia, concepto que será trabajado a partir de la siguiente definición.

Definición 2.17. Una relación $\sim$ entre elementos de un conjunto S es de equivalencia cuando satisface reflexión, simetría y transitividad.

- **Reflexividad:** Todo elemento $A \in S$ está relacionado consigo mismo.
- **Simetría:** Si $A \in S$ está relacionado con $B \in S$, entonces B está relacionado con A .
- **Transitividad:** Si $A \in S$ está relacionado con $B \in S$ y B con un punto $C \in S$, entonces A está relacionado con C .

Teorema 2.2. La relación, A está conectado con B es una relación de equivalencia.

Demostración. Para ver que una relación es de equivalencia se debe probar que es reflexiva, simétrica y transitiva.

- **Reflexividad:** Esta propiedad se satisface, ya que todo punto es vecino de sí mismo.
- **Simétrica:** Naturalmente, si existe un camino entre A y B , el mismo camino conecta a B y A .
- **Transitiva:** Si existe un camino de A hasta B implica que hay una sucesión de puntos desde A a B vecinos ordenados 2 a 2 incluido B , de B a C . También, existe una sucesión de puntos que incluye como punto inicial a B , la unión de las sucesiones es una sucesión de puntos de A a C . Por lo cual A y C están relacionados.

□

Definición 2.18. Las clases de equivalencia definidas por la relación “estar conectados” son llamadas **las componentes conectadas de Π** . Si Π sólo posee una clase de equivalencia, se conoce como una imagen conectada.

Las conexiones de una imagen son elementos de gran interés para el procesamiento de imágenes, debido a que las fluctuaciones entre la forma y el color determinan patrones relevantes en la detección de figuras, sin embargo, las siguientes definiciones establecen las bases para identificar los vacíos o espacios en blanco de una imagen a partir de sus bordes.

Definición 2.19. [Ros79] Considere una imagen $S \subset \Pi$. El único componente de $\bar{S}$ que contiene a la frontera de Π es llamado el **fondo** de S . Todos los otros componentes, si existen, son llamados **agujeros** de S . Si S no tiene agujeros, es llamado simplemente conectado.

Ejemplo 2.5. En la Figura 7 se puede ver una imagen digital, con $1 \leq x \leq 16$ y $1 \leq y \leq 11$, así como una imagen S , la cual representa a un perro.

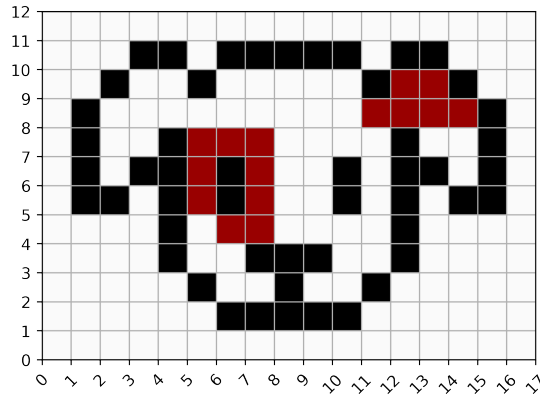


Figura 7: Imagen de un perro construida a partir de píxeles.

Si se consideran los espacios en blanco como elementos que no pertenecen a la imagen, se identifica que hay varios elementos no conectados. Como se puede observar, la nariz ubicada en las coordenadas (7,3),(8,3),(9,3) poseen una conexión directa con el ojo izquierdo del perro a partir de las manchas rojizas que están alrededor de él, los cuales son una sucesión de puntos vecinos que conducen al ojo. Sin embargo, el ojo izquierdo no está conectado con ningún otro elemento, ya que no existe ninguna sucesión de puntos vecinos que conduzcan a otro elemento de S . De forma más general, se puede decir que S posee sólo dos clases de equivalencias, el ojo izquierdo del perro y el resto de la cara del perro, ya que son los únicos conjuntos disconexos entre sí. Por otro lado, el fondo de la imagen son todas las piezas blancas no encerradas por la cara del perro, mientras que los agujeros son todas las piezas blancas encerradas por la cara del perro.

Hecho explicito el espacio a estudiar, se introducirán algunas herramientas estructuradas para la implementación de algoritmos de identificación basados en las vecindades y conexiones de la imagen.

Definición 2.20. [Mis19] Sea $f(x,y)$ la coloración del píxel en la posición $(x,y) \in \Pi$ de una imagen f y $w(s,t)$ el elemento en la posición (s,t) de una matriz $W \in M_{n \times n}$, también llamada filtro de tamaño $(2a+1) \times (2b+1)$. Una convolución se define como la matriz $G \in \Pi$ donde cada componente se obtiene de la forma

$$G(x,y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s+a+1,t+b+1)f(x+s,y+t).$$

Una representación usual otorgada a la convolución discreta en dos dimensiones es el promedio ponderado de los píxeles de la imagen a partir de la ventana de tamaño $a \times b$ declarada para el filtro W , siendo los valores de W los pesos asignados al promedio.

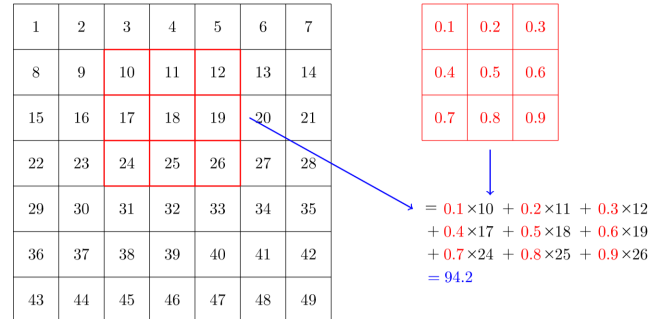


Figura 8: Ejemplo de convolución para un elemento. Tomada de [Syl20].

La Figura 8 representa el resultado de un píxel obtenido después de la convolución efectuado a partir de los 8N vecinos.

A partir de la convolución se pueden realizar diferentes operaciones entre las imágenes que permiten enfocar o modificar píxeles dentro de un espacio. Uno de los filtros especializados para resaltar bordes es el filtro laplaciano, el cual se definirá a continuación.

Definición 2.21. [Ram11] El operador diferencial laplaciano determina la inclinación de una función, sin embargo, para una imagen de coordenadas discretas, el filtro laplaciano identifica las características más bruscas que se producen entre píxeles vecinos. El laplaciano se define matemáticamente a partir de los 4N vecinos, y se expresa de la siguiente forma:

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x+1,y) - f(x,y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f(x,y+1) - f(x,y),$$

de manera que la definición discreta de las derivadas parciales de segundo orden es:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1,y) + f(x-1,y) - 2f(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x,y+1) + f(x,y-1) - 2f(x,y),$$

y el laplaciano discreto sería entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y).$$

Note que los componentes de una matriz son de la forma:

$f(x-1, y+1)$	$f(x, y)$	$f(x+1, y+1)$
$f(x-1, y)$	$f(x, y)$	$f(x+1, y)$
$f(x-1, y-1)$	$f(x, y)$	$f(x+1, y-1)$

Cuadro 1: Sección de una imagen centrada en $f(x, y)$.

Por lo cual, al ponderar o convolucionar con la matriz

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

Cuadro 2: Operador Laplaciano discreto.

Se obtiene un equivalente del laplaciano discreto, siendo la matriz mostrada en 2 el operador laplaciano.

Con todos los conceptos contruidos anteriormente se pueden estudiar herramientas muy interesantes para la solución de problemas de la vida real, tal y como lo son algoritmos de reconocimiento, conteo de elementos, análisis de bordes, cambio de color, filtros, entre otros. En la siguiente sección verán algunos de estos algoritmos y cómo se aplican.

3. Algunas aplicaciones

El concepto de vecindades y límites permite recorrer una imagen buscando rasgos distintivos de diferentes pictografías sin tener un conocimiento previo de estas, dichas particularidades permiten desarrollar algoritmos sencillos de bajo coste computacional, sin necesidad de codificar métodos especializados para cada ilustración. Los algoritmos aquí presentados permiten desarrollar estrategias de búsqueda basadas en conectividad topológica a partir de vecindades.

Las convoluciones generan diferentes alteraciones a una matriz. En particular, para imágenes los valores del color se modifican a diferentes valores según el filtro. Para el caso del filtro laplaciano se obtiene un resaltado de bordes de la imagen original, tal y como se muestra en la Figura 9.

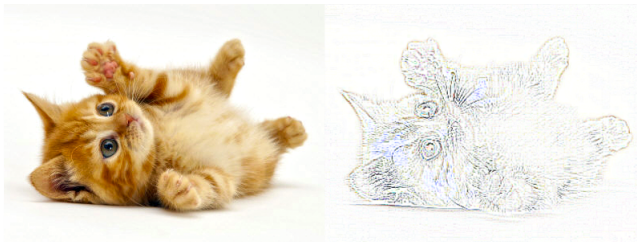


Figura 9: Imagen original vs Aplicación del filtro laplaciano. Imagen tomada de [Mar21].

Las herramientas de detección de bordes permiten a los ordenadores generar estrategias de ubicación y resalte a elementos en el entorno en el que se desarrollen, debido a su caracterización a escala de blancos y negros, además, permite identificar distancias en imágenes que requieran de tomas de decisiones en tiempo real.

Por otro lado, la convolución no solo provee de filtros a las imágenes de manera individual, puesto que existen herramientas adecuadas para el procesamiento de imágenes especializadas en el reconocimiento automático de objetos a partir de redes neuronales convolucionales [Syl20], algoritmos especializados para la autocorrección de procesos que imitan el proceso de interpretación del ser humano para la interacción del computador con su entorno.

Otros ejemplos de la aplicación de la topología digital en el desarrollo de algoritmos de reconocimiento a partir de filtros son el conteo y reconocimiento de valores, muy valiosos en el campo de la recolección agrícola y la discriminación de elementos defectuosos en fábricas. Sin embargo, en este documento se comentará una aplicación científica en el campo de la astronomía observacional.

Considere la imagen mostrada en la Figura 10 y suponga que se desea calcular cuántas estrellas hay en dicha imagen.



Figura 10: Agrupación de estrellas, y materia cósmica. Tomado de [Eodu21].

Para este objetivo se debe considerar la imagen como un conjunto de valores conectados.

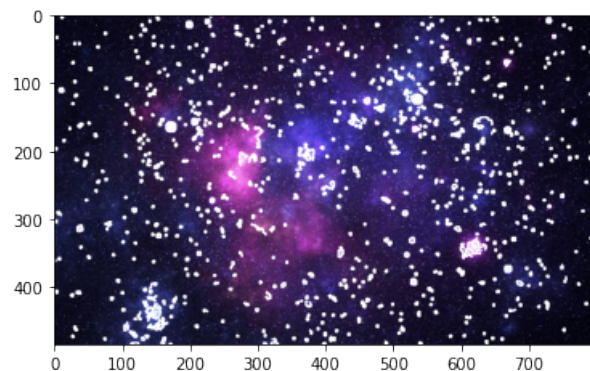


Figura 11: Fronteras estelares resaltadas.

Cada estrella posee una distribución de color equivalente, además, si se considera una estrella como una imagen S_i , dicha ilustración en la imagen digital es un conjunto conectado (véase Figura 11), ya que no posee agujeros que interrumpan la distribución equivalente del color. Así mismo, esta propiedad es fundamental, puesto que la iluminación característica de objetos en espacios opacos permite distribuir por caminos diferentes conexiones entre estrellas.

A simple vista no hay una relación o camino entre estrellas, sin embargo, al configurar los parámetros de color en los píxeles, se logra apreciar una coloración destacable de toda la representación pictográfica; cada estrella está ubicada en píxeles cuyas vecindades, ya sean $8N$ o $4N$, son miembros de un espacio topológico, y sus propiedades permiten recubrir todas las estrellas a partir de conjuntos de la base, caminos conexos a partir de un punto inicial, el cual es similar a los demás puntos buscados. A partir de un proceso iterativo se obtienen todas las componentes conexas de la imagen según la opacidad de los píxeles. A este tipo especial de métodos de reconocimiento, se les conoce como **algoritmo BF4**[Ros79] y **algoritmo BF8**[Ros79], los cuales requieren de un conjunto de conexiones de tipo $4N$ o $8N$ para identificar píxeles a partir de un punto dado.

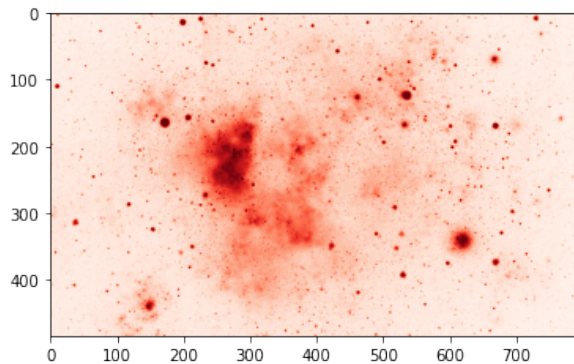


Figura 12: Agrupación de estrellas bajo un filtro rojizo.

Una de las posibles soluciones del método es considerar una coloración que destaque a partir del brillo. En una distribución de estrellas, el brillo generado por cada estrella denotará un residuo de iluminación que se esparcirá por toda la imagen, una forma particular de hacerlo es a través de una coloración rojiza, ya que, de manera similar a un radar infrarrojo, los valores más relevantes en la imagen quedaran plasmados con mayor intensidad, tal y como lo muestra la Figura 12.

El algoritmo reconocerá la energía residual como un camino conexo que permitirá reconocer todas las diferentes estrellas próximas a una inicial. Al realizar este proceso múltiples veces, tomando posiciones iniciales diferentes, el algoritmo logrará reconocer cada estrella a partir de conjuntos de puntos, caminos, unidos a partir de vecindades topológicas $4N$ y $8N$. Sin embargo, ocurre que la separación entre estrellas no posee un camino fijo que seguir, tal y como se muestra en la Figura 13.

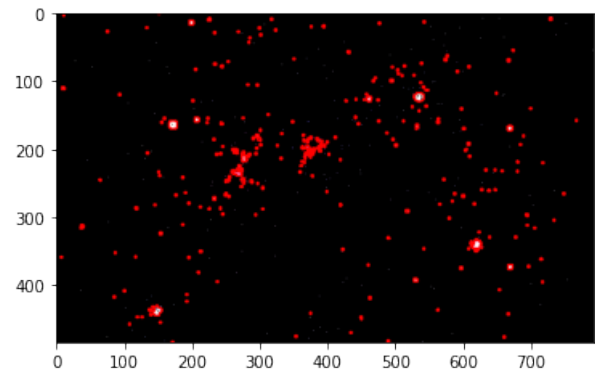


Figura 13: Agrupación de estrellas bajo un filtro rojizo oscurecido en el cual se representan las estrellas adultas en blanco.

Se desea destacar un conjunto específico de estrellas, las estrellas adultas, las cuales son más luminosas que las estrellas jóvenes. En este caso es difícil considerar caminos, ya que hay diferentes tipos de señales del mismo tipo, haciendo que los caminos sean más difíciles de seguir.

Para casos de este estilo, es útil aplicar propiedades topológicas de los conjuntos, como separar en uniones disjuntas dos a dos el conjunto. A este proceso se le conoce como segmentación, y se hace con el fin de aislar los elementos más relevantes de una ilustración. Para aplicar una segmentación es usual realizar un procesamiento previo conocido como umbralización, un algoritmo que permite obtener una imagen digital equivalente a la real, pero con una coloración opaca o gris. Se llama umbralización porque el proceso de separación se hace a partir de un valor (umbral) que separa los píxeles que posean valores arriba del umbral y valores bajo el umbral, que usualmente son las características más relevantes de la imagen, tal y como se muestra en la Figura 14.

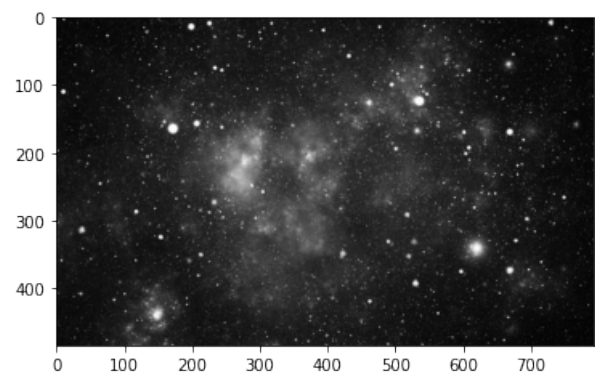


Figura 14: Umbralización de la imagen original.

Luego, se aplica una función de $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ conocida como convolución (distinta a la que se comenta arriba), el cual es un proceso de transformación a partir de promedios ponderados, los cuales resaltan los valores umbral del método de umbralización previo, para al final obtener una matriz binaria, de color blanco y negro. Finalmente, se destaca un proceso de

optimización de color a partir de los valores más intensos de blanco para al final obtener la cantidad deseada de estrellas: 690 estrellas totales de las cuales 233 estrellas son adultas. El proceso de segmentación por umbralización, con la aplicación sucesiva de una convolución a la que se le aplicó una optimización de densidad de color se conoce como detección de bordes Canny. La descripción de este método se realizó brevemente, ya que no solo depende de conceptos de topología digital sino también de cálculo vectorial. Los códigos implementados pueden encontrarse en [Coy21].

4. Conclusiones.

El campo de la topología digital es una fuente de información y aplicación que no solo demuestra cómo las matemáticas pueden ser utilizadas en la época contemporánea, sino que además permite y asegura un progreso evolutivo en el campo de la ciencia y tecnología. Si bien, la topología digital es un caso particular de la teoría matemática que estudia los conjuntos y sus estructuras, los conceptos trabajados en este artículo son definiciones básicas de cualquier curso de topología, teoría que a pesar de ser bastante abstracta tiene una aplicación tangible en la vida real, que no sólo permite desarrollar algoritmos eficientes, sino que también permite desarrollar una intuición más afinada al estudiar los conceptos, en ocasiones, complejos que se presentan en la teoría topológica más robusta. Finalmente, se debe destacar la increíble capacidad de la topología digital en el desarrollo de mecánicas automatizadas que no requieren de algún método sistemático que necesite de supervisión humana, sino que hacen uso de procesos iterativos que se adaptan fácilmente a cualquier situación, un camino que claramente nos acerca más al desarrollo de entidades que se puedan desenvolver en su entorno a partir de visión artificial.

Referencias

- [Ram11] A. Ramirez, *Reporte de Búsqueda, detección y conteo de objetos* (2011), available at https://www.cimat.mx/~alam/VC/ramirez_segObjDetecc.pdf.
- [Ros79] A. Rosenfeld, *Digital Topology*, The American Mathematical Monthly **86** (1979), no. 8, 621-630, DOI 10.1080/00029890.1979.11994873, available at <https://doi.org/10.1080/00029890.1979.11994873>.
- [Mar21] B. Koeving Martz K. Wessels, *Stepping Into the Filter* (2021), available at <https://cse442-17f.github.io/Sobel-Laplacian-and-Canny-Edge-Detection-Algorithms/>.
- [Mis19] D. Mishra, *Convolution Vs Correlation* (2019), available at <https://towardsdatascience.com/convolution-vs-correlation-af868b6b4fb5>.
- [Eodu21] Enciclopedia online del universo, *Estrellas* (2021), available at <https://enciclopediauniverso.com/estrellas/>.
- [Coy21] G. Coy, *Proyecto-estrellas* (2021), available at <https://github.com/GabiMath/Proyecto-estrellas>.
- [Syl20] G. Sylvain, *Convolution in depth* (2020), available at <https://sgugger.github.io/convolution-in-depth.html>.
- [Mun00] J. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, Inc, 2000.
- [Rot98] J. Rotman, *An Introduction to Algebraic Topology*, Springer, 1998.
- [Han16] S. Han, *Homotopy based on Marcus-Wyse topology and its applications*, *Topology and its Applications* **201** (2016), 358–371.
- [Kov10] V. Kovalevsky, *Introduction to Digital Topology* (2010).

Acerca de la autora: Gabriela Coy Calderón es estudiante de noveno semestre de matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Entre sus pasatiempos está la natación y la halterofilia. Le gustaría recorrer el mundo y vivir nuevas experiencias.

USO DE MEDIAS MÓVILES PARA EL ESTUDIO DE TENDENCIAS EN EL MERCADO BURSÁTIL

Daniel Esteban Galvis Sandoval *
daniele.galviss@konradlorenz.edu.co

1. Introducción.

Las ruedas de negociación en las bolsas de valores son quizá los lugares donde más dinero se mueve y mayor número de transacciones se realizan diariamente, y he allí, un lugar donde todo tipo de agente económico, desde individuos, familias, empresas, hasta el mismo Estado se reúnen para colocar sus ahorros o inyectar dinero con el fin de multiplicarlo a través del tiempo. Muchos de estos agentes realizan operaciones desde una visión empírica, confiando en una pantalla que registra el top de los activos más rentables, mientras que otros, realizan un seguimiento analítico al comportamiento del activo de su interés, que consiste en evaluaciones técnicas de diferentes tipos de indicadores, noticias, resultados financieros, comportamiento de gráficos, tipos de instrumentos financieros, contexto económico local e internacional, estabilidad política, etc. Y todo ello se consolida en una sola variable final llamada sentimiento del inversionista.

El pasar de las décadas y la transformación de muchas de las economías del globo a una vida meramente artificial, ha influido en la creación de nuevas plataformas virtuales de inversión, y que por supuesto, aportan mayor liquidez, agilidad en las operaciones y mayor participación de los naturales. Pues bien, con una cuenta demo y un par de dólares, se puede simular una inversión en el mercado secundario, que de acuerdo con [Rod19] *“es el mercado que mueve los títulos y valores que ya han sido emitidos en una primera oferta pública, conocida como el mercado primario”*. Lastimosamente, los recursos tecnológicos distan mucho de considerarse beneficiosos para los que desean involucrarse en el mundo de la inversión, pues la falta de conocimiento de muchos, y el alto grado de riesgo, contribuyen a pérdidas inminentes.

A lo anterior, se suma el factor emocional, que evidentemente se altera cuanto más rentabilidad ofrezca un activo. Por eso, las inversiones en instrumentos de renta variable son las más demandadas y a su vez las más riesgosas, pues debido a su volatilidad, existe una probabilidad más alta de que el dinero que se invierta, se pierda. Esto último, también es una consecuencia de la imposibilidad de predecir el mercado; por tanto, analistas y conocedores de la materia han propuesto estrategias de inversión, asegurando una mínima rentabilidad o en las peores circunstancias una pérdida recuperable.

Para calmar la marea, nos hemos preguntado por la inje-

rencia que pueden tener las matemáticas en los mercados financieros. Pues bien, se trata de una ciencia exacta que describe con naturalidad y precisión muchos de los fenómenos que se presentan en diferentes áreas, y en el caso particular de la bolsa, por ejemplo, la sucesión de **Fibonacci**, dicta patrones de comportamiento que en muchos de los casos resulta convencer a los aficionados de su fiabilidad. Aunque es así, no es completamente predictivo, así que de existir un modelo matemático completo que sirva para el 100 % de los casos, es todavía un reto. De todas maneras, muchos de los indicadores financieros deducidos a la fecha, han tenido su injerencia matemática, desde ramas como la estadística, el cálculo, el álgebra lineal, la teoría fractal, u otras de mayor profundidad, y consisten en utilizarlos como instrumentos de apoyo que satisfagan una relación de pérdida o ganancia.

El objetivo de este artículo es predecir una tendencia con base en teoría estadística y darle un adecuado uso para que el inversionista tome una decisión acertada. Empezaremos describiendo las conductas y prácticas más comunes que se suelen realizar en el campo de la inversión informal. Paso seguido, expondremos un uso específico y adecuado de las medias móviles, pues es la herramienta base para elaborar nuestro modelo completo que luego lo escribiremos en código usando el lenguaje de programación python para que pueda ser empleado con cualquier activo. además, usaremos las medias móviles para la construcción de un nuevo indicador que denominamos “Asimetría móvil” tomando como base la cotización de la acción de Grupo Aval desde el 10 de marzo de 2020 al 23 de octubre del mismo año. Finalmente, deduciremos una función periódica que nos dará una solución particular a la tendencia de la misma acción.

2. Historia y contextualización.

Charles Henry Dow nació en el estado de Connecticut, EEUU, el 6 de noviembre de 1851, fue un periodista y economista considerado a perpetuidad el padre del análisis técnico, fundó el prestigioso diario económico *“The Wall Street Journal”* y fue el autor de la teoría de Dow, que de acuerdo con [Bet08], describe la economía en función del comportamiento de la bolsa bajo seis principios. En 1887, en compañía de su colega Edward David Jones, creó el índice *DJIA “Dow Jones Industrial Average”*, que cuenta con las 30 acciones más representativas del mercado de valores de NY.

*Estudiante de matemáticas, Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Bogotá-Colombia.

Desde entonces, este y otros índices han contabilizado grandes caídas como la ocurrida en el año 1929, conocida como el Crack del 29, que tal y como lo afirma [Tas19], tuvo lugar en medio de una primavera, donde los bonos de libertad impulsaron el ánimo inversionista de una economía que poco había sufrido la Primera Guerra Mundial, pero sí que vino a sufrir aquel martes de octubre cuando la bolsa cayó sin aviso alguno, dejando cientos de empresas en bancarrota y miles de personas sin empleo. Seis décadas después, estalla la *burbuja de las puntocom* en pleno auge tecnológico. Los índices del Nasdaq¹ estaban sobre los 5.000 puntos y de un momento a otro, empezaron a caer en picada. Grandes inversiones realizadas en empresas de internet colapsaron debido a la euforia colectiva y al rápido crecimiento que obtenían cuando debutaban en bolsa. Según [Sev13] “*El lema «hacerse grande rápido» reflejaba esta estrategia, que durante el período de pérdidas, las empresas se basaron en el capital de riesgo*”. Posteriormente, en el año 2008, a raíz de la política del entonces presidente George Bush de que cada familia debía tener su propia casa, el gobierno de EEUU ofreció bonos hipotecarios a bajo costo ocasionando euforia en los mercados por la adquisición de estos. La FED² había ajustado las tasas de interés a un 1 %, por lo que miles de personas solicitaron financiación [Anó13]; sin embargo, lo que no se esperaban, era que la FED aumentara paulatinamente las tasas en los siguientes años hasta un 5,25 % haciendo que fuera imposible el pago de bonos e hipotecas, luego, el estallido de la burbuja inmobiliaria era inminente, y bancos como Lehman Brothers quebraron en consecuencia [Git18]. Finalmente, en el mes de marzo del 2020, las bolsas del mundo volvieron a sufrir a raíz de un desacuerdo entre los miembros de la Opep+³ en ajustar la producción de crudo. Rusia se opuso a recortar producción y en el marco de este escenario, Arabia Saudita inició una competencia que llevó a los precios del barril de petróleo a -30 dólares (en el caso de la referencia WTI)⁴, lo que produjo un colapso en los principales índices bursátiles del mundo [Gui20].

Los anteriores escenarios reflejan un problema en común: Son sucesos impredecibles que muy pocos pudieron anticipar; sin embargo, y a raíz de las crisis, se han fortalecido las estrategias de inversión, se han creado plataformas más seguras y herramientas que ofrecen información en tiempo real que permiten reducir esa brecha de riesgo potencial. A pesar de estos esfuerzos, el pánico no deja de ser protagonista en una operación, donde el destino de una fructuosa inversión parece estar en manos de un gráfico que se comporta en forma de zigzag.

3. Del análisis fundamental, al análisis técnico.

“Si yo tuviera una hora para resolver un problema y mi vida dependiera de ello, utilizaría los primeros 55 minutos para determinar la pregunta adecuada que hacer, una vez que la supiera podría resolver el problema en menos de cinco minutos” decía Einstein (como se citó en [Dur16]).

Los analistas fundamentales suelen comentar que es más el tiempo que gastan en buscar la mejor estrategia de inversión que lo que se demoran en aplicarla. Por ejemplo, y contextualizando un poco, la bolsa de Nueva York se llama en realidad *New York Stock Exchange*, que obedece al acrónimo NYSE, y opera de 9:30 am - 4:00 pm. Es la más importante del mundo con la capitalización bursátil más alta, y reúne a más de 3.000 empresas de todo el mundo en 4 índices, dentro de los que se encuentra el *DJIA* [Bro20]. En este orden de ideas, un agente de la bolsa de NY, que empieza a laborar a las 9:15 am, dedica parte de su horario en estudiar las tendencias, en leer noticieros, en analizar los indicadores económicos, los resultados financieros, y finalmente abrir una posición.

Según [Bet08] los precios de un activo siguen patrones definidos por sus cotizaciones pasadas, es decir, lo que se repite, obedece a una lectura de lo que en algún momento sucedió, y de esto precisamente, se trata el análisis técnico. Partiendo de esta premisa, Charles Dow, creó los 6 principios que se consideran la base del análisis técnico, los cuales describimos a continuación:

1. **El precio lo descuenta todo:** “*Toda la información está incluida en los precios. Toda la información pasada, actual e incluso futuro está descontada en los precios de una acción*” [Lóp18].
2. **El mercado tiene tres tendencias:** La tendencia primaria, lo que sería la marea del mercado, tendría una duración superior a un año, incluso varios años. La tendencia secundaria, que serían las correcciones en la tendencia primaria, podría durar de tres semanas a tres meses. La tendencia menor, o de duración más corta, suele durar menos de tres semanas, y son fluctuaciones de la tendencia intermedia. [Lóp18]

En otras palabras, para determinar una tendencia alcista, debe asegurarse que cada recorte no supere los anteriores y en las zonas de recuperación, cada repunte debe ser mayor al anterior. Se podrá notar, que en caso contrario la tendencia será bajista.



Figura 1: Principio 2.

¹Nasdaq (National Association of Securities Dealers Automated Quotation) es la bolsa de valores electrónica y automatizada más grande de Estados Unidos.

²The Federal Reserve Board of Governors in Washington DC. - Reserva Federal de EEUU.

³Organización de Países Exportadores de Petróleo y Aliados, liderados por Arabia Saudita y Rusia respectivamente.

⁴West Texas Intermediate. Es la referencia del petróleo en Estados Unidos, se extrae en ese país y se refina en el golfo de México.

3. **Las tendencias principales tienen seis fases:** La fase de acumulación comienza con la compra de los inversores más astutos, en este momento estos inversores deducen que el mercado ha asimilado todas las malas noticias posibles. La fase de participación pública es cuando los seguidores de tendencias se incorporan al mercado, los precios suben de forma rápida, las noticias empiezan a ser mejores. La fase de distribución comienza cuando los periódicos publican noticias positivas sobre la economía, y se incrementa el volumen de participación de los inversores. [Bet08]
4. **Las medias ⁵ deben confirmarse entre ellas:** No se puede dar una señal alcista o bajista de importancia, si los dos sectores no se confirman uno al otro. (En períodos más cortos, las señales son más pronunciadas, en caso contrario, se asume que la tendencia continúa). [Bet08]
5. **El volumen ⁶ debe confirmar la tendencia:**

El volumen debería expandirse o incrementarse en la dirección de la tendencia principal. Según [Bet08] a veces, el volumen confirma la tendencia, o la anticipa.



Figura 2: Principio 5.

6. **Se presume que una tendencia está en vigor hasta que da señales definitivas de que ha cambiado:**

Un mercado está en tendencia alcista hasta que no cambia a tendencia bajista. Y un mercado está en tendencia bajista hasta que no cambia a tendencia alcista. [Lóp18].

A partir de estos principios, diferentes indicadores han sido deducidos y muchos se han consolidado como las herramientas suficientes para realizar análisis técnico. Entre ellas, **La media móvil**, que es un promedio de los precios de una acción y se calcula dinámicamente, es decir, a medida que se avanza en el tiempo, este se actualiza sobre un rango temporal definido inicialmente. Por ejemplo, si estamos estudiando un activo en particular, y nos interesamos en el comportamiento de este cada 10 días, la media móvil calcula el promedio

⁵Como se verá más adelante, las medias son promedios del precio cotizado en la bolsa de un activo particular calculados en un intervalo de tiempo, y se usan para definir tendencias.

⁶El volumen se refiere a la cantidad de títulos negociados de una acción en un periodo determinado [Tej18].

aritmético de los últimos 10 días, y a medida que pasen los días, la curva de la media móvil se irá actualizando sobre los últimos 10 días que incluirá un nuevo precio entrante como un precio saliente del rango respectivo. Por ahora, nos quedamos con esta noción, pero más adelante, veremos a profundidad esta herramienta.

Así las cosas, bastantes analistas consideran que la media móvil debe analizarse mediante la construcción de 3 curvas con horizontes temporales diferentes: La primera curva, describe una tendencia de largo plazo (≥ 50 días), aunque depende mucho del activo y del tiempo que se desea mantener la inversión. La segunda curva fija las posiciones (ya sea de compra o de venta), también depende del activo, pero suele ser de 20 a 50 días. Y la tercera curva debe activarse cuando se logran identificar *tendencias de poder*, es decir, cuando el patrón es muy evidente y el contexto ayuda a predecir esta tendencia.



Figura 3: Medias móviles con 3 intervalos de tiempo diferentes.

En el gráfico podemos observar que la media móvil de largo plazo, en este caso de 50 días (lila), cruza de abajo para arriba a la media móvil de 20 días (rojo) dando señales de compra a principios del año 2015, y a mediados del mismo año, vuelve a cruzarla en sentido contrario, dando señales claras de venta porque se avecina un cambio de tendencia, que es lo que claramente ocurre. Notemos que, a mediados de 2016, parece que hay una señal muy fuerte de período bajista, momento preciso de activar la tercera media móvil, de período mucho más corto y que dará una señal de compra en el momento que cruce de abajo para arriba a la curva roja.

Por otra parte, tenemos **las bandas de Bollinger**, que consisten en definir rangos de precios sobre los que normalmente el precio debería estar, también se trata de un indicador de tendencias pero esta vez representa la volatilidad del activo estudiado, es decir que entre más estrechas se encuentren las bandas, menos volátil es el activo y por lo tanto menos riesgoso. Por el contrario, entre más angostas sean las bandas, más volátil y riesgoso es, pero mucho más rentable [Kil19].

Las bandas también se usan para identificar puntos de soportes y resistencias. Un soporte, es el nivel de precios sobre el que existe una demanda que no permite disminuir el precio, la resistencia es lo mismo, pero con tendencia al alza. Cuando un nivel de resistencia se rompe, inmediatamente se convierte en un soporte, y viceversa, y deben confirmarse con el volumen transado [Bet08].

 Ejemplo de una banda de Bollinger que indica niveles de volatilidad

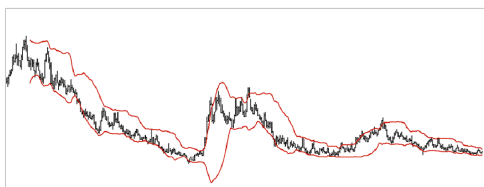


Figura 4: Se suele usar el indicador con medias móviles para definir su horizonte temporal, entre menos volátil, más corto es el tiempo de la media.

Por último, damos una breve aplicación de la sucesión de **Fibonacci**. La sucesión arranca con 0 y 1, y a partir de allí, cada elemento es la suma de los dos anteriores [Vás20].

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377...,

lo curioso es que la razón de un elemento k de la sucesión con un elemento $k + 1$ tiende al inverso exacto $0.618033...$ del número *Phi* o razón áurea $1.618033...$

Si bien, las sucesión describe fenómenos de la naturaleza tales como la disposición de las hojas de un árbol, las semillas de las margaritas, la cría de conejos, etc, también tiene aplicación en áreas como ciencias de la computación, en teoría de juegos y hasta en la descripción de la forma de espiral de las galaxias.

En bolsa, no es ajeno, la proporción áurea o razón divina describe en *los retrocesos de Fibonacci* patrones que señalan los puntos de soporte y resistencia de una tendencia. Puntos que señalan el momento en que una tendencia dejará de ser alcista o puntos que señalan cuando una tendencia dejará de ser bajista. En esta ocasión, no explicamos mediante gráfico ni mucho menos profundizamos en él, porque se requiere de más conceptos, que para efectos del presente artículo no son necesarios y representan una extensión considerable en el tema. Pues bien, lo que acabamos de presentar, constituyen algunas de las herramientas más usadas; a partir de este momento, nos adentramos en las medias móviles y la construcción de nuestro modelo.

4. Medias Móviles

Definición 4.1. Una media móvil es un indicador técnico que combina precios de un activo a lo largo de un período de tiempo establecido, y los divide entre el número de datos recogidos para dar una línea de tendencia. Es popular entre los inversores porque puede ayudar a determinar la dirección de una tendencia actual y reducir el impacto de subidas de precio repentinas [IG].

Existen diferentes tipos de medias móviles: Media móvil simple (SMA), exponencial, logarítmica, ponderada, Hull,

Kama, entre otras. El cálculo de SMA es el siguiente:

$$SMA = \left(\frac{1}{n} \right) \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1)$$

donde n es el número de períodos y x el precio de cotización. Es claro que entre más grande n , más lenta la curva, o sea los precios que entren con fuerza, serán recogidos tardíamente o las señales emitidas serán con menor intensidad; no obstante, este no es el único problema de la media móvil simple, al tratarse de un promedio, es claro que el indicador es sensible a cambios bruscos en el precio, es decir que un precio entrante que sea suficientemente alto, o suficientemente bajo, entra a formar parte del cálculo alterando el curso del indicador, y es lo más lógico porque está reflejando la realidad, pero a medida que el tiempo trascurre, en cola irá quedando este valor, y cuando salga, volverá a alterar el indicador, pero esta vez dando una señal totalmente falsa, pues la curva da una señal que ocurrió n días atrás.

Por lo anterior, no recomendamos el uso de la media móvil simple, más si, el uso de la media móvil exponencial, que es la que usaremos de aquí en adelante.

Definición 4.2. Una media móvil exponencial otorga más peso e importancia a los datos de precios recientes y responde más rápidamente a cambios de precios recientes que la SMA, se calcula de la siguiente manera: [Kil19].

$$EMA = P_{hoy} * K + EMA_a * (1 - K), \quad (2)$$

donde P_{hoy} es el precio actual de cotización, EMA_a , la media móvil exponencial del último día, K es el factor de ponderación cuyo intervalo es $(0, 1]$, con $K = 2/(n + 1)$ y n es el número de períodos.

Si n es 1, EMA es el precio actual, si $n \leq 3$, P_{hoy} tendrá más peso, y a partir de 4, se corrige la distribución de ponderación entre el precio actual y los anteriores. Es decir que entre más grande sea n , más pequeño es K , y entre más pequeño K , más pequeño es P_{hoy} y más grande es EMA_a .

Este indicador reacciona más rápido a los cambios de tendencia, pues le asigna mayor peso a los datos recientes y en menor proporción según se retrocede en el tiempo; sin embargo, ningún indicador de media móvil servirá si no se emplea de manera adecuada el horizonte temporal. Para analizarlo mejor, observemos el siguiente ejemplo:



Figura 5: Histórico de cotización de la acción de Grupo Aval, año 2020. Es evidente el colapso financiero ocurrido el 9 de marzo. (Ver sección 2. Historia y contextualización).

Si consideramos un período de 100 días que ayude a definir una tendencia de largo plazo, nos damos cuenta de que es totalmente falso que la señal sea bajista. A mediados del mes de marzo, el precio ha venido recuperándose y la curva del indicador ha pasado por alto el cambio de tendencia impidiéndonos ver los momentos clave para comprar y recuperarnos de las pérdidas a comienzos de marzo.

Observemos qué ocurre si tomamos un período más corto:



Figura 6: Histórico de cotización de la acción de Grupo Aval, año 2020. (mar-dic).

Es evidente que la curva reacciona fielmente a los cambios de tendencia, pero como la idea no es adivinar el período n que debemos tomar, vamos a seguir viendo definiciones que nos ayuden a construir el modelo.

Definición 4.3. De acuerdo con [Pui20b] La volatilidad es la variabilidad de la rentabilidad de una acción respecto a su media en un periodo de tiempo determinado.

Cuando el precio de una acción oscila de manera que las cotizaciones se alejan de su media, se dice que la acción es volátil. Este indicador es de gran ayuda para identificar activos que representan riesgo significativo, pero a su vez aquellos con los más altos niveles de rentabilidad.

El nivel de volatilidad nos servirá entre otras cosas, a establecer un rango n del promedio móvil. Es decir que si una acción es demasiado volátil respecto a sus pares en el mercado, el horizonte temporal n deberá ser mayor a 25, entre 15 y 24, para acciones con volatilidad normal, y entre 8 y 14, para acciones cuyo precio es muy estable. Lo anterior, para que la curva se comporte de acuerdo con el nivel de oscilaciones, evitando falsas señales, siendo más sensible a cambios de precio en acciones mucho más estables, y más calmada en acciones mucho más volátiles.

Definición 4.4. El coeficiente Beta (β) de una acción mide el grado de variabilidad de la rentabilidad de una acción respecto a la rentabilidad promedio del mercado en que se negocia. La beta (β) mide el “riesgo sistemático” o “de mercado”. Cuanto más volátil sea una acción con respecto al índice del mercado, mayor será su riesgo de mercado [Pui20a].

El coeficiente indica qué tanto varía el precio de una acción con respecto a las demás acciones que cotizan en el mismo índice. Por ejemplo, Grupo Aval hace parte del índice NYSE composite, si la Beta es 1, quiere decir que la acción es igual de volátil al resto de acciones que cotizan en el NYSE composite, o sea que posee el mismo riesgo sistemático y que en

tanto suba el mercado, en la misma medida subirá la acción, y en tanto baje, en la misma medida bajará.

Así pues, si la beta es menor a 1, por ejemplo 0,55 quiere decir que en tanto el mercado suba 3 %, la acción subirá 55 %, es decir habrá subido 1,65 %. Si la beta es mayor a 1, por ejemplo 1,4, quiere decir que en tanto el mercado suba 3 %, la acción subirá 140 %, o sea habrá subido 4,2 %. Quiere decir que en el primer caso, la acción es 45 % menos volátil, mientras que en el segundo caso la acción es un 40 % más volátil que el resto de las acciones que cotizan en el mismo índice.

Volviendo al ejemplo, el coeficiente Beta de la acción de grupo Aval a octubre de 2020 es de 0,61, es decir que esta acción es poco volátil en comparación a las acciones que pertenecen al índice NYSE composite, por lo tanto el período n que podríamos usar si tenemos en cuenta el índice Beta sería de 8 y 15.

En el siguiente gráfico, ilustramos una curva que representa cada rango.



Figura 7: Curva de medias móviles con horizontes de 12, 25 y 50 días.

Siendo $n = 50$ (verde), la curva no ayuda a visualizar un punto clave de compra o venta.

Siendo $n = 25$ (lila), la curva reacciona más rápido, pero aún es demasiado tímida, no sigue las tendencias oportunamente. Siendo $n = 12$ (violeta), la curva dicta un comportamiento con menos señales lentas y falsas, y sus tendencias se conocen con claridad de acuerdo con el nivel de oscilaciones del precio.

La beta se calcula de la siguiente manera:

$$\beta = \rho_i \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_m} \right), \quad (3)$$

este cálculo corresponde al producto entre la razón de la varianza del precio y la varianza del mercado con la correlación del índice de referencia y la acción, (esto lo veremos más adelante, en la sección de teoría básica para el estudio de tendencias) donde:

$$\rho_i = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right),$$

con x = índice de referencia y y = precio de la acción,

$$\sigma_i = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right),$$

que corresponde a la varianza del precio, con:

x = precio de la acción.

σ_m = varianza del mercado.

Nos hemos acercado a tres rangos; sin embargo, la amplitud de cada clase sigue siendo distante, así que antes de seguir acotando esta diferencia, veamos un poco de teoría estadística, que será necesario tenerla en cuenta para saber qué periodo debemos usar para analizar cualquier acción.

5. Teoría básica para el estudio de tendencias

Se habla de variable estadística cuando es parte de una muestra, mientras que la variable aleatoria se toma del total de la población. Existen dos tipos de variables aleatorias: La discreta y la continua. Ambas difieren la una de la otra porque la primera toma un conjunto de valores finito, mientras que la segunda puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo (infinito numerable). [Ovi13]

Definición 5.1. Se llama continua a una variable aleatoria X si su rango R_x es un intervalo o unión de intervalos sobre los números reales y si tiene probabilidad cero de igualar a cualquier valor aislado en R_x , es decir que la variable puede tomar infinitos valores entre dos números, y su probabilidad de que aparezca repetido, es nula [Ovi13].

Cuando se quiere observar la distribución de los datos de una población, se dibuja un polígono de frecuencias o un histograma. A medida que se obtienen más datos, los picos se suavizan y se observa una concentración de datos alrededor de la media. Las variables aleatorias continuas vendrán definidas por la función de densidad.

Definición 5.2. [Ovi13] señala que la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria continua X es la probabilidad de que X tome un valor menor o igual a algún x específico.

Esto es:

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_x^x f(t)dt = 0, \quad (4)$$

en donde t es una variable de integración. Por lo tanto, la función de distribución acumulativa $F(x)$ es el área acotada por la función de densidad que se encuentra a la izquierda de la recta $X = x$: Dado que para cualquier variable aleatoria continua X ;

$$P(X = x) = \int_x^x f(t)dt = 0, \quad (5)$$

entonces,

$$P(X \leq x) = P(X < x) = F(x), \quad (6)$$

es decir que la función de densidad al ser representada con un histograma, describe lo que se conoce como la *Campana de Gauss* o distribución normal. además, para comprender los

indicadores de asimetría y curtosis que vamos a usar, es necesario saber que el área bajo la curva sea igual a 1. Esto último se obtiene con la siguiente función:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad (7)$$

que se conoce como la integral de *Gauss*, y la gráfica que la representa se conoce como la *campana de Gauss*.

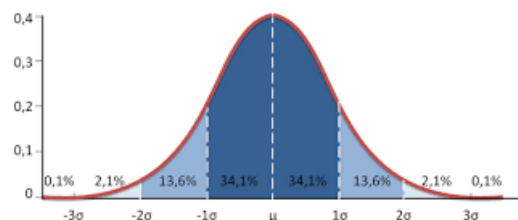


Figura 8: Campana de Gauss

El resultado de la función gaussiana se obtiene gracias al teorema de Fubini.⁷

Teorema 5.1. Sea $f : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}$ integrable, entonces

1. La función de la variable $y \in \mathbb{R}^k, f(x, -) : y \rightarrow f(x, y)$ es integrable.
2. La función g definida por $g(x) = \int f(x, y)dy$ es integrable.
3. $\int gdx = \int \int f$ (es decir que la integral de f coincide con sus integrales iteradas).

es decir:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \left[\int_a^b f(x)dx \right] \left[\int_c^d g(y)dy \right], \quad (8)$$

con este resultado, se pudo demostrar que el área bajo la curva es 1⁸

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \quad (9)$$

Concluimos que la campana de Gauss o distribución normal satisface dos propiedades:

1. El área bajo la curva es 1 tomando todos los valores de la recta real en el eje de la abscisa, es decir, de menos infinito a infinito.
2. La función es mayor a cero en cualquier punto, es decir que es asintótica con el eje de la abscisa.

⁷Aquí podemos encontrar su demostración: http://matematicas.unex.es/~montalvo/Analisis_Varias_Variables/apuntes2010/cap23.pdf

⁸La demostración de este resultado se puede ver en el siguiente enlace: <https://www.gaussianos.com/calcular-el-area-bajo-la-campana-de-gauss/>

Con lo visto hasta aquí, y aclarando que los datos que tomamos del histórico de cotización de la acción de grupo aval es la población total, podemos concluir que la variable de estudio es aleatoria y además continua porque cada valor puede ser cualquiera dentro de un intervalo infinito numerable. Por lo tanto, podemos realizar un estudio detallado de su distribución alrededor de la media, pero antes, también es necesario conocer una medida de variabilidad de la distribución de probabilidad a partir de la siguiente definición:

Definición 5.3. De acuerdo con [Bet08], los momentos estadísticos son formulaciones matemáticas, que se definen como parámetros estadísticos, algunos de los cuales tienen amplia connotación dentro del estudio de curvas de distribución de frecuencias y más específicamente respecto del sesgo y de la curtosis.

Dada una distribución de datos, se define momento central de orden r :

$$\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^r, \text{ donde } r \text{ es el parámetro. además, existen}$$

momentos poblacionales y muestrales. El momento muestral central de orden 2 es la varianza s^2 o también σ^2 . además, como ya se vio que el área bajo la curva de distribución normal es 1, ahora, bajo la misma curva, la desviación estándar, que sería la raíz cuadrada de la varianza σ , señala el punto de inflexión de la curva y representa al 68.3% de los datos, o sea que refleja la dispersión de los datos o la distancia de los mismos respecto a un valor central.

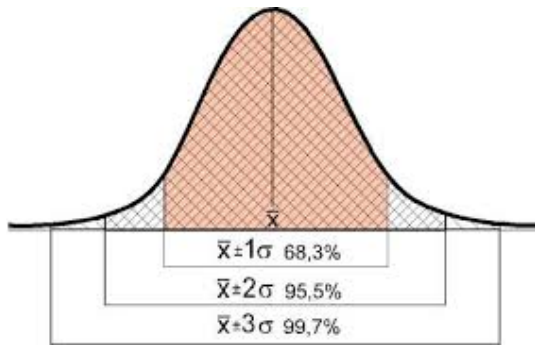


Figura 9: Distribución normal.

Recordemos que el coeficiente beta se calculaba como se muestra en 3, ahora tiene mucho más sentido decir que el nivel de volatilidad de una acción se mide en función de las varianzas del precio y la varianza del mercado, que como acabamos de ver, corresponde al segundo momento estadístico. Lo anterior es sumamente importante porque de acuerdo con el grado de concentración de los datos alrededor de la media, se puede obtener el nivel de volatilidad de una acción, y junto con el coeficiente beta, ayudarán a definir el período n .

Volviendo a nuestra acción de estudio, si calculamos la desviación estándar a los datos tomados desde el 10 de marzo de 2020 al 23 de octubre del mismo año, y este resultado lo dividimos por el promedio aritmético de los datos, obtenemos 9.17%. Es decir que los datos se alejaron de la media en ese

porcentaje y da señales de que el período a usar para la media móvil exponencial es el rango 8-14.

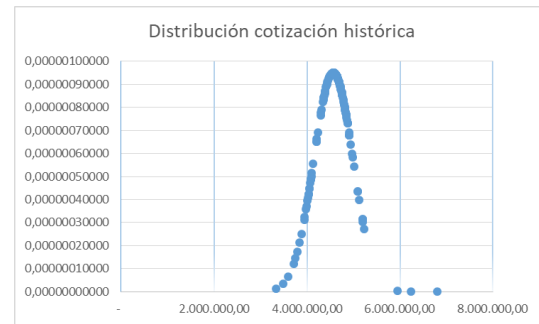


Figura 10: Concentración de los precios alrededor de la media.

Como bien podemos notar, la curva se aleja de una distribución normal, es decir que los datos se encuentran tan concentrados alrededor de la media que si usamos un período lejano a 8, el indicador no perseguirá las tendencias a corto plazo y será menos diciente. Esto explica que sólo hemos podido aclarar qué tan volátil es un activo, pero no aclara si se trata de una distribución normal de los datos o no. Por eso, en este artículo incluimos el estudio del coeficiente de curtosis.

Definición 5.4. El coeficiente de curtosis es una medida estadística que determina el grado de concentración que presentan los valores de una variable alrededor de la zona central de la distribución de frecuencias. También es conocida como medida de apuntamiento y se calcula así: [Mar17].

$$g_2 = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^4}{s^4} - 3. \quad (10)$$

De acuerdo con la definición de momento estadístico, corresponde entonces al cuarto momento central respecto de la media dividido entre el cuadrado de la varianza, todo ello menos 3.

Si el resultado anterior es cero o cercano a él, se dice que la distribución es normal y su curva es *Mesocúrtica*, si el resultado es mayor a cero, el grado de concentración de los datos es elevado alrededor de la media y su curva es *Leptocúrtica*, si el resultado es menor a cero, entonces el grado de concentración de los datos alrededor de la media será reducido y su curva es *Platicúrtica*.

Lo anterior tendrá un comportamiento así:

Entonces, cuando el coeficiente sea cero, el rango de n para 2 será 15-24, si es mayor a cero, el rango será 8-14, si es menor a cero, el rango será mayor a 24, y ello basado en qué tanto se aleja de ser una distribución normal o en qué tan volátil es el activo respecto a sus pares en el mercado (β).

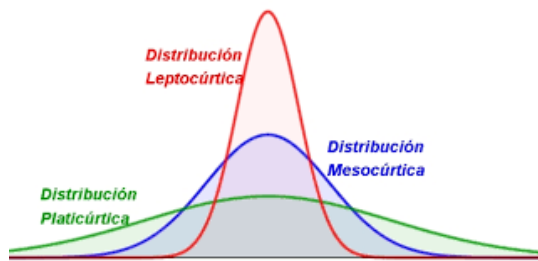


Figura 11: Tipos de curvas de acuerdo con el coeficiente de curtosis.

6. La Media Móvil Exponencial no sólo se usa reemplazando valores

A lo largo del texto, hemos visto que la acción de grupo Aval no es muy volátil. Su coeficiente Beta de 0,61 indica que su precio fluctúa un 39 % menos a lo que fluctúan las acciones que cotizan en el *NYSE composite*, sumado a esto, sus precios oscilan en 9,17 % alrededor de la media, que al ser graficados permiten ver una curva de distribución bastante estirada que obedece a un coeficiente de curtosis de 6,51, muy por encima de una distribución normal. Con esto, podemos realizar un mejor análisis del gráfico.

Fijamos un horizonte para la media móvil exponencial de 8 días, y para dar más claridad a los cambios de tendencia y por supuesto a los puntos de compra y venta, tomamos otra curva arbitraria, en particular, de 15 días, (el horizonte mínimo del segundo rango (15-24)), que representa la tendencia del activo a mediano plazo.



Figura 12: EMA para la acción de Grupo Aval usando Media móvil exponencial.

Cuando la curva de 8 días (azul) cruza de abajo para arriba a la curva de 15 días (verde), en algunos casos obedece a un cambio de tendencia, y por ende el inversionista deberá comprar. Cuando suceda lo contrario (la curva azul cruce de arriba para abajo a la curva verde), indicará entonces, en algunos casos un cambio a tendencia bajista, y por ende el inversionista sabrá que es el momento de vender. Por ejemplo, a comienzos del mes de noviembre, la curva azul cruza de abajo para arriba a la curva verde dando una clara señal de cambio a tendencia alcista. En ese momento, el inversionista que haya decidido comprar, habrá mantenido su posición hasta la fecha dado que las curvas no han dado una señal de cambio de ten-

dencia y evidentemente habrá obtenido un beneficio enorme en términos monetarios.

Para replicar el mismo análisis a los demás activos, vamos a usar el lenguaje de programación Python como sigue:

Importamos las librerías de Pandas, Numpy, Datetime y Matplotlib, además, desde la API de Yahoo Finance importamos el histórico de cotización de la acción de Bancolombia que guarda un Ticker de referencia 'CIB' indicándole al programa que considere los precios del 10 de marzo al 23 de octubre del 2020.

Importamos datos de la API de Yahoo Finance relacionados con el histórico de cotización de la acción de Bancolombia:

```
1 import pandas as pd
2 from pandas_datareader import data as pdr
3 import numpy as np
4 import datetime as date
5 import matplotlib.pyplot as plt
6 fecha_ci=date.datetime(2020,10,23)
7 fecha_ap=date.datetime(2020,3,11)
8 stock="CIB"
9 a_ele=pdr.get_data_yahoo(stock, start=
10 fecha_ap,end=fecha_ci)\
```

Visualizamos los datos con ayuda de un Dataframe:

```
1 df=pd.DataFrame(a_ele)
2 desv=a_ele['Close'].std()
3 coeficiente_std=desv/a_ele['Close'].mean()*100
4 print(coeficiente_std)
5 a_ele.describe()\
```

	High	Low	Open	Close	Volume	Adj Close
count	160.000000	160.000000	160.000000	160.000000	1.600000e+02	160.000000
mean	27.103500	25.878438	26.525750	26.457625	4.875400e+05	26.017812
std	2.515291	2.608776	2.602611	2.561238	2.986895e+05	2.553037
min	17.570000	16.270000	17.070000	16.570000	5.440000e+04	15.942717
25%	25.862499	24.895000	25.357501	25.342500	2.428250e+05	25.153321
50%	27.015000	26.105000	26.525001	26.530001	4.022000e+05	26.211682
75%	28.325000	27.312500	27.892499	27.775001	6.866250e+05	27.296731
max	36.939999	34.500000	35.599998	36.610001	1.465100e+06	35.224075

Figura 13: El Coeficiente Desviación estándar (STD) indica que la acción de Bancolombia no es volátil, pues el coeficiente de desviación estándar es de 9,68 %

Bien, con el anterior dato podemos elegir el número de días apropiado para la media móvil exponencial. Escribimos la siguiente función que nos servirá para calcular el coeficiente de curtosis:

```
1 varianza=a_ele['Close'].var()
2 media=a_ele['Close'].mean()
3 momento_cuatro=0
4 curtosis=0
5 import math
```

```

6 def curtosis():
7     momento=0
8     for i in a_ele['Close']:
9         momento+=math.pow(i-media,4)
10        momento_cuatro=momento/159
11        curtosis=momento_cuatro/math.pow(varianza,2)-3
12    return curtosis
13 coef_curtosis=curtosis()
14 print(coef_curtosis)

```

El código replica la fórmula vista en la sección 5. Para este caso es de 3,09, es decir que la curva es leptocúrtica.

Para efectos prácticos del código, escribimos una función que elija aleatoriamente el período n de la media móvil exponencial respetando los rangos establecidos. En esta ocasión, como el coeficiente de curtosis y la desviación dan señales de ser un activo poco volátil, el rango que debe tomar el programa es 8-15; sin embargo, sugerimos que en la práctica este período sea escogido con mayor rigor.

Construimos una función condicional que evalúa el coeficiente de curtosis hallado anteriormente para definir el número de días de la media móvil exponencial

```

1 import random as rd
2 n=0
3 ndos=0
4 def periodo():
5     if 2<coef_curtosis:
6         n=rd.randint(8,14)
7         ndos=rd.randint(15,24)
8         if -2<=coef_curtosis<=2:
9             n=rd.randint(15,24)
10            ndos=rd.randint(25,50)
11        else:
12            n=rd.randint(25,50)
13            ndos=rd.randint(51,100)
14    return n,ndos

```

Finalmente, como se necesitan dos curvas que ayuden a identificar los cambios de tendencia, definimos dos variables nu , nd que obedecen a los períodos de las medias móviles:

```

1 def EMA(df,n):
2     EMA=pd.Series(pd.Series.ewm(df['Close'],span=
3     n,min_periods=n-1,adjust=False).mean(),name=
4     'EMA_'+str(n))
5     df=df.join(EMA)
6     return df
7
8 nu=periodo()[0]
9 nd=periodo()[1]
10 df=EMA(a_ele, nu)
11 df2=EMA(df, nd)
12 df2=df2[['Close','EMA_'+str(nu),'EMA_'+str(nd)]]

```

El gráfico es el siguiente:

Observemos que, al ser un activo relativamente estable, las tendencias son seguidas con oportunidad, y las señales de compra en los puntos donde la media de 13 (amarillo) cruza

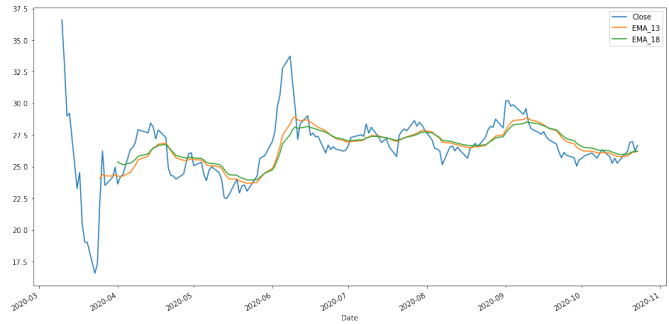


Figura 14: Medias móviles de 13 y 18.

a la media de 18 (verde) se ven con facilidad, al igual que las señales de venta.

A fin de evitar una extensión del texto, dejamos que el lector intente replicar este modelo en otras acciones y verificar el comportamiento de las curvas. Simplemente habrá que reemplazar el Ticker proporcionado en la primera línea que para el caso de Bancolombia es 'CIB' por el Ticker correspondiente a la empresa deseada, y el modelo estará listo para graficar los resultados.

7. Asimetría móvil y función de tendencia periódica

Los inversionistas son ambiciosos, lo que hace que quieran anticiparse a los cambios de tendencia y realizar las operaciones justo antes de que el resto de jugadores lo haga, y así obtener un beneficio mayor. Para satisfacerlo, es importante que nos introduzcamos en el coeficiente de Asimetría de Fisher y buscar la forma de asociarlo a los cambios de tendencia.

Definición 7.1. El coeficiente de Asimetría informa el grado en que los datos se reparten proporcional y equitativamente por encima y por debajo del punto central de la distribución. En el caso que dicho reparto sea equilibrado, se dice que la distribución es simétrica, se calcula de la siguiente manera: [Bet08].

$$g1 = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^3}{\left(\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^{3/2}}. \quad (11)$$

El coeficiente de Asimetría se define como el tercer momento central respecto de la media y tiene las siguientes interpretaciones:

1. Si el resultado es mayor a cero, se dice que la distribución es asimétrica positiva, es decir que existe mayor concentración de datos por encima de la media.
2. Si el resultado es menor a cero, se dice que la distribución es asimétrica negativa, es decir que existe una mayor concentración de los datos por debajo de la media.

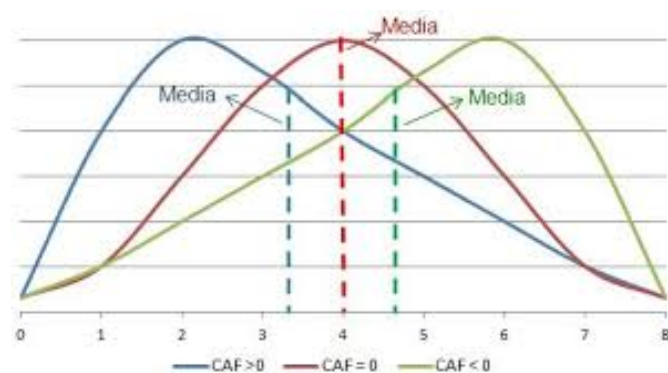


Figura 15: Coeficiente de Asimetría de Fisher.

3. Si el resultado es igual a cero, la distribución es simétrica, existe una distribución proporcional de los datos.

Si el coeficiente es negativo, la tendencia que sigue el activo es bajista, lo contrario sucedería si la distribución es asimétrica positiva.

El coeficiente de asimetría de la acción de aval es de 0.99, es decir que hay una mayor concentración de datos por encima de la media, que podemos visualizar en el siguiente gráfico:

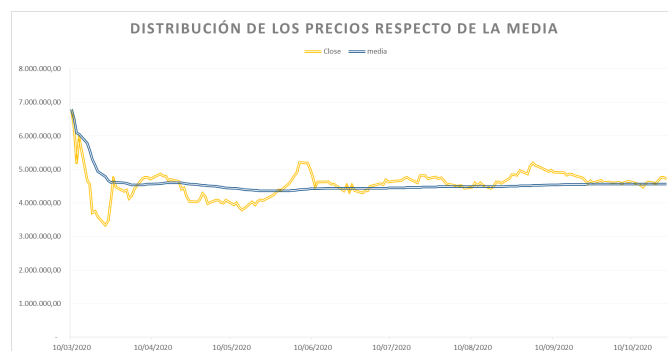


Figura 16: Precios respecto de la media.

De todas formas, no sabemos si habrá un comportamiento alcista o bajista pues el coeficiente únicamente está dando una razón respecto del histórico. Esto sucede porque si los precios históricos tienen más peso que los recientes, el coeficiente será positivo, pero puede suceder que la tendencia en el momento sea bajista, y sin darnos cuenta estemos interpretando erradamente. Por esta razón proponemos analizar una posible tendencia respecto de los últimos datos de la serie, guardando una relación con el rango estudiado para la media móvil.

Dado que el coeficiente trabaja con una media aritmética, vamos a calcular este mismo, pero con una media móvil exponencial de 8 días, para que su resultado sea congruente con el comportamiento de las curvas y proporcione una dirección futura respecto de la media calculada. Es decir que si el indicador es mayor a cero, y alejado lo suficiente de él, la señal

emitida será un comportamiento alcista y de mayor probabilidad para que el futuro precio mantenga la tendencia. Lo contrario sucederá con un coeficiente negativo. Lo que proponemos es construir el indicador de asimetría para períodos móviles de 8 días con media exponencial.

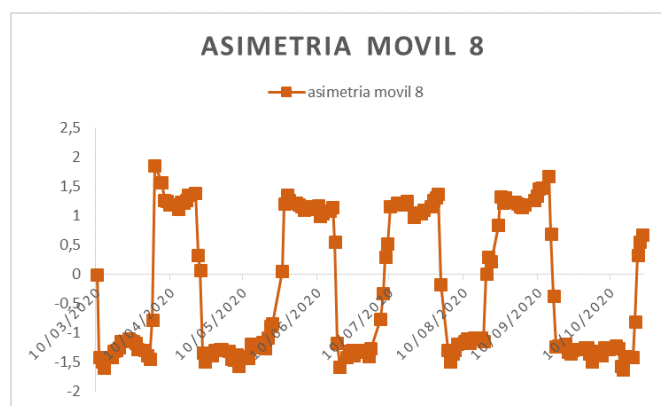


Figura 17: Comportamiento del coeficiente de Asimetría móvil de 8 días.

El gráfico muestra el comportamiento del coeficiente en un lapso de 8 días desde marzo. Cuando está por encima de cero, la tendencia ha sido alcista, mientras que ha sido bajista cuando el gráfico describe la línea por debajo de cero. Si nos detenemos más, observamos que la amplitud de la gráfica es de 1.5 aproximadamente y pareciera que su periodicidad de onda fuera de 1 mes y medio aproximadamente, lo que significa que la tendencia que sigue la acción de grupo aval tiene esta duración. Lo que acabamos de ver, es un indicador que estamos proponiendo para estudiar tendencias y que ha sido deducido de las medias móviles exponenciales.

Este gráfico puede ayudarle al inversionista a tomar una decisión respecto al momento de invertir, que es justo antes de que termine el período de tendencia bajista, o al momento de vender, que es cuando el período de la tendencia alcista termine. además, puede estar seguro de que el activo mantendrá esta tendencia a lo largo de un mes y medio. Pero, ¿cómo se da cuenta de este cambio a futuro?

Pues bien, para ello vamos a aproximar por medio de una función que nos ayude a calcular el momento en que ocurre el cambio de tendencia. Como hemos visto en la gráfica, el indicador se comporta de la misma forma, lo que supone que usaremos una función periódica. Tomaremos entonces la base de datos y promediaremos los coeficientes de asimetría calculados previamente que tengan valor inferior a cero. Lo mismo haremos con el coeficiente de asimetría que sean mayores que cero. Si denotamos al promedio de cada coeficiente como g_i , obtenemos lo siguiente:

$$g_i < 0 \approx 1,2403$$

$$g_i > 0 \approx 1,1125.$$

Promediando ambos valores, obtenemos que la amplitud

de la función que queremos estimar es de 1,1764.⁹ Además, ya sea que observemos la gráfica o con base en los datos recogidos, la periodicidad de esta función es de 47 días aproximadamente¹⁰, y por último, para encontrar más fácil la función, analizamos lo que pasa desde el día 53 (26 de mayo de 2020 - momento en el cual, el coeficiente pasa de ser negativo a ser positivo).

Como la periodicidad de la función seno es de 2π el coeficiente de la variable de la función buscada es de:

$$47 = \frac{2\pi}{k}, k \neq 0$$

$$k = \frac{2\pi}{47}$$

$$k \approx 0,1337.$$

además, como nuestro dato base comprende lo sucedido a partir del día 53, entonces el desfase de la función vendrá dado por α :

$$\frac{\alpha}{k} = 53$$

$$\alpha = 53 * 0,1337$$

$$\alpha \approx 7,0853.$$

Tenemos que la función seno buscada es:

$$f(x) = 1,1764 \sin(0,1337x - 7,0853). \quad (12)$$

Con esta función, podemos tomar cualquier día y estimar su tendencia; sin embargo, aún no contestamos la pregunta hecha de saber en qué momento exacto nos damos cuenta de un cambio de tendencia. Pues bien, gracias a la derivada de esta función, podemos encontrar el punto máximo y el punto mínimo. Dado que la derivada de la ecuación (12) es:

$$f'(x) = 0,1573 \cos(0,1337x - 7,0853). \quad (13)$$

Lo anterior se ve gráficamente de la siguiente manera: si hacemos la ecuación (13) igual a cero, tenemos el máximo y el mínimo que representan los cambios de tendencia. Como ejemplo, tomamos la expresión $0,1337x - 7,0853 = \frac{\pi}{2}$, (dado que la función coseno es nula en $\frac{\pi}{2}$), despejando x se obtiene $x \approx 65$. Es decir, que a partir del día 13 (aproximadamente), se da el primer cambio de tendencia de los precios de la acción de Grupo Aval. En general, se tiene que $0,1337x - 7,0853 = \frac{k\pi}{2}$ son los cambios de tendencia para cualquier k natural, donde k es impar. Ahora bien, si a la anterior igualdad la llamamos Δ , y calculamos la segunda derivada de (12)

$$f''(x) = -0,021 \sin(0,1337x - 7,0853) \quad (14)$$

encontramos que si la ecuación (14) evaluada en Δ es negativa, entonces allí habrá un cambio a tendencia bajista, mientras que si la ecuación (14) evaluada en Δ es positiva, entonces

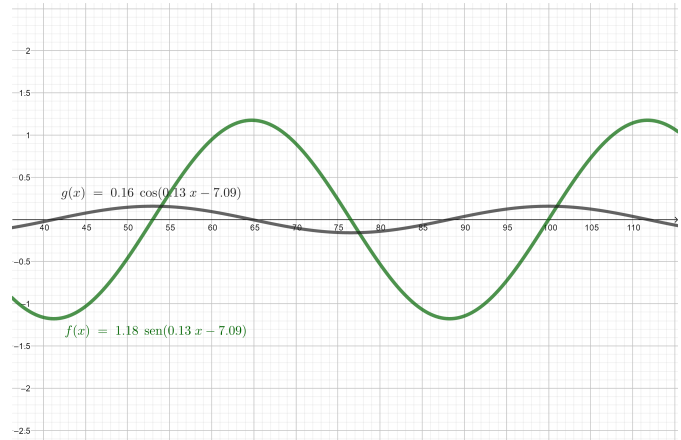


Figura 18: Función tendencia y su derivada.

allí habrá un cambio a tendencia alcista, pues allí estarán los máximos y mínimos respectivamente de la ecuación (12).

8. Conclusión

Con frecuencia, el uso de indicadores para el análisis técnico se hace de manera empírica [Par99] desaprovechando métodos recursivos a partir de teoría básica estadística, que entre otras cosas, en este artículo se vio que proporciona una ayuda indiscutible para describir tendencias y para una acción en particular, su predicción. Además, en virtud del acelerado crecimiento del mercado bursátil en Sudamérica de la última década [Sch15], se propuso un indicador que proporciona una herramienta alternativa para la inversión e incentiva al uso de indicadores con mayor rigor, pues a partir de este, se pudo encontrar una función que describe las curiosas ondas del gráfico de asimetría móvil. Finalmente, si se pudo realizar una descripción *grosso modo* de las tendencias de un activo bursátil sin haber complicado este escrito con deducciones rigurosas o con el uso de matemática compleja, entonces se puede dar una idea de la cantidad de herramientas que se pueden crear o teoría que puede surgir.

Agradecimientos.

Al profesor del semillero de investigación en matemática financiera y editor de esta revista John Alexander Arredondo, por su disposición y sus valiosos comentarios en cada revisión para hacer posible esta publicación.

Referencias.

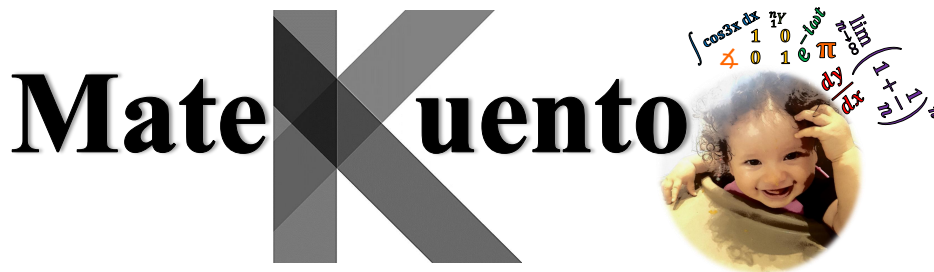
- [Bet08] Juan Betancur, *Herramienta de gestión de cartera financiera que permita identificar niveles de compra o venta en operaciones intraday adecuados para USD COP en el mercado bursátil colombiano*, Pontificia Universidad Javeriana, 2008.
- [Sev13] Andrés Sevilla, *Burbuja de las punto-com*, Economipedia, 2013.

⁹La razón por la que se promedian los valores es porque debemos mantener como eje de simetría al cero, porque de lo contrario no podemos hacer uso del coeficiente de asimetría explicado previamente.

¹⁰La intención es dar una aproximación más no una predicción exacta de la tendencia

- [Git18] Kim Gittleson, *Lehman Brothers: las 5 cinco consecuencias más sorprendentes de la crisis que desató la quiebra del banco en 2008*, BBC (2018).
- [Rod19] Juan Rodríguez, *¿Qué es el mercado secundario?*, Rankia, 2019.
- [Rui04] M Ruiza and Fernández T and Tamaro E., *Biografía de Herbert Henry Dow*, Biografías y vidas, 2004.
- [Tas19] Nige Tassell, *El Crack del 29: cómo ocurrió la peor crisis en la historia de Wall Street hace 90 años*, BBC (2019).
- [Anó13] Anónimo, *¿Cómo se originó la peor crisis financiera de la historia?*, Gestión Economía, 2013.
- [Gui20] Pablo Guimon, *Los mercados entran en pánico por la guerra del petróleo y el coronavirus.*, El País (2020).
- [Dur16] Cecilia Durán, *Einstein tenía razón sobre cómo resolver un problema*, Forbes (2016). Famosa frase realizada por Albert Einstein en entrevista en el año 1940.
- [Bro20] Andrea Broseta, *¿Cómo funciona la Bolsa de Valores de Nueva York (NYSE)?*, Rankia, 2020.
- [Anó18] Anónimo, *Los Seis Principios Básicos De La Teoría De Dow*, Comprar acciones de bolsa, 2018.
- [Lóp18] José López, *Teoría de Dow*, Economipedia, 2018.
- [Kil19] Anzél Killian, *Los 10 mejores indicadores de trading para inversores.*, IG Group, 2019.
- [Mar17] Francisco Marco, *Curtosis*, Economipedia, 2017.
- [Vás20] Roberto Vásquez, *Sucesión de Fibonacci*, Economipedia, 2020.
- [IG] IG Group, *¿Qué es una media móvil?*. Escrito del año 2019 no formalmente publicado.
- [Cai] Caixabank, *La volatilidad en los mercados*. Escrito del año 2019 publicado por la institución bancaria.
- [Pui20a] Xavier Puig, *Beta de una acción*, elEconomista, 2020.
- [Pui20b] ———, *Volatilidad*, elEconomista, 2020.
- [Ovi13] Teresa Oviedo, *Significado de la Asimetría estadística en los alumnos de economía de la UNAC*, Pontificia Universidad Católica del Perú, 2013.
- [Tej18] Javier Tejedor, *La importancia del volumen al invertir en acciones*, SelfBank by Singular Bank, 2018.
- [Par99] Rigoberto Parada, *La Teoría financiera y el análisis técnico*, Revista Universidad EAFIT (1999).
- [Sch15] Elvira Schamann, *Evolución de los mercados bursátiles iberoamericanos en la última década.*, Secretaria General de la Federación Iberoamericana de Bolsas (FIAB), 2015.

Acerca del autor: Daniel Esteban Galvis es estudiante de segundo semestre de matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Le gusta pasar el tiempo escuchando ska, reggae o leyendo libros relacionados con temas de inteligencia artificial y vida extraterrestre, quiere estudiar Astrofísica y espera algún día aprender a tocar el piano.



Pensar lento, muy lento.

Sobre la demostración inductiva y deductiva de un postulado

Federico tiene varios problemas, uno de ellos: no aprendió a tragar entero.

Tragar entero es un atributo relevante en el mundo contemporáneo, es lo que se espera de una persona *adaptada*. La aceptación de los hechos tal como nos son narrados y, ante cualquier estímulo, la respuesta rápida, irreflexiva, automática, casi instintiva, es un valor altamente ponderado en los diferentes ámbitos de la sociedad actual.

Recitar: el himno nacional completo, el alfabeto griego, los versos de El Fausto, la tabla del 8 y las conjugaciones de muchos verbos regulares en inglés; estas y muchas otras proezas de la memoria eran posibles para Federico, pero aún así, el mecanismo del pensamiento instantáneo no gobernaba omnipresente sus decisiones, el pensamiento reflexivo o mal llamado lento, regentaba su comportamiento, su lenguaje, lo que es lo mismo que su mente.

El pensamiento lento es una extraña herramienta, muy inoportuna para contestar los buenos días, para la aritmética simple y/o para montar bicicleta -para lo cual el pensamiento automático o rápido funciona eficientemente-; de todas formas, Federico valoraba sobradamente su capacidad de reflexión, aun cuando las respuestas pausadas no le ayudaran a sobresalir como a las personas consideradas listas, a las que encontraba más prontas de boca y gestos que de mente.

Los doctos, capaces de la sorprendente habilidad de hablar más rápido que pensar, murmuraban acerca de Federico, de su expresión dubitativa, su falta de determinación para esgrimir máximas y verdades fundamentales a discreción, por lo que se le consideraba un tipo un poco tonto; Federico, quien se consideraba un íntegro tonto, no reparaba mucho en la opinión que de él se tenía.

Por alguna razón Federico no había podido superar la tara de asociar los conceptos a razonamientos deductivos, propios de la lógica o de las matemáticas, era un defecto con el que creció, y a pesar de las clases de retórica, no le había sido posible superar aquella limitación.

Federico nunca estuvo convencido de muchas cosas, entre otras, de los axiomas fundamentales de la economía, desde los más simples y comúnmente aceptados hasta los más complejos y controversiales. Notó que, aunque nadie entendía a profundidad lo que se hablara respecto a estos temas, todos, menos él, asentían con la cabeza: -un nivel de inflación es saludable-, -la deuda es la base del crecimiento económico-,

-la capitalización bursátil es el valor real de una empresa en el mercado-. . . . Cada sentencia como estas agobiaba el pensamiento profundo de Federico, quien siempre preguntaba: ¿por qué?, ¿por qué es natural que el dinero pierda capacidad adquisitiva? ¿por qué es bueno deber? ¿Por qué las variaciones especulativas de una acción en una bolsa específica deberían asignarle valor a una empresa real y con activos que generan riqueza? Los diferentes esfuerzos de los economistas por explicar dialécticamente los mismos principios le parecían un saludo a la bandera, desarticulados, no comprobables y aún lejanos de una aplicación práctica.

Para Federico las matemáticas no eran una ciencia plena, la abstracción absoluta le parecía semejante a un juego y entendía a la ciencia como el estudio de los hechos que acaecen, en un sentido material. Para él las matemáticas en sí eran apenas poco más que un martillo o cuanto mucho un acordeón, que aunque fuera definible independientemente de un uso -en su condición abstracta-, cobraba sentido únicamente en su referencia al mundo práctico y en asocio a un hecho específico; Federico no era un matemático, no, tal oficio para él era equiparable al de un Maestro del Ajedrez o al de un Curador de Arte; era un técnico, un técnico de propiedades y relaciones.

Federico consideraba que un problema capital para la humanidad era el combate de la inequidad, aun cuando la desigualdad era por él considerada una condición natural a cualquier sistema físico; la capacidad para que a cada uno pudiera dársele lo suyo -aunque no a todos les correspondiera lo mismo- le parecía la materialización de la justicia, un valor por él muy ponderado.

Federico realizó las siguientes consideraciones: tal como el calor procedente de una fuente se distribuye en el espacio a lo largo del tiempo, del mismo modo el desarrollo integral, proveniente del estado, debería difundirse a través de las distintas poblaciones.

La función de desarrollo integral o de equidad (E) debería ser multivaluada, entendiendo que dicha integralidad abarca aspectos sociales suficientemente cuantificables (por ejemplo, a través de indicadores sociales), tales como: el acceso a salud, la satisfacción de las necesidades alimentarias, las condiciones de seguridad y orden público, el nivel de consumo per cápita, el acceso a la justicia, el acceso a la educación, el ejercicio de la democracia, entre muchos otros.

Asumiendo el desarrollo económico como un fenómeno de

difusión, la tasa de cambio de la función de la equidad (E) con respecto al tiempo (t), es decir, la manera en que la función de equidad va cambiando a lo largo del tiempo, es directamente proporcional a la variación de la tasa de cambio de la función de la equidad (E) con respecto a los diferentes tipos de población (x) sobre la que se estudia el fenómeno, más las perturbaciones externas al sistema, las cuales poseen un comportamiento estocástico en función del tiempo $w(t)$.

Un primer esbozo del modelo podría ser:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = A \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + w(t).$$

Con A siendo una constante propia del medio de difusión, una característica de la permeabilidad de la población a las variables de la función de desarrollo (E).

Los razonamientos antes expuestos aun cuando tenían su germen en pensamientos que previamente rondaban de alguna forma la mente de Federico, fueron inspirados, principalmente, por un artículo titulado: *Aplicación de los Procesos de Difusión a la Planificación del Desarrollo Económico*, por Guillermo Gómez y Gerhard Tintner, publicado en el Boletín de Matemáticas de la Universidad de Viena del año 1977; las afirmaciones del modelo referido no eran equivalentes al planteamiento de Federico, pero si eran claramente comparables.

El resultado esperado para Federico era el de la determinación de la función multivariada $E(t)$ como un proceso estocástico cuyas trayectorias y sus distribuciones de probabilidad asociadas representan distintas realizaciones del comportamiento de la equidad en el conjunto de la población; a través de dicha función sería posible estimar los gradientes y de esta manera encontrar los parámetros con los que se optimizaría el logro del desarrollo económico integral en términos del tiempo y recursos necesarios para conseguirlo en cada población, permitiría también estimar el impacto (o sensibilidad) de cada factor en el logro de los objetivos de equidad.

Habiendo definido la ecuación diferencial parcial estocástica, se dispuso Federico a resolverla, lo que supuso un importante desafío que al final consiguió (lo que es sorprendente, ya que para la mayoría de estas ecuaciones, no se encuentra una solución analítica); posteriormente procedió a determinar condiciones iniciales y de frontera, simulando múltiples escenarios en los que evaluó la conveniencia de los diferentes parámetros para el logro del desarrollo económico integral y el aumento de la equidad en el sistema de poblaciones.

Algunas conclusiones eran de esperarse: el acceso a condiciones básicas de alimentación, salud, vivienda, seguridad y educación (entre otros) son determinantes para alcanzar sociedades más equitativas, no hubo aquí un descubrimiento que sorprendiera a Federico.

Un poco menos predecible era el hecho que, las sociedades en las que había un mayor incentivo al gasto en bienes prescindibles y de lujo, acceso al crédito de libre inversión y de consumo, y menor interdependencia del individuo en términos de sus relaciones sociales, se daban condiciones menos favorables para la equidad; justo en este momento y de manera paradójica, Federico recibió un texto de publicidad en la

que le ofrecían un móvil de última tecnología con pagos en cuotas mediante el uso de un servicio bancario; ignorando el contenido del mensaje se preguntó ¿cómo obtuvieron mis datos de contacto? ¿es casual que la pasarela de ventas en asocio con el banco en el que tengo mi cuenta de ahorros, me ofrezcan un teléfono, justo unos días después de que el mío viene presentando problemas?

Volviendo a los modelos derivados de su ecuación, Federico notó que las conclusiones no parecían ser en extremo sorprendentes, entonces ¿por qué las sociedades son tan inequitativas?

Federico conjeturó que una explicación plausible del fenómeno surgía de analizar un conjunto de escenarios con valores iniciales de alta concentración de poder, en ellos los recursos aumentan progresivamente su grado de concentración, lo que puede determinarse al encontrar un gradiente negativo predominante de la función de desarrollo económico integral, en dichos escenarios los parámetros que causaban condiciones menos favorables para la equidad y sus efectos combinados poseían mayor impacto, y la independencia de los órganos de gobiernos se encontraba en grave riesgo.

Pensó Federico que las condiciones iniciales de alta concentración de poder y recursos eran entonces la principal causa de que algunos escenarios no presentaran un ambiente favorable para el desarrollo económico equitativo, lo que coincidía con las conclusiones de su lectura de hacía un par de meses de *El Capital en el Siglo XXI* del matemático francés Thomas Picketty; en la misma obra se propone como solución gravar con impuestos las grandes acumulaciones de capital, lo que propiciaría en el largo plazo condiciones más favorables para el equilibrio económico social; de manera que Federico preparó un escenario con tales condiciones y se sorprendió al encontrar que todas las soluciones que llevaban a un rápido equilibrio económico y social guardaban una estrecha relación con altos valores en el ejercicio de la democracia, por parte de una ciudadanía políticamente responsable.

Luego de una breve meditación, Federico abandonó su ecuación, lo hizo con tristeza y decepción, -es inútil- susurró, mientras organizaba el escritorio y arrugaba las hojas que contenían sus notas para que ocuparan menos espacio en la papelería al desecharlas. Sus razones, como él, simples y directas.

Si las conclusiones obtenidas de la ecuación no son ciertas, de nada vale la misma; ahora bien, si lo son: se hace necesaria como una precondition para el desarrollo económico equitativo, la formación de individuos educados y críticos, que de manera comprometida ejerzan su papel en la democracia, de nada serviría conocer los hechos develados por la ecuación si no se da la citada condición.

Una nueva sociedad significativamente más equitativa no emergerá como un milagro o como un descubrimiento, un estado más justo viene a ser la consecuencia de una sociedad informada, culta y participativa, la demostración de la veracidad de la ecuación no está en el papel ni en manos de alguien, está en las acciones concretas y en las manos de todos, se dijo Federico.

Dayron Fabián Achury-Calderón

dayronf.achuryc@konradlorenz.edu.co

Acerca del autor: Fabián Achury-Calderón es ingeniero de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y matemático de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Se ha interesado por estudiar la interacción de las matemáticas con otras ciencias. Es Auxiliar de la Justicia y de manera indepen-

diente asesora compañías en asuntos financieros y de dirección estratégica. Le apasionan la ópera, el ballet y las ciencias sociales. Sus pasatiempos favoritos son la lectura y la colección de registros de radio internacional. Disfruta recorrer museos cuando viaja y admite que se conmueve con facilidad. Algún día espera aprender a tocar piano.

K, Problema

Es frase de cajón, pero los números primos son los átomos de nuestros números, los más simples, esos que todo mundo usa a diario, los naturales, también llamados enteros positivos. Y como no podría ser de otra manera, los problemas fundamentales de la teoría de números, la rama de las matemáticas que estudia a los números naturales y sus propiedades, están relacionados con los números primos, de hecho, la hipótesis de Riemann [BSCBRAW08], el problema abierto más famoso de las matemáticas, está relacionado con los números primos. También es frase de cajón, pero desde tiempos de los griegos, se estudian a los números primos y sus propiedades, tanto, que sabían como encontrarlos.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

Figura 1: Los griegos nos enseñaron el proceso de encontrar números primos mediante el uso de una criba.

De hecho, sabían cuantos hay, Euclides demostró lo siguiente:

Teorema 0.1. Hay un número infinito de números primos.

Siguiendo con las frases de cajón, la secuencia de números naturales más famosa, de lejos, muy de lejos, está dada por los números

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots, \quad (1)$$

y se conoce como la *secuencia de Fibonacci* y sus términos *números de Fibonacci*. Este es un caso particular de una relación de recurrencia, esto es, detrás de la secuencia de números

se tiene una ecuación que define recursivamente sus valores, una vez que se dan uno o más términos iniciales, cada término adicional de la secuencia se da en función de los términos anteriores. Por ejemplo, si consideramos

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad (2)$$

al dar dos números naturales iniciales n , se puede obtener un número infinito de secuencias. En particular, si consideramos $u_1 = 1$ y $u_2 = 1$, entonces tenemos la famosa a secuencia de Fibonacci ¹, la cuál ha sido ampliamente estudiada desde 1202, año en que aparece en el libro de aritmética *Liber Abaci de Leonardo Pisano* [Hog72]. Por su peculiar importancia, se suele denotar por F_n la secuencia de Fibonacci y sus elementos, y es un hecho bastante conocido que un número natural, es un número de Fibonacci, si satisface la ecuación de Binet [Alv17]

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \quad (3)$$

Aunque vale la pena mencionar que una ecuación similar se puede obtener para cualquier otra sucesión dada por una relación de recurrencia, la secuencia de Fibonacci, es la única que satisface el siguiente resultado

Teorema 0.2. El límite de la razón entre el n -ésimo término en la secuencia de Fibonacci y el término inmediatamente anterior, tiende al número áureo [Alv17]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \quad (4)$$

Que la secuencia de Fibonacci este relacionada con una de las cantidades más conocidas e intrigantes de la matemática, en conjunto con los cientos de aplicaciones en un sinnúmero de lugares diferentes, y que después de ochocientos años de estar sometida al escrutinio de matemáticos e interesados varios, todavía existan muchas preguntas abiertas al respecto, nos da una idea de la trascendencia de esta serie, de hecho, existe una asociación de Fibonacci y una revista dedicada únicamente a publicar resultados relacionados con esta secuencia, *The Fibonacci Quartely*.

¿Pero qué tienen en común los números primos y la secuencia de Fibonacci?, si comparamos los números en la Figura 1 y los que aparecen en la ecuación (1) observaremos que hay algunas similitudes 2, 3, 5, 13, ... ¿Y si seguimos comparándolos, encontraremos más números comunes?

¹En su definición original, Fibonacci comenzó la secuencia con 1, pero hoy en día se inicia en cero sin que se tenga ninguna alteración en sus propiedades.

Para responder a la pregunta anterior, primero lo primero, la siguiente definición es de cajón, pero se requiere.

Definición 0.1. Diremos que un número es **primo de Fibonacci**, si es un número de Fibonacci que es primo.

Además, debemos tener en cuenta que a pesar del teorema 0.1 encontrar números primos es un problemón, de hecho el número primo más grande conocido hasta hoy es

$$2^{82,589,933} - 1.$$

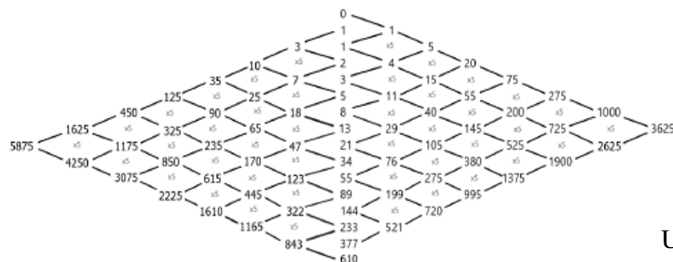
Encontrado por Patrick Laroche, miembro de GIMPS, abreviación de Great Internet Mersenne Prime Search [GIM13]. Un número bastante grande, para escribirlo se ocupan 24,862,048 dígitos. Por otro lado, el número primo de Fibonacci más grande conocido y aceptado ² es

$$F_{3,340,367}.$$

Comparado con el primo más grande, este número solo tiene 21,925 dígitos, así que tenemos muchísimos números primos candidatos a ser primos de Fibonacci, momento, ¿de cuantos números primos de Fibonacci estamos hablando?

Problema abierto 0.1. Para el conjunto de números primos de Fibonacci, su finitud es desconocida.

Veán qué problema, después de ochocientos años largos de análisis teórico y computacional, la secuencia de Fibonacci se resiste a revelarnos todos sus secretos.



Espero que a este punto, más allá de lo curioso y atractivo de la aparición de esta “tabla de multiplicar” del número 5 en la secuencia de Fibonacci, usted se esté preguntando,

¿pero solo pasa con el 5?

Y si suma términos de Fibonacci de otra manera, ¿obtendrá otras “tablas de multiplicar”? Tengo las respuestas a estas preguntas, pero esta curiosidad matemática en la secuencia de números más famosa es tan hermosa, que vale la pena que usted mismo la descubra. Solo le contaré, estimado lector, que todas las otras “tablas de multiplicar”, o más bien, tablas de múltiplos dentro de la secuencia de Fibonacci, las he encontrado para números primos únicamente, esto es, se puede dar a la tarea de encontrar y hacer una prueba similar a la que he ilustrado para ${}_2F, {}_3F, {}_7F, \dots$

¿Para cuántos números primos se pueden encontrar este tipo de “tablas de multiplicar”? ¿Existe algún tipo de patrón entre los números primos que cumplen con estas condiciones? ¿Para números compuestos se pueden encontrar este tipo de “tablas de multiplicar”? ¿Son este tipo de maravillas de alguna utilidad para determinar la finitud o infinitud de los números primos en la secuencia de Fibonacci? Primos y Fibonacci, qué problema...

Referencias.

- [BSCBRAW08] Peter Borwein, Stephen Choi, Brendan Rooney, and Andrea Weirathmueller, *The Riemann hypothesis: a resource for the aficionado and virtuoso alike*, Canadian Math Soc., 2008.
- [Hog72] Verner E. Hoggatt Jr. (ed.), *A primer for the Fibonacci numbers*, The Fibonacci Association, San Jose State University, San Jose, Calif., 1972.
- [GIM13] GIMPS., *Mersenne Research*, Bulletin of the AMS **50** (2013), no. 7, 527-628.
- [Alv17] Francisco Regis Vieira Alves, *De Moivre's formula, or Binet or Lamé's formula: proofs and generalities about the generalized Fibonacci sequence (GFS)*, Rev. Bras. Hist. Mat. **17** (2017), no. 33, 1-16 (Portuguese, with English and Portuguese summaries).

John A. Arredondo
alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co

Política Editorial

El Paskín Matemático es una producción del Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Está abierto a todos y todas. Si tienes interés en escribir un artículo con cualquier tipo de contenido matemático, reseñar a un personaje, comentar un problema o tienes comentarios sobre nuestra publicación, envía un mensaje a paskin@konradlorenz.edu.co

$$\sum_{k=1}^n \cos \theta_k = -\frac{1}{2}$$

El Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz fue creado en 1998. Conoce más acerca de nuestro programa en nuestra página institucional

<http://www.konradlorenz.edu.co/es/aspirantes/carreras-universitarias/carrera-de-matematicas/presentacion.html>

Bogotá, Colombia. 2021

PASKÍN MATEMÁTICO

Volumen 3, No. 2, 2021

Contenido

- Ruben A. Hidalgo
Dibujos de niños y el grupo absoluto de Galois1
- Dennis Gabriela Coy Calderón
Pixelando la topología16
- Daniel Esteban Galvis Sandoval
Uso de medias móviles para el estudio de tendencias en el mercado
bursátil.....24
- Dayron Fabián Achury-Calderón
MateKuento.....36
- John A. Arredondo
K'Problema39

¿Por que los números son hermosos? Es como preguntar por qué la novena sinfonía de Beethoven es hermosa. Si no ves por qué lo es, nadie puede decírtelo. Yo sé que los números son hermosos. Si ellos no lo son, nada lo es.

Paul Erdős

**KONRAD
LORENZ**
FUNDACIÓN UNIVERSITARIA