



$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

$$y^3$$

$$\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\tan \alpha}$$

$$\sqrt{x^2 - x} - x^2$$

$$n! = \prod_{k=1}^n k$$

??
??

e-ISSN
2665-2471

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot [\text{Adj}(A)]^t$$

$$\frac{x_A + x_C}{2}$$

$$m \cdot S/2$$

$$(x) = \frac{d}{3}$$

$$f(x) \sim \frac{\alpha \pi}{2}$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2} - (n-1)x}{1-(n-1)2x^2}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$(x) = d$$

$$\sum_{n=1}$$

$$\sqrt[3]{a^4}$$

$$m=S$$

$$V + E + F = 2$$

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

$$\sin \frac{3}{4}$$

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

PAS X IN MATEMÁTICO

 **KONRAD LORENZ**
FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

Vol. 2

No. 2

PASKÍN MATEMÁTICO

<https://editorial.konradlorenz.edu.co/paskin-matematico.html>

e-mail: paskin@konradlorenz.edu.co

EDITORES

John A. Arredondo

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co

Carlos Alberto Díez

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
carlosa.diez@konradlorenz.edu.co

Esta publicación puede ser difundida y reproducida con fines académicos y científicos por todos aquellos que tengan a bien hacer un correcto uso de su contenido.

ISSN 2665-2471

Fundación Universitaria Konrad Lorenz: Tel: (+57 1) 347 23 11, Carrera 9 Bis No. 62 – 43 Bogotá – Colombia, eMail: info@konradlorenz.edu.
Carácter académico: Institución Universitaria. Personería Jurídica por Resolución 18537 del 4 de noviembre de 1981 del Ministerio de Educación Nacional. Institución de Educación Superior sujeta a inspección y vigilancia por el Ministerio de Educación Nacional (Art. 2.5.3.2.10.2, Decreto 1075 de 2015).

LAS MATEMÁTICAS EMANAN DE LA NATURALEZA

Jesús R. Muciño Raymundo *
muciray@matmor.unam.mx

1. Un fenómeno cultural.

Imaginemos una pieza de pan, la más sencilla que sea de nuestro gusto. En ella tenemos tierra, sol, agua, trigo, levaduras, el calor del horno ... En la pieza de pan ya elaborada, esos elementos son muy difíciles de distinguir para quien no sea un panadero experimentado.

La elaboración del pan y de los alimentos en general, es un fenómeno cultural. Con esto buscamos expresar que a través de muchos siglos diversas mentes inteligentes, prácticas, han contribuido a sus técnicas de elaboración, haciéndolas evolucionar. Cuando imaginamos un pan o un pastel sofisticado, es claro que su elaboración escapa del alcance de un neófito.

La analogía es completa. Las matemáticas son un fenómeno cultural. A través de muchos siglos, diversas mentes inteligentes, prácticas, han contribuido a elaborarlas, haciéndolas evolucionar.

Una de las fuentes de las matemáticas está en la naturaleza, ¿verdaderamente es así? Cuando leemos un libro de matemáticas “puras”, estamos ante un producto sofisticado.

2. Tierra–Sol el círculo maestro.

Nuestro objeto matemático de partida es

360.

Inmediatamente, eso suena como los grados de una circunferencia. ¿A quién se le ocurriría eso? Nuestro punto de salida en la naturaleza son las siguientes preguntas.

¿Cuál es la duración de un año?,
¿por qué esa cantidad es interesante?

Para todos nosotros la respuesta a la primera pregunta es 365 días o algo similar. Concerniente a la segunda pregunta, parece que su interés es meteorológico o administrativo. Retrocediendo en el tiempo, para las culturas antiguas los ciclos del clima, en particular las lluvias, eran esenciales, pues ello determinaba el tiempo de siembra y cosecha. Por ejemplo, en Egipto el año lo marcaba la crecida del Nilo, en la India el ciclo anual lo marcaba la llegada del monzón. En Barranquilla, Colombia, la época de lluvias más intensas es octubre. Hace 2000 años el clima presentaba una periodicidad casi cronométrica cada año.

¿Averiguar cuánto dura un año es un problema de las matemáticas?

Veamos que sí lo es. Consideramos un objeto fijo que produzca una sombra nítida a medio día, por ejemplo un edificio, un poste o un árbol nos sirven. Llamamos a este objeto el gnomon. La idea es señalar la sombra que proyecta el gnomon a medio día a lo largo de 400 ó 500 días, es decir tendremos 400 ó 500 mediciones de su sombra, ver Figura 1.a. El número de días que transcurre entre las dos sombras más alargadas es la duración en días del año. El resultado será 365 ó 366 días.

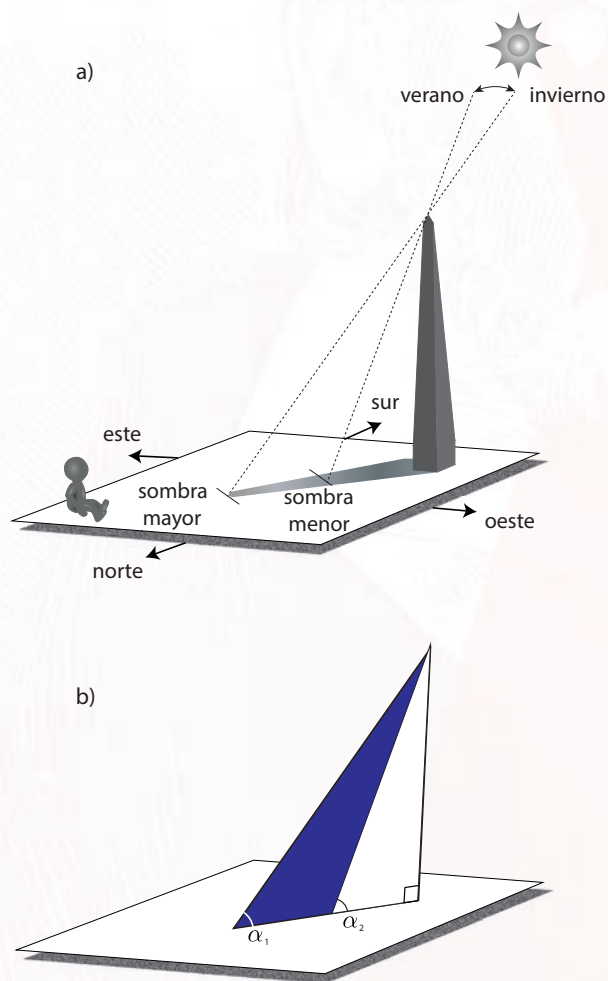


Figura 1: a) Calculando la duración de un año mediante la observación de sombras, desde un lugar en el hemisferio norte de la Tierra. b) Dos triángulos que aparecen en la observación.

*Centro de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, Morelia, México.

Usando métodos actuales de medición, sabemos que el año tiene una duración aproximada de

365 días, 5 horas, 48 minutos, 45.25 segundos, ...

o

365.242190402... días.

¿Por qué hay dos respuestas? ¡Ah!, es que era un problema de matemáticas; la primera respuesta usa el sistema numérico sexagesimal y la segunda el sistema decimal.

Todas las civilizaciones de la antigüedad reconocieron 365 ó 366 días como la duración del año. Como 365 es un número "incómodo" de manejar, por ejemplo no tiene mitad en números enteros. Los mayas y aztecas consideraban 360 días propicios y 5 días de mala suerte. Naturalmente los 360 grados que mide un círculo son un redondeo numérico de 365, haciéndolo más cómodo. En la cultura griega, Hiparco de Nicea (siglo II a.C.) graduó el Zodíaco o la órbita de la Tierra de 0° a 360° . Él estableció el punto vernal de la órbita de la Tierra 0° en el equinoccio de primavera del hemisferio norte.

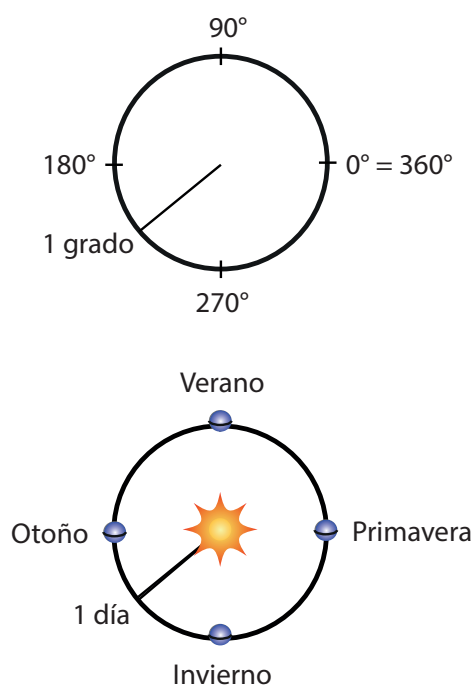


Figura 2: Un grado de la circunferencia es equivalente al arco en que se desplaza la Tierra durante 24 horas en su órbita alrededor del Sol.

Con ello podemos escribir que:

$$\begin{aligned} 1 \text{ grado} &= 1 \text{ día} \\ 90 \text{ grados} &= 1 \text{ estación} \\ 360 \text{ grados} &= 1 \text{ año,} \end{aligned}$$

donde por "día" entendemos el arco que recorre la Tierra sobre su órbita alrededor del Sol en 24 horas, ver Figura 2. Otro

aspecto fascinante de la cifra 365.242190402... es que nos dice que la Tierra describe en un año los 365 días con la adición del decimal 242190402... Esto es, la Tierra no gira alrededor del Sol días (o números) enteros. Para describirlo se requiere un decimal (¿racional o irracional?) extremadamente difícil de calcular y/o estimar observacionalmente.

Ahora recordemos que la órbita de la Tierra no es circular; es una elipse con el Sol en uno de sus focos. Afortunadamente dicha elipse tiene una excentricidad cercana a cero. Por ello, aproximarla por un círculo es adecuado.

Ese no es el caso para otros planetas. En la Figura 3 hemos dibujado cuatro órbitas elípticas, cambiando su escala al hacer sus ejes mayores iguales a cierta unidad. Ello ilustra como varía la excentricidad y la forma de dichas órbitas.

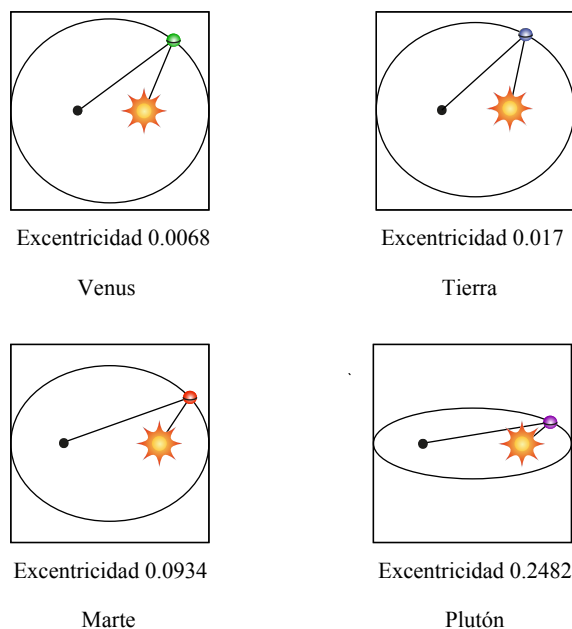


Figura 3: La órbita de la Tierra alrededor del Sol puede aproximarse por un círculo. La bondad de ese tipo de aproximación depende de la excentricidad de la órbita del planeta.

3. El coseno y el seno.

El método de paralaje descrito en la Figura 1.b, nos lleva a estudiar triángulos con detalle. ¿Será suficiente con estudiar los dos triángulos en dicha figura? Una magia de matemáticas ocurre; en cierto sentido, es más fácil mirar/estudiar todos los triángulos que uno solo, ello nos lleva al:

Lema 3.1. Existe una correspondencia biyectiva entre los siguientes conjuntos

$$\{ \text{ángulos } 0 \leq \alpha \leq 90^\circ \},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{puntos del arco de círculo} \\ \text{con radio 1} \\ \text{de } 0^\circ \text{ a } 90^\circ \end{array} \right\}$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{triángulos rectángulos,} \\ \text{orientados, de hipotenusa 1} \end{array} \right\}.$$

Esto es, cada punto en ese arco de círculo determina un triángulo rectángulo, orientado, de hipotenusa 1. Viceversa, a cada triángulo rectángulo, orientado, de hipotenusa 1 le corresponde exactamente un punto en ese arco de círculo, y por ello un ángulo.

Para entender cabalmente esta correspondencia, recurrimos a las funciones seno y coseno

$$\begin{aligned} \cos : [0^\circ, 90^\circ] &\longrightarrow [0, 1] \\ \alpha &\longmapsto \cos(\alpha), \\ \text{sen} : [0^\circ, 90^\circ] &\longrightarrow [0, 1] \\ \alpha &\longmapsto \text{sen}(\alpha). \end{aligned}$$

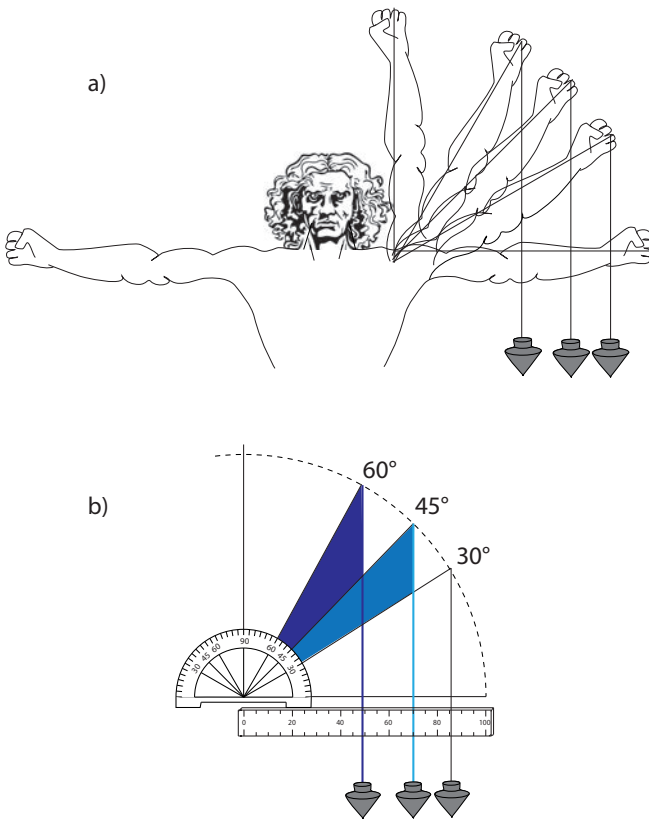


Figura 4: a) Al mover el brazo, la plomada va describiendo los valores del coseno. b) Es posible realizar una estimación del valor de $\cos(\alpha)$ si agregamos al mecanismo un transportador para medir α y una regla con escala para determinar $\cos(\alpha)$.

Un experimento interesante es calcular el coseno de un ángulo concreto provistos de un transportador y una regla de

longitud un metro, digamos $\cos(73^\circ)$, ver Figura 4. (En ella usamos una caricatura de un dibujo famoso de Leonardo da Vinci.) ¿Cuántas cifras decimales de $\cos(73^\circ)$ podemos calcular sin error? ¿Qué ocurre si comparamos nuestro resultado experimental, con el resultado que nos provee una computadora? El video [MR20], minutos 10–23, muestra el experimento.

Una computadora provista del programa adecuado puede calcular fácilmente 30 cifras decimales de $\cos(\alpha)$; ¿cómo lograron ésto los matemáticos? Bueno, ya aceptamos que las matemáticas son sofisticadas.

Prueba del Lema. La correspondencia es

$$\begin{array}{ccc} & & (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha)) \\ & \nearrow & \updownarrow \\ \alpha & & \{ (0,0), (1,0), (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha)) \}. \\ & \searrow & \end{array}$$

□

4. El coseno y el seno como movimientos periódicos.

Imaginemos la naturaleza en este caso, como un móvil describiendo la trayectoria del arco de círculo $[0, 90^\circ]$.

¡Si!, basta imaginar un móvil o un insecto que camina sobre el arco de círculo con velocidad de norma 1: al caminar por el punto α del círculo y proyectarlo a los ejes cartesianos x e y da lugar a las funciones coseno y seno de α . ¿Qué sucede si en lugar de detener α en el borde del arco de círculo (punto $\alpha = 90^\circ$), continuamos mas allá sobre el círculo completo? Traducido a las matemáticas, ello nos proporciona la trayectoria

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2 \\ \alpha &\longmapsto (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha)). \end{aligned}$$

Donde α puede pensarse como el tiempo de recorrido y varía en todo $\mathbb{R}$.

Recordemos que el compás es un mecanismo que nos permite sin dificultad trazar el círculo completo.

¿Podemos imaginar un mecanismo que trace la gráfica de $\text{sen}(\alpha)$?

Es un problema de matemáticas, pero buscamos un “mecanismo”, en el sentido concreto y práctico del compás. Tal mecanismo existe, observemos la Figura 5.

El video “Sinegraph” en [ET09], tiene una bonita animación del mecanismo que mencionamos.

¿Podemos hallar en la naturaleza la gráfica de $\text{sen}(\alpha)$?

Definición 4.1. Una *función periódica* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que los valores de $f(x)$ y de $f(x + T)$ coinciden para un número $T > 0$. El número positivo más pequeño T con esa propiedad es el *periodo* de f .

Esto es

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \quad \text{con} \quad f(x) = f(x+T). \end{aligned}$$

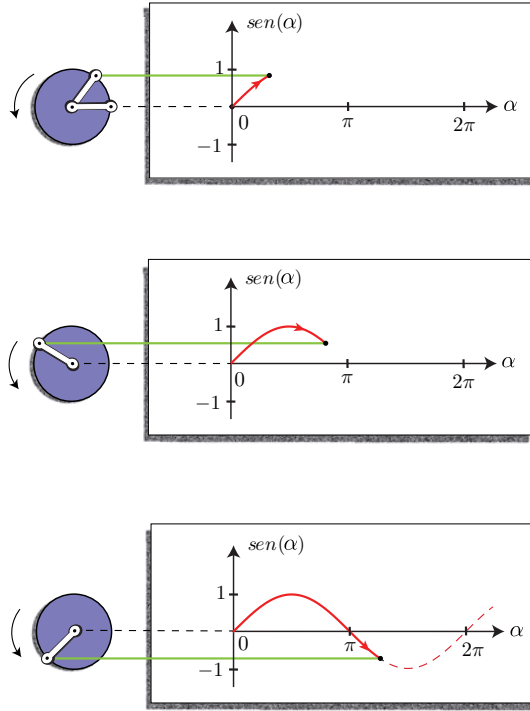


Figura 5: Al recorrer el punto α el círculo unitario, con velocidad unitaria, su altura respecto al eje y , va trazando la gráfica de $\text{sen}(\alpha)$.

Intuitivamente, decimos que el comportamiento de una función periódica se repite después de cada periodo de tiempo T . El prototipo de una función periódica es

$$\begin{aligned} f(\alpha): \mathbb{R} &\longrightarrow [-A, A] \subset \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto A \cos(c\alpha + \varphi) \end{aligned}$$

donde:

- $A > 0$ es el valor máximo de la función o amplitud de onda (la mitad de la oscilación de sus valores),
- $T = \frac{2\pi}{c}$ es el periodo de la función o longitud de onda,
- φ es la fase.

Desde un punto de vista práctico, las culturas prehispánicas de América crearon sellos cilíndricos, tal que al hacerlos rodar engendran dibujos periódicos; en la Figura 7.a, el primero de ellos tiene un diseño geométrico y el segundo un monito sentado.

Si en un cilindro trazamos una curva adecuada, al hacerlo rodar engendrará una función periódica, que sorprendentemente (matemáticamente) tendrá como dominio a todos los

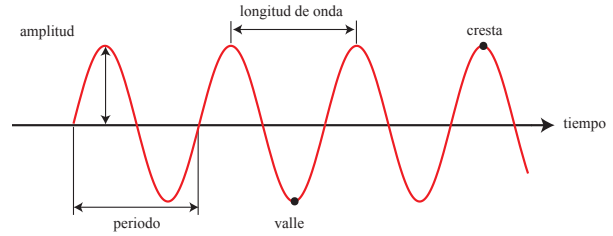


Figura 6: Gráfica de $f(\alpha) = A \cos(c\alpha + \varphi)$ con sus características geométricas; amplitud y periodo (longitud).

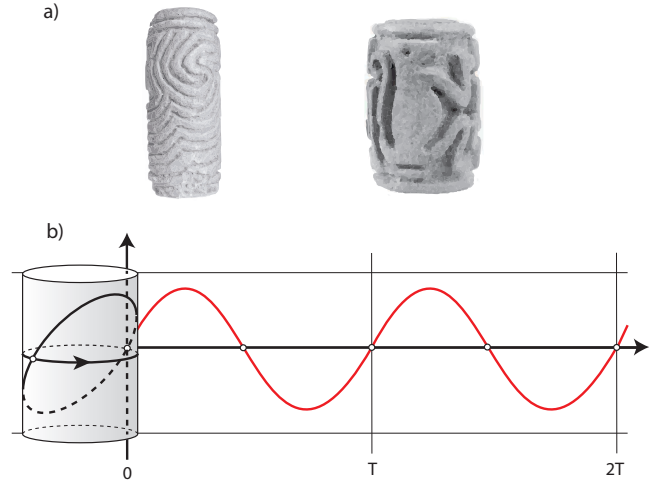


Figura 7: a) Dos sellos cilíndricos prehispánicos que al rodar dan lugar a diseños periódicos. b) Tambor cilíndrico que al rodar engendra una función periódica.

números reales $\mathbb{R}$, Figura 7.b. Todo lo anterior se resume en el resultado siguiente.

Lema 4.1. Existe una correspondencia biyectiva entre los conjuntos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{funciones continuas} \\ f_{\text{linea}}(x): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{con periodo } T > 0 \end{array} \right\}$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{funciones continuas} \\ f_{\text{circulo}}(\alpha): \{x^2 + y^2 - (\frac{T}{2\pi})^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{en el círculo de radio } T/2\pi \end{array} \right\}.$$

La “prueba geométrica” es la Figura 7.b. Si bien ello puede ser insuficiente para los lectores cuya intuición sea algebraica o analítica (en cuyo caso, queda la invitación a escribir “su” prueba).

Veamos algunos ejemplos.

En nuestro prototipo $A \cos(c\alpha + \varphi)$, el periodo y la amplitud parecen parámetros inocentes. Con sinceridad:

¿a quién le importa esas funciones y sus cantidades T, A ?

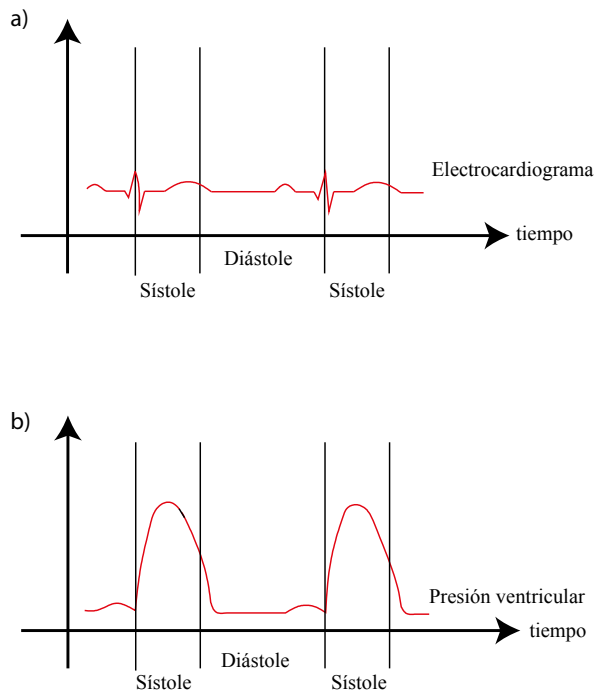


Figura 8: Dos funciones periódicas que reflejan la actividad del corazón humano.

En telecomunicaciones, televisión, teléfono internet, rayos X, tomografía médica, exploración petrolera; los ingenieros y físicos han logrado separar las ondas electromagnéticas que codifican todas las señales necesarias. La amplitud y periodo de dichas ondas, su diferenciación y manejo son indispensables hoy día. Recomendamos [PI09] particularmente Cap. 10 y [Jam15]; para una descripción desde la física o las matemáticas respectivamente, de estos temas.

La actividad del corazón humano es periódica respecto al tiempo. Dos parámetros interesantes son su actividad eléctrica y su presión sanguínea. Al graficarlas obtenemos la Figura 8; T y A son importantes. ¿Cuál es el valor de tu T ?

La órbita de la Tierra respecto al Sol y la inclinación de su eje de rotación tienen como consecuencia las estaciones en la Tierra. Claramente en un ecosistema, la variación en el número de las poblaciones vegetales o animales tiene periodicidad anual. Usando ecuaciones diferenciales ordinarias es posible obtener modelos para esos fenómenos periódicos, ver por ejemplo [HSD13] Cap. 11. A nivel cualitativo, si en un ecosistema la biomasa vegetal (hierba por simplicidad) alcanza un máximo anual en cierto mes. Entonces ese máximo condiciona la reproducción de los animales pequeños y de sus predadores. En la Figura 9 graficamos en un mismo plano tres funciones periódicas que bosquejan esta dependencia.

Podemos decir que, el oscilador maestro Sol-Tierra transmite su oscilación anual a las especies vegetales y animales (presas, predadores).

¿Cuáles son las expresiones matemáticas para las funciones

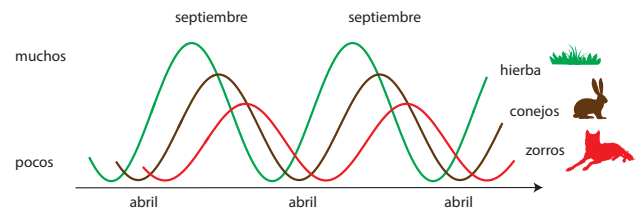


Figura 9: Periodicidad cualitativa anual de biomasa vegetal (hierba), presas y predadores; para un ecosistema tal que en julio la biomasa vegetal alcanza un valor máximo.

que aparecen en las Figuras 8 y 9? ¿Cómo escribir todas las funciones periódicas?

5. El resultado “universal” de Fourier.

Dicho sucintamente, un teorema de J.-B. Joseph Fourier (Francia, 1768–1830) nos dice que, todo fenómeno periódico

en el tiempo $\mathbb{R} = \{\alpha\}$

puede expresarse usando una suma convergente de las funciones

$$\text{sen}(k\alpha) \text{ y } \text{cos}(k\alpha), \text{ para } k \in \mathbb{N}.$$

Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, suponemos que el periodo es 2π . Dicho en lenguaje técnico tenemos el siguiente:

Teorema 5.1. *Toda función*

$$f(\alpha) : [-\pi, \pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

diferenciable de clase C^1 , puede expresarse como una serie

$$f(\alpha) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{sen}(k\alpha)$$

convergente (casi siempre infinita).

Nuestro enunciado es una versión simplificada del dado en [Tol62] pág. 19. ¿Por qué nos atrevemos a calificar de universal este teorema?, de hecho, no está referido así en la literatura matemática. Decimos que el teorema es universal, pues describe cualquier función, usando las funciones periódicas prototipo (que como ya hemos argumentado, están en muchos de los ámbitos que nos rodean).

Idea de la demostración. La idea que describimos no sabemos si coincide históricamente con la de Fourier. Pero es un bonito ejemplo de como se construyen pruebas en matemáticas para imaginar resultados nuevos.

Paso 1. Dada $f(\alpha)$ suponemos que la igualdad en el teorema se cumple y la serie que representa a f existe pero no la conocemos.

Paso 2. Usando el lenguaje del álgebra lineal, observamos que el conjunto (infinito)

$$\{\cos(k\alpha), \sin(k\alpha) \mid k = 1, 2, 3, \dots\}$$

es una base para un cierto espacio vectorial de “dimensión infinita” de funciones en $[-\pi, \pi]$. Esto es, ellas son linealmente independientes y sus combinaciones lineales generan un espacio de funciones. (Ahora sabemos que el concepto de base para espacios de dimensión infinita es delicado, e.g. consultar concepto de *base de Schauder*, [Kre78] § 2.3.)

Paso 3. Esa base satisface las siguientes reglas de “ortogonalidad respecto al producto punto”

$$\langle g(\alpha), h(\alpha) \rangle \doteq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

entre funciones.

Para k, ℓ enteros positivos, las reglas de ortogonalidad son

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\alpha)d\alpha = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\alpha)d\alpha = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(k\alpha)d\alpha = 1$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(k\alpha)d\alpha = 1$$

y si $k \neq \ell$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\alpha)\cos(\ell\alpha)d\alpha = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\alpha)\sin(\ell\alpha)d\alpha = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\alpha)\sin(\ell\alpha)d\alpha = 0.$$

Paso 4. Con esa idea en mente, dada f el problema es calcular los coeficientes c_0, a_k y b_k de la serie para f . La propuesta es

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)d\alpha$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos(k\alpha)d\alpha$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin(k\alpha)d\alpha.$$

Ello construye (descubre) la serie dicha en el enunciado del teorema.

Paso 5. Ahora, resta aclarar para qué funciones f la serie converge o no, usando que el dominio es cerrado y la diferenciabilidad. Pero es fácil hallar familias de funciones para las cuales su serie sí converge; usando sumas finitas tan grandes como se desee y/o las reglas de ortogonalidad (para ejemplos

más generales). Ello proporciona evidencia afirmativa para el resultado.

Los enunciados y los hechos detallados pueden leerse en [Tol62] Caps. 1–5, esa referencia usa solo técnicas elementales de cálculo y análisis. $\square$

¿Por qué llegó Fourier a ese resultado?, ¿cómo lo descubrió?

La motivación original de Fourier fue construir modelos matemáticos para el comportamiento o la transferencia del calor. El libro [Haw06] págs. 429–492 contiene la traducción (parcial) al castellano de su trabajo original [Fou22] “Teoría analítica del calor”; [GP17] pág. 21, describe las funciones para un problema de temperatura en un anillo. En [SS03] Cap. 1 hay una introducción elemental a las ideas de Fourier usando las ecuaciones diferenciales parciales de onda y del calor, los Caps. 2 y 3 contienen una descripción contemporánea del análisis matemático para las series de Fourier (y su convergencia). Hay muchas referencias con la biografía de Fourier, solo mencionamos [Haw06] págs. 421–427.

Como parte de la maduración del teorema, conviene observar el siguiente:

Corolario 5.1. Consideramos una función f continua y 2π periódica en $\mathbb{R}$. Su restricción

$$f : [-\pi, \pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

puede aproximarse tanto como se desee mediante una serie finita de Fourier, esto es, la diferencia

$$\left| f(\alpha) - \left(c_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\alpha) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\alpha) \right) \right| < \varepsilon$$

puede hacerse tan pequeña como se desee para toda $\alpha \in [-\pi, \pi]$ simultáneamente, tomando k suficientemente grande.

Ver [Tol62] pág. 115 para el resultado anterior. Naturalmente, el hecho de que la suma sea finita nos abre camino libre para aplicaciones prácticas y modelos matemáticos de la naturaleza. Ello nos proporciona la seguridad de que una computadora lleva a cabo los cálculos necesarios para tratar dichas series con certeza.

6. ¿Realmente son iguales?

Nuestro objetivo ha sido bosquejar la relación entre la naturaleza y las matemáticas. Metafóricamente, esa relación es similar a una enredadera sobre un árbol tropical. A veces la enredadera y el árbol se confunden, siguen caminos similares, su forma es parecida. Sin embargo, la enredadera y el árbol son esencialmente distintos.

Considerando funciones f que aparecen en finanzas y economía, ellas no siempre son diferenciables C^1 o incluso en muchos casos son discontinuas. Un acertijo general es:

¿En la naturaleza cuáles abundan más; las funciones continuas o las discontinuas?

Volviendo a las matemáticas, nos gustaría remover la hipótesis de diferenciabilidad para $f(\alpha)$ en el teorema de Fourier.

Sin embargo, la correspondencia biyectiva entre los conjuntos

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{funciones} \\ f(\alpha) : [-\pi, \pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

y

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{series} \\ c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\alpha) \\ \text{convergentes} \end{array} \right\}$$

requiere introducir conceptos sofisticados para las integrales empleadas en la prueba. Hubiese sido bonito enunciar aquí el resultado de Fourier como biyección, pero ello requiere hipótesis más finas.

En particular, en 1922 Andrei N. Kolmogorov (Rusia, 1903–1987) halló ejemplos de funciones f (no C^1) tales que la serie diverge casi en todo punto de $[-\pi, \pi]$, ver [GP17] Cap 1.

Más aún, Lennart Axel A. Carleson (Suecia, 1928) probó en 1966, la convergencia de las series de Fourier suponiendo que las funciones f son L^2 , ver [Car06].

Dejamos a los lectores meditar la diferencia entre la naturaleza (realidad) y las matemáticas de los objetos que hemos presentado.

Para comparar las series de Fourier con la realidad, [Jam15] es útil, en particular el Prefacio págs. ix y x.

Para la comparación entre la naturaleza y diversas ciencias, recomendamos ver [dS18] y [Pen06] Caps. 1 y 34.

7. Algunos principios (de matemáticas) que son evidentes en cualquier profesión.

En toda profesión se necesita un aprendizaje profundo, detallado. En un oficio tan delicado como las matemáticas debemos ser cuidadosos. La elaboración del pan en particular, requiere de:

- procesos de **refinación**; el trigo molido y refinado se convierte en harina, que resulta muy distinta de lo original,
- procesos de **maduración**; la masa de harina reposa con la levadura.

Volvamos a lo nuestro. Para describir nuestros objetos matemáticos hemos preferido solo sugerir sus definiciones, relaciones o resultados. El llevar ideas rudimentarias a su forma precisa en el lenguaje de las matemáticas, es un proceso de refinación. En la gráfica de la Figura 10.a nos hemos mantenido a la izquierda.

Al ir avanzando en una profesión (en cualquiera de ellas) sucede que los detalles aumentan y el aprendizaje se hace difícil. Es entonces cuando el aprendizaje se hace serio, se hace verdadero, ver Figura 10.b. Ello ilustra metafóricamente un proceso de maduración en el trabajo matemático. Los Lemas

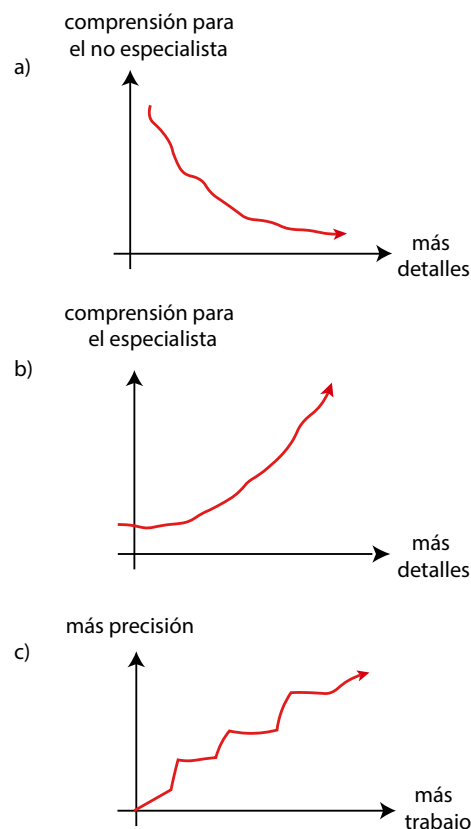


Figura 10: Tres principios en el trabajo matemático.

1, 2 y el Corolario 1 están enunciados de tal forma que sean ejemplos de maduración.

Finalmente, una consecuencia de que las matemáticas son un fenómeno cultural es, que para progresar verdaderamente en ellas debemos trabajar de forma disciplinada. A nuestro entender, la gráfica de trabajo vs. precisión (logros) es creciente pero no lineal. La Figura 10.c ilustra esto.

Basándose en su experiencia, los lectores seguramente podrán enunciar y enriquecer los tres principios bosquejados en la Figura 10.

Referencias.

- [Car06] L. Carleson, *Abel Prize*, Norwegian Academy of Science and Letters (2006), 1-3.
https://web.archive.org/web/20060411161033/http://www.abelprisen.no/nedlastning/2006/english_2006_press.pdf
- [ET09] Elica Team, *Sinegraph*, 2009.
https://www.youtube.com/watch?v=0WN6_k9D6A4
- [Fou22] J. Fourier, *Théorie Analytique de La Chaleur*, Chez Firmin Didot, Père et Fils, Paris, 1822.
- [GP17] M. García Piqueras, *Kolmogoróv La dualidad entre el caos y la determinación*, RBA, Barcelona, 2017.
- [Haw06] S. Hawking, *Dios creo los números*, Crítica, Barcelona, 2006.
- [HSD13] M. Hirsch, S. Smale, and R. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, Elsevier, Amsterdam, 2013.

- [Jam15] J. F. James, *A Student's Guide to Fourier Transforms, Third Ed.*, Cambridge, United Kingdom, 2015.
- [Kre78] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Willey, New York, 1978.
- [MR20] J. Muciño Raymundo, *Las matemáticas que emanan de la naturaleza*, 2020.
<https://www.facebook.com/unamccm/videos/2566724500212079/>
- [Pen06] R. Penrose, *El camino a la realidad*, Debate, Barcelona, 2006.
- [PI09] A. Pérez Izquierdo, *Nuestra vida en el campo electromagnético*, Almuzara, Córdoba, España, 2009.
- [dS18] M. de Sautoy, *Lo que no podemos saber*, Acantilado, Barcelona, 2018.
- [SS03] R. Shakarchi and E. M. Stein, *Fourier Analysis an Introduction*, Princeton, U. S. A., 2003.
- [Tol62] G. V. Tolstov, *Fourier Series*, Dover, New York, 1962.

Acerca del autor: Jesús R. Muciño Raymundo ha sido profesor de la Universidad Nacional Autónoma de México, en las ciudades de México y Morelia. Atesora amistad y contacto académico con profesores en Colombia. Su área de trabajo son los sistemas dinámicos y la geometría. Le maravilla como el álgebra y el análisis muchas veces proveen pruebas y explicaciones que él con geometría rudimentaria no ve. Su página es <http://matmor.unam.mx/~muciray>

RUBIK, EL PASATIEMPO DE UN ALGEBRISTA

Dennis Gabriela Coy Calderón*
dennisg.coyc@konradlorenz.edu.co

1. Resumen.

En este artículo se realizará un estudio sobre el cubo de Rubik, con el que se pretende mostrar que este rompecabezas posee una estructura algebraica que abarca diferentes tópicos en la teoría de grupos, tales como los grupos cíclicos, permutaciones, paridad, composición de funciones, entre otros. Además, se asociarán los conceptos abstractos de la teoría algebraica con ejemplos prácticos. Finalmente, se mostrarán las bases teóricas de algunos algoritmos utilizados para la solución del cubo.

2. Introducción.

En 1974, Ernő Rubik inventó el popular rompecabezas de combinación tridimensional, conocido como el Cubo de Rubik, que está compuesto por 8 cubos en las esquinas, 12 en los bordes y 6 en los centros. Estos últimos se asocian a las caras del cubo, ya que no se pueden cambiar de lugar. Cada cara parte desde una posición inicial o “resuelta” en la que sus centros, bordes y esquinas comparten un mismo color. Cada pieza puede intercambiarse por otra en el mismo cubo aplicando una serie de rotaciones a las caras.

En 1981, David Singmaster publicó las primeras notas de las que se tiene registro sobre El Cubo Mágico de Rubik, en donde se analiza en profundidad la estructura del cubo, los movimientos e introdujo un método sencillo para dar nomenclatura a las piezas, las caras y los movimientos del objeto. Gracias a esta notación logró configurar un método intuitivo, pero poco eficiente para resolver el cubo. En la actualidad se continúan estudiando teórica y empíricamente métodos para minimizar la cantidad de movimientos usados en la solución del cubo. En 2014 se descubrió que el mínimo número de movimientos necesarios para resolver el cubo en cualquier configuración es 20 [Rok14] por lo cual esta cantidad es conocida como el número de Dios. Para hallar este valor se aplicaron diferentes métodos numéricos de acotamiento y minimización computacional, por esto, el cubo de Rubik se popularizó como un objeto de estudio en diferentes ramas de la ciencia. En particular, las matemáticas han desarrollado diferentes tipos de análisis y definiciones que permiten relacionar el álgebra de objetos abstractos con el cubo, convirtiendo a éste en un ejemplo básico [Che04], sencillo y concreto de lo que es un grupo, una estructura matemática compuesta por un conjunto

y una operación binaria, proporcionando métodos interactivos de visualización de los grupos y sus propiedades.

A lo largo de este artículo veremos como el cubo de Rubik se ajusta y acomoda a definiciones y conceptos del álgebra clásica, matemáticas discretas, conteo y en particular a la teoría de grupos, con el fin de darle una estructura demostrativa, necesaria para introducir y probar dos de los teoremas más importantes de la teoría del cubo de Rubik. Para ello se introducirá la notación Singmaster y se trabajarán algunas definiciones básicas de teoría de grupos.

3. Notación en el cubo.

Para poder estudiar el cubo de Rubik de manera adecuada y clara, es necesario asociar una notación a cada movimiento que se le aplique al cubo y a cada pieza del mismo, por esta razón se utilizará la notación introducida por David Singmaster [Sin89]. Esta notación toma como principio describir de manera sencilla e intuitiva el movimiento del cubo de Rubik estándar de $3 \times 3 \times 3$ junto con una caracterización de los cubos dentro del mismo. Primero se asume que el cubo está posicionado en una superficie plana de referencia desde donde se le pueden asignar de forma sistemática nombres a cada una de las caras. En particular, para las seis caras del cubo se le asignan los siguientes nombres: Derecha (r), Izquierda (l), Superior (u), Inferior (i), Frente (f), Trasera (b). Por otro lado, los movimientos que se pueden efectuar con las caras del cubo tienen las siguientes convenciones:

- $R \rightarrow$ Girar cara derecha 90 grados en el sentido de las agujas del reloj.
- $L \rightarrow$ Girar cara izquierda 90 grados en el sentido de las agujas del reloj.
- $U \rightarrow$ Girar cara superior 90 grados en el sentido de las agujas del reloj.
- $D \rightarrow$ Girar cara inferior 90 grados en el sentido de las agujas del reloj.
- $F \rightarrow$ Girar cara frontal 90 grados en el sentido de las agujas del reloj.
- $B \rightarrow$ Girar cara trasera 90 grados en el sentido de las agujas del reloj.
- $^{-1} \rightarrow$ Movimiento inverso o en contra de las manecillas del reloj.

*Estudiante de Matemáticas, Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Bogotá-Colombia

- $n \rightarrow$ Para un n natural, n indica el número de veces que se aplica dicho movimiento.

Para ilustrar esta notación tomaremos un cubo como se muestra en la Figura 1. Donde la cara de color blanco es la frontal, la azul es la derecha y la naranja es la superior. Adicionalmente, los colores de las caras inferior, izquierda y trasera son rojo, verde y amarillo, respectivamente.

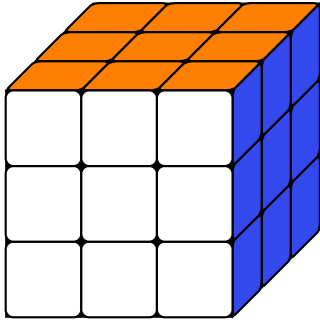


Figura 1: Cubo de Rubik resuelto.

Al cubo ilustrado en 1 se le realizará un giro a la derecha, uno arriba y uno al frente, lo que en la notación de Singmaster es hacer una combinación RUF (Right, Upward, Front). El resultado de hacer esta combinación de movimientos es ilustrado en la Figura 2.

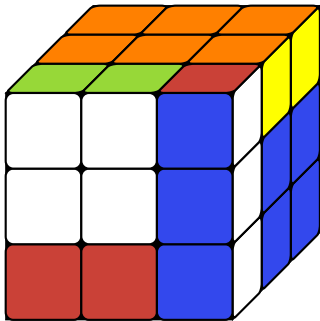


Figura 2: Cubo de Rubik resuelto al aplicar la combinación RUF.

Por otro lado, si se quisiera resolver el cubo en el estado actual de la Figura 2 se debe realizar la combinación $F^{-1}U^{-1}R^{-1}$, o lo que es lo mismo, realizar los movimientos inversos de cada rotación, es decir, se debe girar la cara frontal, después la cara superior y finalmente la cara derecha en contra de las manecillas del reloj.

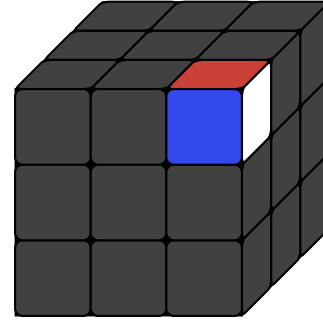


Figura 3: Cubo de la esquina de color azul, rojo y blanco denominado como *rfu* según la nomenclatura Singmaster.

Además de establecer convenciones para las diferentes rotaciones en las caras del cubo, el sistema Singmaster también permite asignar nombres a los cubos que se hallan en los bordes y esquinas.

Para el sistema de nomenclatura Singmaster ubicar un cubo específico es similar a como se ubica un punto en un sistema de coordenadas cartesiano tridimensional. Para los cubos de las esquinas se indican las caras en las que pertenece utilizando la convención de los nombres correspondientes. Por ejemplo, para nombrar el cubo de la esquina que se encuentra ilustrado en la Figura 3 tendríamos que listar la cara derecha (*r*), la frontal (*f*) y la superior (*u*), por lo tanto, bajo el sistema de nombramiento Singmaster dicho elemento es nombrado *rfu*. Para nombrar los cubos del borde se mencionan únicamente las dos caras a las cuales pertenece, para ilustrar este hecho considere el cubo de la Figura 4, el cual está en la cara frontal y superior, por ende, la nomenclatura para referirse a dicho cubo es *fu*.

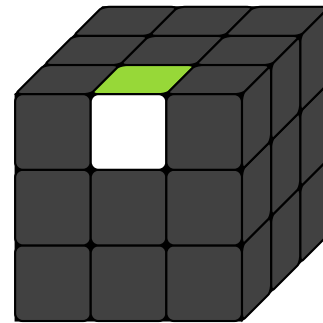


Figura 4: Cubo del borde de color blanco y verde denominado como *fu* según la nomenclatura Singmaster.

Una de las particularidades de la nomenclatura es que existen diferentes formas de denominar a un solo cubo. Lo cual implica que el señalado en la Figura 3 puede ser caracterizada como *rfu*, *ruf*, *ufr*, *urf*, *fru* o *fur*, y en la Figura 4, el cubo

del borde allí ilustrado puede ser denominado uf o fu . Sin embargo, lo usual es que se nombren las caras en sentido de las manecillas del reloj.

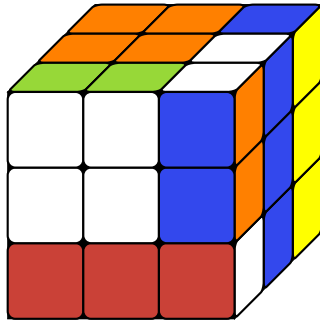


Figura 5: Cubo de Rubik resuelto al aplicar la combinación URF.

No obstante, aunque el sistema de referencia sea conmutativo para el nombramiento de piezas, esta lógica no se aplica para el movimiento de las caras ya que como se ve en la Figura 5 el movimiento URF da como resultado una coloración diferente al obtenido al realizar RUF mostrado en la Figura 2.

4. Grupos, permutaciones y algo más.

En esta sección se introducirán conceptos básicos del álgebra abstracta como grupo, subgrupo y un tipo especial de grupos conocidos como permutaciones, cuyas características serán expuestas a partir de nociones algebraicas y de conteo elemental. Esto con el fin de introducir el objeto principal de estudio para este artículo, el grupo del cubo de Rubik.

Definición 4.1. [Dav99, pág. 31] La notación de **congruencia**, introducida por Gauss, sirve para expresar de forma conveniente el hecho de que dos enteros a y b difieren por un múltiplo de un número natural fijo m . Decimos que a es **congruente** con b con respecto al módulo m , o sea, en símbolos,

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

El significado de esto es que $a - b$ es un múltiplo de m .

Ejemplo 4.1. Note que 17 es congruente con 5 módulo 12 o en símbolos

$$17 \equiv 5 \pmod{12},$$

ya que $17 - 5 = 12$. Un concepto más intuitivo se puede observar al ver el reloj.

La hora militar es un tipo especial de indicador temporal que considera 24 horas en lugar de 12, como lo hace un reloj convencional. Las 5 : 00 pm en hora regular, son las 17 : 00 en hora militar, esto se debe a que 5 y 17 son congruentes módulo 12.

Definición 4.2. [Lee18, pág. 38] Un **grupo** es una dupla compuesta por un conjunto G y una operación binaria $*$, los cuales satisfacen las siguientes condiciones:

- $a * b \in G$ para todo $a, b \in G$ (Clausura);
- Existe un elemento $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$ para todo $a \in G$ (Existencia de la identidad);
- Para cada $a \in G$ existe un $b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$ (Existencia del elemento inverso);
- $(a * b) * c = a * (b * c)$ para todo $a, b, c \in G$ (Asociatividad).

Nos referiremos a G como grupo bajo la operación $*$ y a e como el elemento identidad del grupo.

Ejemplo 4.2. El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ es un grupo bajo la operación suma $(+)$

- La suma de valores enteros siempre da como resultado un valor entero, por ende, se cumple la propiedad clausurativa.
- La existencia del 0 el cual para todo número entero a satisface la condición $a + 0 = 0 + a = a$ asegura la existencia de un elemento neutro dentro del grupo.
- Todo número entero a posee un inverso $-a$ para el cual $a + (-a) = (-a) + a = 0$ lo cual satisface la existencia del elemento inverso.
- Para probar la asociatividad en los enteros bajo la suma, utilizaremos el método de inducción fijando un valor c entero en la suma de dos valores dados a y b .

Para $c=0$:

Consideraremos dos números enteros a, b para los cuales se cumple:

$$(a + b) + 0 = a + (b + 0).$$

Esto debido a la propiedad modulativa del cero.

Enunciar la hipótesis de inducción:

Se asume como hipótesis de inducción que un número entero positivo c cumple la igualdad

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

A partir de la expresión anterior demostraremos que se cumple para $c + 1$.

Probar la igualdad para $c + 1$:

1. Por hipótesis de inducción se tiene que:

$$(a + b) + c + 1 = a + (b + c) + 1.$$

2. En particular, por hipótesis de inducción, la asociatividad se cumple para 1, entonces

$$(a + b) + c + 1 = a + b + (c + 1).$$

3. Aplicando nuevamente la hipótesis de inducción para b y $c + 1$ se logra

$$(a + b) + c + 1 = a + (b + (c + 1)).$$

Siendo esta expresión la que se deseaba obtener.

La demostración para $c < 0$ es análoga. Por lo cual, se logra que la suma de enteros es asociativa.

Dado que el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ bajo a la operación $(+)$ satisface todas las condiciones establecidas en la definición, entonces $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo.

Definición 4.3. [Lee18, pág. 48] Sea un grupo G con la operación $*$. Entonces un subconjunto H de G es llamado un **subgrupo** de G si H es un grupo bajo la misma operación. En este caso se escribe $H \leq G$.

Definición 4.4. Considere Ω un conjunto arbitrario no vacío, cuyos elementos son usualmente referidos como puntos. Una biyección de Ω sobre sí mismo se conoce como **permutación** de Ω .

Definición 4.5. El conjunto de todas las permutaciones de Ω forman un grupo bajo la composición de funciones o concatenación, llamado el **grupo simétrico** de Ω . Este grupo se denota usualmente con S_Ω , y se escribe S_n para denotar un subgrupo especial de S_Ω . Cuando n es un entero positivo y $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Definición 4.6. Un **grupo de permutación** es un subgrupo del grupo simétrico.

Definición 4.7. La **paridad** es la cantidad de ciclos de longitud dos que componen un n -ciclo. Si n es par, se requiere de un número impar de 2-ciclos para construir la permutación. Por otro lado, si n es impar, se requiere un número par de 2-ciclos para obtener una equivalencia.

Definición 4.8. A partir de la paridad de una permutación se define la **función signo** $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{1, -1\}$ de la siguiente forma:

$$\text{sgn}(x) = (-1)^{N(x)},$$

donde $N(x)$ es la paridad de x .

Ejemplo 4.3. Considere $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ con suma y producto tomando módulo 5. Entonces la función $f : \Omega \rightarrow \Omega$, donde $f(x) = 3x + 2 \pmod{5}$ define una permutación de Ω . Esta permutación puede ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

La expresión anterior indica en la fila superior las entradas de la función y en la fila inferior la salida al aplicar la función. Se puede apreciar que el conjunto resultante es una biyección del conjunto inicial. Cabe resaltar que, existe otra forma de expresar la permutación anterior, y es la siguiente

$$(0231)(4)(x).$$

Esta forma de ilustrar las permutaciones en un conjunto se conoce como *producto de ciclos disyuntos* o *composición de ciclos disyuntos*, debido a que las secuencias desarrolladas en cada paréntesis expresan la imagen de la función en cada valor anterior, en este caso $0 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$ y $1 \rightarrow 0$. Los valores que están solos o que no aparecen se consideran puntos fijos dentro de la permutación. En este caso $4 \rightarrow 4$.

Toda permutación se puede expresar en forma de ciclos, no obstante, estos ciclos no son únicos, para cada permutación de n elementos. Estos se pueden expresar como composición de múltiples ciclos de longitudes diferentes. En particular, todo ciclo es equivalente a la composición de ciclos de longitud dos [Dav00]. A continuación, podrá encontrar algunos ejemplos

$$(12) = (12),$$

$$(13)(12) = (123),$$

$$(14)(13)(12) = (1234),$$

$$(15)(14)(13)(12) = (12345).$$

Expresar permutaciones en términos de ciclos de longitud dos se hace con el fin de calcular la paridad del elemento [MIT09].

El cubo de Rubik es un caso particular de los grupos de permutaciones, dado que el cambio de colores en los movimientos del cubo es una función biyectiva entre posiciones del cubo, esto implica que, cada rotación de caras es una permutación asociada a un grupo de permutaciones. Si se le asignan valores numéricos a cada casilla del cubo como se muestra en la Figura 6 obtendríamos 54 casillas, y cada movimiento sería intercambiar dichos valores en diferentes posiciones del cubo. Establecidos estos conceptos, se probará el siguiente teorema.

Teorema 4.1. [Pro09, pág. 4] El conjunto de operaciones en el cubo al que se puede llegar desde el estado resuelto haciendo los movimientos $\{F, L, U, D, R, B\}$ en varias combinaciones es un grupo bajo la operación de composición o concatenación.

Demostración. A continuación, se probará que el conjunto de operaciones en el cubo de Rubik bajo la operación de concatenación tiene estructura de grupo.

- El elemento identidad es aquel que al aplicarse al cubo de Rubik no lo modifica de ninguna forma, por lo cual, el elemento identidad es no realizar movimiento alguno.
- El elemento inverso de cada movimiento es realizar el movimiento en contra de las manecillas del reloj, lo cual es equivalente a realizar el mismo movimiento tres veces a favor de las manecillas del reloj.
- Para mostrar la propiedad asociativa considere α, β, γ pertenecientes a $\{F, L, U, D, R, B\}$ por lo cual se debe probar que

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$$

Realizar $(\alpha\beta)\gamma$ es aplicar el movimiento $\alpha\beta$ y luego mover γ . Por otro lado, $\alpha(\beta\gamma)$ implica realizar α y luego aplicar $\beta\gamma$. No obstante, ambos casos equivalen a realizar el movimiento α , luego β y finalmente γ .

Dado que el conjunto cumple con las tres condiciones para ser un grupo, entonces el conjunto generado por los movimientos $\{F, L, U, D, R, B\}$ bajo la operación concatenación es un grupo. $\square$

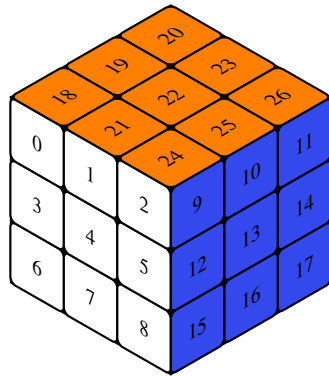


Figura 6: Enumeración de casillas en un cubo de Rubik.

Adicionalmente, debido al contraejemplo visto en la sección anterior sobre las imágenes 5 y 2, es inmediato que el grupo de movimientos del cubo bajo la operación de concatenación no es abeliano o conmutativo.

Gracias al teorema 4.1 se introducirá la siguiente definición.

Definición 4.9. [Dan96] *El grupo de permutaciones generado por los movimientos en el cubo $\{F, L, U, D, R, B\}$ y denotado por $G = \langle F, L, U, D, R, B \rangle \subset S_{54}$ es llamado el grupo del cubo de Rubik.*

El grupo de cubo de Rubik tiene varias condiciones a tener en cuenta que invalidan la posibilidad de que todas las permutaciones de S_{54} se puedan realizar en el cubo y que garantizan la contención estricta dentro del grupo de permutaciones S_{54} . En primer lugar, las piezas centrales son puntos fijos dentro de las transformaciones, pues estos elementos no tienen movilidad alguna. Además, separar y reorganizar las piezas del cubo de Rubik no se considera un movimiento del grupo. De esto se derivan dos clasificaciones de grupos de cubo de Rubik, el *legal* y el *ilegal*.

El grupo de cubo de Rubik ilegal admite separar las piezas del cubo y reorganizarlas de cualquier forma sin separar las etiquetas de colores de sus piezas correspondientes, mientras que el grupo de cubo de Rubik legal solo permite realizar las rotaciones de las caras. El grupo que se estudiará será el legal, el cual es más restrictivo y fue el utilizado para realizar la demostración anterior.

Como otra particularidad del grupo, es interesante estudiar la cantidad de posibles permutaciones legales que se pueden realizar con el cubo de Rubik estándar, en otras palabras, identificar el orden del grupo asociado al mismo. Por lo tanto, aplicando algunas técnicas de conteo básicas junto con interpretaciones a partir del cubo y sus características, se mostrará la

inmensa cantidad de elementos que se pueden obtener con un cubo de $3 \times 3 \times 3$.

La cantidad de permutaciones en el cubo de Rubik es un conjunto compuesto por:

- Las permutaciones legales que hay en los 8 cubos de las esquinas.
- Los arreglos que se pueden generar por las 12 piezas del borde.

Para calcular la cantidad de permutaciones que se pueden efectuar con las 8 piezas de las esquinas se calcula el número de formas en las que se pueden arreglar 8 elementos en 8 casillas, es decir $8!$.

Cada cubo en la permutación puede tener tres colores diferentes, por lo tanto, se debe calcular la cantidad de formas de ordenar los colores de cada uno de los cubos en la permutación, que es equivalente a ordenar 8 elementos, cada uno con tres orientaciones diferentes, lo cual da como resultado 3^8 .

Por el principio multiplicativo del conteo, el producto de $8!$ con 3^8 da como resultado el número total de formas en las que se pueden organizar las esquinas del cubo.

Sin embargo, las cantidades organizadas no están restringidas a la estructura legal del cubo de Rubik, por lo que estas permutaciones contemplan el suceso de modificar la estructura inicial de las esquinas. Si de las tres posibles orientaciones de los cubos de las esquinas, solo una de ellas es legal, entonces se divide la cantidad actual en tres, esto para obtener el número permitido de permutaciones en las esquinas (PE).

$$PE = \frac{8! \cdot 3^8}{3}.$$

Un ejemplo de cómo se modifica la estructura original del cubo en las esquinas puede verse en el primer caso de la Figura 7.

De manera análoga, como se calcularon las permutaciones de los cubos de las esquinas, se deben organizar 12 elementos en 12 casillas, es decir $12!$.

Cada pieza del borde tiene 2 caras, por lo tanto, la cantidad de formas de organizar dichos colores es 2^{12} .

El producto de las dos cantidades calculadas es el número total de permutaciones sin restricción, por lo cual se divide por el número total de orientaciones posibles para dejar únicamente las que respeten la estructura inicial de los bordes. Dando como resultado el número de permutaciones en los bordes (PB)

$$PB = \frac{12! \cdot 2^{12}}{2}.$$

Un ejemplo de cómo se modifica la estructura original del cubo en los bordes puede verse en el segundo caso de la Figura 7.

Finalmente, por el principio multiplicativo del conteo, el producto de las permutaciones de los bordes y las esquinas da la totalidad de formas de organizar el cubo incluyendo las cantidades que no respetan la relación original entre los colores de las esquinas y los bordes. Un ejemplo de cómo se modifica

la relación entre esquinas y bordes se ilustra en el tercer caso de la Figura 7, por lo cual, ya que jamás se pueden permutar únicamente en el cubo, entonces se divide el producto entre PB y PE entre dos.

En conclusión, el orden del grupo del cubo de Rubik es

$$|G| = \frac{PB \cdot PE}{2} = \frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}}{3 \cdot 2 \cdot 2}.$$

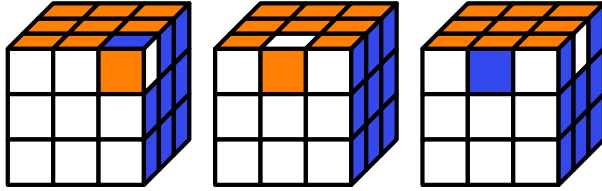


Figura 7: Tres casos irregulares para el grupo del cubo de Rubik legal. El primer caso ilustra una permutación que modifica la estructura original de una esquina. El segundo caso ilustra una permutación que modifica la estructura original de un elemento del borde. El tercer caso ilustra una permutación de únicamente dos aristas, esto elimina la relación original entre las permutaciones iniciales del cubo. Estos movimientos son imposibles, ya que una permutación de solamente una o dos piezas va en contra de las rotaciones sistemáticas sobre las caras del cubo.

5. Propiedades del grupo asociado al movimiento del cubo de Rubik.

En esta sección se trabajarán algunas propiedades del grupo de cubo de Rubik relacionadas con sus permutaciones a partir de la rotación de las caras. La estructura algebraica del grupo de cubo de Rubik permite desarrollar diferentes teoremas que se demostrarán aplicando algunas propiedades de la teoría de grupos.

Teorema 5.1. [MIT09, pág. 9] *Si el cubo comienza en el estado resuelto, y se realiza una secuencia de movimientos P sucesivamente, entonces eventualmente el cubo volverá a su estado resuelto.*

Demostración. Para poder realizar la demostración consideremos una secuencia de movimientos P dada. Ahora consideremos un número natural m de veces que se apliquen los movimientos P , los cuales permitan al cubo retornar a la misma posición a la que se encontraba a k movimientos de P , donde $k < m$ y m es la mínima cantidad que una disposición en el cubo aparece por segunda vez. Por lo cual, rotar el cubo m veces bajo la operación P es equivalente a realizar P un total de k veces, es decir

$$P^k = P^m.$$

Por lo tanto, si mostramos que k debe ser 0, se demostraría que el cubo efectúa un ciclo al estado original, es decir, existe

una cantidad de veces a las cuales P retorna el cubo al estado original.

Esta demostración se desarrollará por contradicción, suponiendo que k es mayor a cero.

Por la estructura de grupo del cubo de Rubik, existe un elemento inverso P^{-1} de P . Por el razonamiento inicial

$$P^k = P^m,$$

y al operar P^{-1} en ambos lados de la expresión

$$P^k P^{-1} = P^m P^{-1},$$

$$P^{k-1} = P^{m-1}.$$

Esto contradice la hipótesis de que m es el mínimo, pues m debía ser la menor cantidad de veces en las que se debe aplicar P para obtener una posición del cubo previa.

Por lo tanto, $k = 0$. En conclusión, cada secuencia de movimiento eventualmente retorna al estado inicial del cubo. $\square$

A continuación, se mostrarán dos ejemplos sencillos los cuales ilustran la utilidad del teorema.

Ejemplo 5.1. *El caso más sencillo es aplicar un solo movimiento, por ejemplo $p = U$, es decir, realizar movimientos en la cara superior a favor de las manecillas de reloj, por lo cual, en el cuarto movimiento, el cubo volverá a su estado original.*

Ejemplo 5.2. *Por otro lado, si se hace $P = UR$ se debería aplicar P 105 veces para retornar el cubo a su estado original. Así mismo, se puede hacer $P = URURFL$ y el teorema asegura que en algún punto, al iterar dicho movimiento se llegará a el estado original.*

El teorema además indica que, si se aplica únicamente un subconjunto de operaciones al cubo, dichas operaciones definen un subgrupo de permutación del cubo de Rubik, el cual retorna al punto inicial después de una cantidad de aplicaciones de la operación. Este subgrupo no solo depende de las operaciones que se apliquen sino también de la posición del cubo, ya que cada subgrupo se definirá a partir de un “generador” el cual marcará el inicio y fin del ciclo. De la misma forma, la cantidad de elementos del subgrupo, será la misma cantidad de veces a las que se le puede aplicar la operación elegida antes de volver al punto inicial. Este concepto en teoría de grupos es conocido como grupo cíclico. Por ejemplo, para el caso de hacer $P = U$ el subgrupo de permutaciones estará compuesto únicamente por 4 elementos, los cuales poseen una estructura cíclica. A partir del tercer elemento, el cubo retorna a su estado original, por lo que el quinto movimiento será de nuevo el primero y así sucesivamente. Por otro lado, para $P = UR$, obtenemos un subgrupo de 105 elementos y estos elementos variarán dependiendo del estado inicial del cubo.

6. Teoremas y definiciones de la teoría de grupos aplicada al cubo de Rubik.

Hasta el momento se ha realizado un estudio detallado de los conceptos del cubo de Rubik, se le ha dotado de una estructura de grupo y se han demostrado afirmaciones acerca de las particularidades en las rotaciones de sus caras.

En este apartado se implementará todo lo anterior en conjunto con conceptos algebraicos abstractos para desarrollar los principios de la teoría del cubo de Rubik. Específicamente, esta sección se centrará en demostrar el primer y segundo teorema fundamental de la teoría del cubo.

Al final de la sección anterior se introdujo a manera de ejemplo el concepto de grupo cíclico y elemento generador, a continuación, se definirá formalmente el objeto.

Definición 6.1. [Che04, pág. 14] *A un grupo G se le denomina como grupo cíclico, si existe un elemento $g \in G$ tal que g genera todo el conjunto, y se escribe $G = \langle g \rangle$.*

Observación. Para denotar un grupo cíclico con una cantidad n de elementos se escribe C_n . Por otro lado, para denotar el conjunto de m -tuplas pertenecientes a C_n se denota con C_n^m .

Ejemplo 6.1. *Considere un conjunto cíclico de 3 elementos C_3 , al cuál se le hará el producto cartesiano usual con el mismo 5 veces*

$$C_3XC_3XC_3XC_3XC_3,$$

por notación esto es

$$C_3^5 = C_3XC_3XC_3XC_3XC_3.$$

En el siguiente teorema se le dará estructura de grupo al conjunto C_n^m , ya que nos permitirá estudiar ciertas propiedades del grupo del cubo de Rubik y algunas condiciones necesarias para que una permutación forme parte de este.

Teorema 6.1. *Si C_n tiene estructura de grupo bajo la operación $*$ entonces C_n^m es un grupo bajo la operación $\odot$ definida como*

$$(a_1, a_2, \dots, a_m) \odot (b_1, b_2, \dots, b_m) = (a_1 * b_1, a_2 * b_2, \dots, a_m * b_m).$$

Demostración. Se probará que C_n^m tiene estructura de grupo.

- Si el elemento neutro de C_n es e , entonces el elemento neutro de C_n^m es $(e, e, \dots, e)$ ya que la naturaleza de la operación exige que todos los elementos se operen uno a uno, por lo tanto, al ser e el único elemento que posee esa propiedad, la m -tupla de elementos inversos es el elemento identidad.
- Sea $x = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, entonces, para cada uno de los elementos en x existe un inverso, por lo cual, existe un elemento $x^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_m^{-1})$ en C_n^m . Debido a la definición de la operación $x \odot x^{-1}$ se obtiene una m -tupla de elementos inversos, la cual es el elemento neutro del grupo.

- La propiedad asociativa en el conjunto se obtiene elemento a elemento, ya que por hipótesis C_n es asociativa.

Como el conjunto cumple con las tres condiciones para ser un grupo, entonces C_n^m es un grupo. $\square$

Teorema 6.2. [Dan96] *La posición de todas las facetas de las esquinas del Cubo de Rubik puede ser descrita por el grupo C_3^8 .*

Demostración. Para este conjunto no se tendrá en cuenta la coloración de los elementos, sino su orientación con respecto al cubo. La cantidad de orientaciones de un cubo es 3^8 , que, por definición de producto cartesiano entre conjuntos, es el mismo cardinal de C_3^8 . Lo cual indica que existe una biyección entre C_3^8 y la cantidad de orientaciones del conjunto de permutaciones de esquinas del cubo de Rubik. $\square$

Teorema 6.3. [Dan96] *La posición de todas las facetas de los bordes del Cubo de Rubik puede ser descrita por el grupo C_2^{12} .*

Demostración. Para este conjunto no se tendrá en cuenta la coloración de los elementos, sino su orientación con respecto al cubo. La cantidad de orientaciones de un cubo es 2^{12} , que, por definición de producto cartesiano entre conjuntos, es el mismo cardinal de C_2^{12} . Lo cual indica que existe una biyección entre C_2^{12} y la cantidad de orientaciones del conjunto de permutaciones de bordes del cubo de Rubik. $\square$

Definición 6.2. *Si X es una configuración del cubo de Rubik. Dicho elemento puede ser identificado a partir de una 4-tupla (ρ, σ, v, w) donde $\rho \in S_8$, $\sigma \in S_{12}$ indican la permutación de los cubos y $v \in C_3^8$ y $w \in C_2^{12}$ indican la orientación de los cubos.*

Para ilustrar la notación anterior representaremos dos posiciones del cubo. El resuelto y el estado del cubo al aplicar R^{-1} como se muestra en la Figura 8.

- Para el estado resuelto los vectores $v \in C_3^8$ y $w \in C_2^{12}$ que indican la orientación siempre estarán en su posición original, por lo tanto, $v = \vec{0}$ y $w = \vec{0}$. Además, llamaremos ξ a la permutación identidad, la cual no modifica el cubo de ninguna forma, de tal manera, el estado de resuelto es

$$(\xi, \xi, \vec{0}, \vec{0}).$$

- El cubo en la Figura 8 muestra una permutación en 4 elementos de las esquinas y 4 elementos del borde. Si se enumera los bordes y las esquinas del cubo como aparece en la Figura 9. Entonces las permutaciones correspondientes son

$$\rho = (2376)$$

y

$$\sigma = (2\ 7\ 10\ 6),$$

mientras que las orientaciones corresponden a

$$v = (0, 1, 2, 0, 0, 2, 1, 0)$$

y

$$w = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0).$$

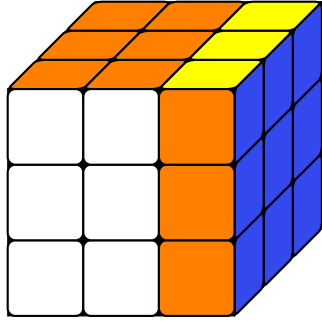


Figura 8: Cubo de Rubik resuelto al aplicar R^{-1} .

La anterior definición asigna vectores a cada posible permutación del cubo, ya sea legal o no. En las secciones pasadas se hizo una descripción de algunos aspectos que discriminaban los movimientos legales de los que no, sin embargo, en esta sección aplicaremos lo que se ha construido hasta ahora para poder identificar algebraicamente, a partir de requisitos específicos, que las permutaciones de todo el cubo no pertenecen al grupo del cubo de Rubik legal.

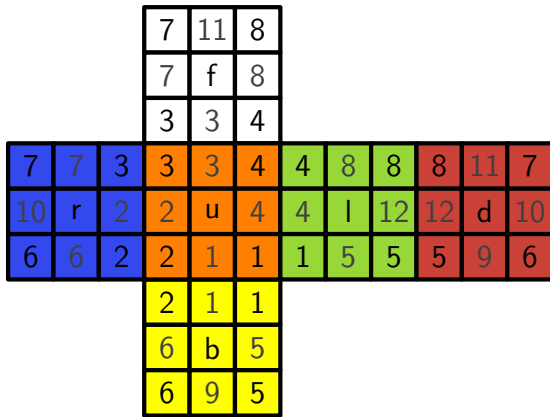


Figura 9: Enumeración de esquinas (color negro) y bordes (color gris) del cubo.

Teorema 6.4. (Primer teorema fundamental de la teoría del cubo [Mul11]). Un vector de posición $(\rho; \sigma, v, w) \in S_8 X S_{12} X C_3^8 X C_2^{12}$ corresponde a una configuración legal del cubo de Rubik si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\text{sgn}(\rho) = \text{sgn}(\sigma)$.
- $v_1 + v_2 + \dots + v_8 = 0 \pmod{3}$.
- $w_1 + w_2 + \dots + w_{12} = 0 \pmod{2}$.

Lo anterior indica que una configuración es legal si y solo si la paridad de las permutaciones de cubos de las esquinas y de los bordes tienen la misma paridad, el número de giros

a favor y en contra de las manecillas del reloj sean iguales módulo 3 y que los giros en los bordes solo ocurran en pares.

Demostración. Primero se mostrará que las tres condiciones son necesarias. Para esto, se necesitará probar que estos requisitos se mantienen para el estado resuelto del cubo y que se preservan bajo los seis movimientos del cubo R, L, U, D, F, B .

Para el estado resuelto del cubo $(\xi, \xi, \vec{0}, \vec{0})$ las tres condiciones del teorema se satisfacen. Ahora, ilustraremos la equivalencia en notación vectorial de cada uno de los movimientos del cubo partiendo del estado resuelto.

▪ R

$$\rho = (2673),$$

$$\sigma = (2\ 6\ 10\ 7),$$

$$v = (0, 1, 2, 0, 0, 2, 1, 0),$$

$$w = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0).$$

▪ L

$$\rho = (1485),$$

$$\sigma = (4\ 8\ 12\ 5),$$

$$v = (2, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 2),$$

$$w = (0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1).$$

▪ U

$$\rho = (1234),$$

$$\sigma = (1234),$$

$$v = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$w = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

▪ D

$$\rho = (5876),$$

$$\sigma = (9\ 12\ 11\ 10),$$

$$v = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$w = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

▪ F

$$\rho = (3784),$$

$$\sigma = (3\ 7\ 11\ 8),$$

$$v = (0, 0, 1, 2, 0, 0, 2, 1),$$

$$w = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

▪ B

$$\rho = (1562),$$

$$\sigma = (1596),$$

$$v = (1, 2, 0, 0, 2, 1, 0, 0),$$

$$w = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Note que cada permutación es un 4-ciclo, lo que indica que la paridad de todas las permutaciones es impar, por otro lado, la suma de los componentes de cada elemento de la esquina es 0 o es 6, lo cual pertenece a la clase de equivalencia del 0 módulo 3. Por otro lado, la suma de cada vector de los elementos de los bordes es cero o es 4 lo cual es divisible entre 2.

Consideremos ahora que la permutación X es un movimiento legal, entonces, al aplicar alguno de los seis movimientos en el cubo:

- La primera condición se satisface ya que cada uno de los movimientos causa una permutación de 4-ciclos tanto para las esquinas como para los bordes. Dado que la composición de permutaciones impares es impar.
- La segunda condición se cumple para cualquier movimiento, ya que U y D no modifican la orientación del cubo para las esquinas. Por otro lado

$$2 = -1 \bmod 3,$$

y

$$1 = -1 \bmod 2,$$

lo cual indica que para R, L, F, B dos componentes se incrementan en 1 módulo tres y se reducen en 1 módulo 3. Lo cual indica que el valor de la suma no se modifica.

- La tercera condición se satisface, debido a que los movimientos U, D, F, B no modifican la orientación de los bordes, mientras R, L se es agregado cuatro veces 1, lo cual en módulo 2 es 0, por lo que la suma de los componentes no se modifica.

De tal manera, para toda configuración legal del cubo, los 6 movimientos de rotación de las caras también generan una permutación legal. Por ende, si el vector X representa un ordenamiento legal del cubo, este satisface las tres condiciones expuestas por el teorema.

Ahora, consideremos como hipótesis que la configuración (ρ, σ, v, w) satisface las tres condiciones expuestas en el teorema y se desea probar que dichas condiciones son suficientes para probar que un vector es legal. Para demostrar el argumento anterior se mostrará que cualquier vector de posición (ρ, σ, v, w) satisfaciendo esas tres propiedades se puede resolver usando movimientos legales del cubo.

- Aplicando la parte anterior de la demostración consideremos que $\text{sgn}(\rho) = \text{sgn}(\sigma) = 1$. De no ser así, basta con efectuar cualquiera de las seis rotaciones de las caras, ya que como vimos anteriormente, estos movimientos son permutaciones impares, que al ser aplicadas a permutaciones impares dan como resultado permutaciones pares. Lo cual indica que las piezas de las esquinas y de los bordes pueden regresar a su lugar de inicio aplicando 3-ciclos. Por ende, se pueden restaurar todos los cubos a su posición de origen aplicando 3-ciclos. Esta nueva configuración se conocerá como (ρ', σ', v', w') .

Dado que el cubo realizó movimientos que preservaban las condiciones del teorema, entonces las posiciones del vector (ρ', σ', v', w') satisfacen dichas condiciones, debido a lo que se demostró en la parte anterior de la demostración. En particular, $\rho' = \xi, \sigma' = \xi$. Así, todos los movimientos restantes pueden girar los cubos dentro de las configuraciones apropiadas.

- La tercera condición menciona que un número par de piezas en el borde deben ser permutadas. Si se puede mover cualquier dupla de bordes, entonces se puede retornar al origen todas las piezas del borde.
- La segunda condición menciona que la cantidad de giros en piezas del borde a favor y en contra de las manecillas del reloj debe ser múltiplo de tres. Por lo tanto, se debe realizar cualquier cantidad de giros a favor o en contra de las manecillas del reloj en parejas hasta llevar cada esquina a su posición original. Los giros restantes se deberán aplicar tres veces a favor de las manecillas del reloj o 3 giros en contra. Los cuales pueden resolverse usando el movimiento de rotación aplicado anteriormente.

De esta manera, cualquier vector de posición (ρ, σ, v, w) satisfaciendo esas tres propiedades se puede resolver usando movimientos legales del cubo. Lo que indica que las tres condiciones son suficientes para probar que una configuración es legal, demostrando así la doble implicación expuesta y el primer teorema fundamental de la teoría del cubo. $\square$

El primer teorema fundamental otorga criterios para identificar las disposiciones en las que el cubo tiene una solución. No obstante, las configuraciones del cubo poseen particularidades con las cuales una permutación podría eliminar la estructura legal del grupo, de tal manera, se desarrolló un segundo criterio que identifica los movimientos legales en el Cubo de Rubik. Este criterio se conoce como el segundo teorema fundamental de la teoría del cubo.

Teorema 6.5. (Segundo teorema fundamental de la teoría del cubo [Dan96]). Una operación del cubo es posible si y si satisface lo siguiente:

- El número de ciclos de bordes y esquinas de longitud par es par.
- El número de ciclos de esquina girados a la derecha es igual al número de ciclos de esquina girados a la izquierda (hasta el módulo 3).
- Hay un número par de ciclos de reorientación de los bordes.

Demostración. Sea M una operación de rotación en el cubo, la cual transforma el estado resuelto a la posición $(\rho, \sigma, v, w) \in S_8 X S_{12} X C_3^8 X C_2^{12}$.

- Por el primer teorema fundamental de la teoría del cubo $\text{sgn}(\rho) = \text{sgn}(\sigma)$. Lo cual implica que, la paridad de ρ es igual a la de σ . Por lo tanto, la paridad de los ciclos en las esquinas y bordes $N(\rho) + N(\sigma)$ es par.

- Para cualquier movimiento M , los cubos de las esquinas se mueven a la derecha, a la izquierda o no se mueven en absoluto. Así que el ciclo cambia la suma de v_i por 2, 1 o 0 (mod 3) respectivamente. Por el primer teorema fundamental de la teoría del cubo $v_1 + v_2 + \dots + v_8 = 0 \pmod{3}$. Esto indica que, la cantidad de rotaciones a favor sumado a la cantidad de rotaciones en contra, son inversos aditivos, entonces tienen la misma cantidad.
- Observe que un ciclo de borde solo se reorienta si se cambia por un número impar; es decir $w_j = 1$ para algún $i \in \{1, 2, 3, \dots, 12\}$. Por el primer teorema fundamental de la teoría del cubo $w_1 + w_2 + \dots + w_{12} = 0 \pmod{2}$ aplicando un razonamiento similar al anterior, la cantidad de rotaciones a favor y en contra de las manecillas es el mismo. Por lo tanto, hay un número par total de bordes reorientados.

Por otro lado, si consideramos como suposición inicial que las condiciones del teorema se satisfacen para un movimiento M que lleva el cubo del estado resuelto al estado (ρ, σ, v, w) cuya existencia está garantizada por el primer teorema fundamental de la teoría del cubo. Por las propiedades del grupo de cubo de Rubik, también existe un movimiento M^{-1} que lleva el cubo del estado (ρ, σ, v, w) al estado resuelto. Por las propiedades cíclicas de los movimientos M^{-1} también satisface las tres propiedades. Lo cual indica que dicha operación es posible. $\square$

7. Interpretación de métodos de solución.

Después de recopilar definiciones, notaciones y teoría en esta sección veremos algunos métodos de solución implementados para llevar a un cubo de una posición vectorial legal aleatoria al estado resuelto. Además, como curiosidad se presentarán algunos resultados interesantes de artículos que implementan algoritmos de inteligencia artificial estructurados y entrenados específicamente para resolver cubos de Rubik.

7.1. El método del destornillador [MIT09].

Implica girar una cara 45 grados, sacar la pieza del borde que sobresale y desarmar el cubo. Este método, aunque no posee muchos conceptos matemáticos, debido a la existencia del primer y segundo teorema fundamental de la teoría del cubo permite realizar estudios y variantes interesantes sobre el cubo y sus permutaciones.

7.2. El método Bottom up? de abajo hacia arriba [MIT09].

El método Bottom up consiste en completar el cubo en capas empezando por el fondo. Intuitivamente sería una forma de armarlo progresivamente, sin embargo, es de las formas

más lentas de hacerlo. Tiene un promedio de aproximadamente 100 movimientos para obtener la solución [MIT09]. A continuación se realizará un bosquejo del algoritmo.

- Para la primera capa se debe realizar una cruz primero del mismo color utilizando los bordes del mismo color que su centro, dándole una orientación igual a la original. Luego, resolver las esquinas una por una obteniendo una cara completa del mismo color.
- Para la segunda capa se debe trabajar únicamente con los bordes de las diferentes caras restantes, para esto existen diferentes algoritmos de permutación que permiten intercambiar diferentes cubos de orientaciones y posiciones que se manejan en 3-ciclos o composición de estos.
- Para la última capa, la cual se asume que es la superior, se debe realizar el mismo paso que el primero, formar una cruz a partir de los bordes permutándolas a su posición original. Finalmente, para la permutación entre esquinas se define el siguiente movimiento $x = R^{-1}D^2R$ y el proceso para intercambiar esquinas es

$$xU^2xU^{-1}xU^{-1}x.$$

Al aplicar de manera correspondiente en 2-ciclos se obtiene como resultado el cubo en el estado resuelto.

7.3. CFOP [Fri].

Esta etapa implica la manipulación de la capa superior para que todas las piezas de la misma tengan el mismo color en la parte superior, a expensas de los colores incorrectos en los otros lados.

- En la primera etapa (cruzar) se posicionan cuatro piezas de la esquina de una cara del cubo tomando como referencia la pieza central.
- En la segunda (iniciar con las dos primeras capas) las piezas de las esquinas y los bordes se emparejan y luego se mueven a su ubicación correcta.
- En la tercera etapa (orientar la última capa) se manipula la capa superior para que toda la cara tenga el mismo color, sin importar que los demás colores sean incorrectos.

Finalmente, como su nombre lo indica (permutar la última capa) se permuta las piezas finales aplicando aproximadamente 21 algoritmos que preservan la orientación de las figuras, pero no su posición.

7.4. El método de Petrus [Pet].

El Método Petrus, inventado por Lars Petrus es un proceso de construcción de bloques cuya construcción inicial se resuelve intuitivamente sin algoritmos.

En resumidas cuentas, el algoritmo busca realizar el siguiente procedimiento: resolver un bloque de 2 por 2 por 2 primero, expandir esto a 2 por 2 por 3, fijar los bordes mal orientados en la capa exterior, y luego resolver el resto.

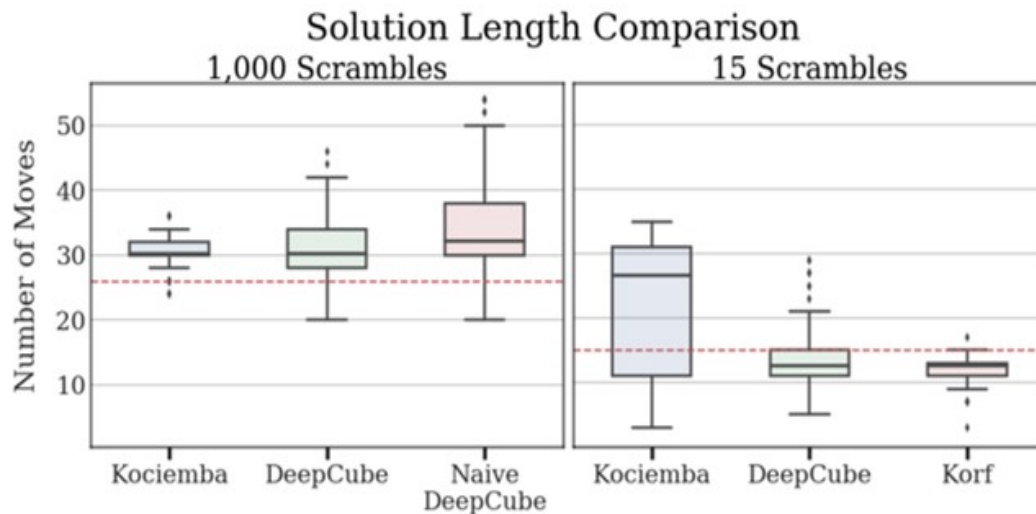


Figura 10: Distribución de las longitudes de las soluciones obtenidas en [McA18]. En esta imagen se puede observar la distribución del número de movimientos empleados en cada algoritmo al realizar la solución de 1000 cubos (Gráfica izquierda), 15 cubos (Gráfica derecha). Después de observar las gráficas, se puede identificar a Kociemba como el método menos variante, implementando como mínimo 27 movimientos para resolver un cubo. Mientras que Naive DeepCube es el método más variante con un mínimo de 20 movimientos para resolver el cubo.

7.5. Métodos varios de inteligencia artificial.

El método Kociemba [McA18] es un algoritmo que utiliza las propiedades de grupo del Cubo de Rubik para obtener una permutación del subgrupo más pequeño, de lo cual, encontrar la solución es trivial.

El solucionador DeepCube [McA18] es un método combinado entre Iteración autodidáctica que se utiliza para entrenar una red conjunta de valores y políticas. Con árboles de búsqueda monte Carlo. Si se aplica el método estadístico naive bayes en el algoritmo, esta variación se conocerá como Naive DeepCube.

Finalmente, el algoritmo Korf [McA18] realiza una búsqueda de árbol heurístico, el cual encontrará la solución óptima de cualquier estado inicial.

Todos estos procesos realizan pruebas bajo el grupo de permutaciones del cubo de Rubik legal en el cual proceden a partir de movimientos reconocidos como legales aplicando el primer y segundo teorema fundamental del cubo de Rubik. Finalmente, en la Figura 10 se muestra un boxplot con los resultados de estos algoritmos.

8. Conclusiones.

La teoría de grupos trabaja conceptos clásicos cuyos ejemplos de la vida real se consideran escasos, sin embargo, el cubo de Rubik rompe con esa creencia y nos permite reconsiderar el análisis que le damos a diferentes objetos de nuestro entorno cotidiano. Bajo cualquier elemento se podría esconder una estructura que se acople a diferentes conceptos matemáticos y de las que se pueda extraer valiosos conocimientos que

ayuden en el desarrollo de la ciencia y la computación.

Lo anterior destaca una de las herramientas más valiosas que proporciona las matemáticas, la capacidad de obtener generalizaciones y patrones específicos a partir de reglas de inferencias sencillas, y el cubo de Rubik no es la excepción, ya que a partir de definiciones matemáticas básicas se logró establecer dos de los teoremas más importantes para el estudio y desarrollo computacional de dicho objeto. Pese a que una de las principales dificultades para estudiar y resolver el cubo de Rubik es la inmensa cantidad de elementos que hay en el conjunto de permutaciones, gracias a la teoría de grupos y a la estructura sistemática que tienen con otras ramas de las matemáticas como la teoría de números o la teoría del conteo, se pudo desarrollar métodos ingeniosos para la caracterización del cubo sin tener un contacto implícito con cada elemento del conjunto.

No es de sorprender el número de diferentes conceptos trabajados en este artículo, ni las diversas relaciones entre todos ellos. El estudio del cubo de Rubik se vio compuesto por elementos de combinatoria, álgebra, teoría de números, matemáticas discretas, incluso inteligencia artificial, lo que indica que las matemáticas ofrecen un amplio conjunto de herramientas para la solución de problemas y descripciones del entorno entrelazando muchos conceptos en su desarrollo.

Referencias.

- [Che04] J. Chen, *Group theory and the Rubik's cube*, 2004.
- [Dan96] L. Daniels, *Group Theory and the Rubik's Cube*, Lakehead University, Kanada (1996).
- [Dav00] T. Davis, *Permutation Groups and Rubik's Cube*, 2000.

- [Dav99] H. Davenport, *The higher arithmetic: An introduction to the theory of numbers*, Cambridge University Press, 1999.
- [Dix96] J. Dixon, *Permutation groups*, Springer Science & Business Media, 1996.
- [Fri] J. Fridrich, *My system for solving Rubik's cube*. Accessed: 2020-07-24.
- [Lee18] G. Lee, *Abstract Algebra: An Introductory Course*, Springer, 2018.
- [McA18] S. McAleer, *Solving the Rubik's Cube Without Human Knowledge*, 2018.
- [MIT09] MIT, *The Mathematics of the Rubik's Cube Introduction to Group Theory and Permutation Puzzles*, 2009.
- [Mul11] J. Mulholland, *Rubik's Cube: The Fundamental Theorem of cubology*, SFU Faculty of Science (2011).
- [Pet] L. Petrus, *Solving Rubik's Cube for speed*. Accessed: 2020-07-24.
- [Pro09] H. Provenza, *Group Theory and the Rubik's Cube*, Lakehead University, Canada, 2009.
- [Rok14] T. Rokicki, *The diameter of the rubik's cube group is twenty*, *siam REVIEW* **56** (2014), 645-670.
- [Sin89] D. Singmaster, *Notes on Rubik's magic cube*, Willey, New York., 1989.

Acerca de la autora: Gabriela Coy Calderón es estudiante de octavo semestre de matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Entre sus pasatiempos están los deportes y hacer postres. Le gustaría ser instructora de pesas y tener un blog de vida fitness.

UNA PROBADA DE TEORÍA DE LA MEDIDA

Julián Jiménez-Cárdenas*

juliano.jimenezc@konradlorenz.edu.co

1. Introducción.

La teoría de la medida es una rama de las matemáticas que estudia formas de medir conjuntos sobre espacios arbitrarios. Cuando decimos medir, nos referimos a asignarle un número a un conjunto, número que tendemos a asociar con su tamaño. Por ejemplo, la medida del interior de un círculo de radio 1, denotado en forma conjuntista como $C = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ es $\pi r^2 = \pi$, dado que su radio es 1. Por supuesto, en el anterior ejemplo decimos que la medida del círculo es su área, pero la idea de medida va más allá, puesto que extiende lo que entendemos por área, volumen y longitud a dimensiones superiores.

Sin embargo, la medida no necesariamente debe tener una interpretación geométrica, como cuando uno habla de medidas en $\mathbb{R}^n$, sino que también se define en espacios aparentemente desconectados de la geometría como lo son los espacios de funciones, por mencionar algún ejemplo. Esto se hace con la motivación de comparar los tamaños de unos conjuntos con otros, que en principio no se puede hacer con la idea de la cardinalidad, porque por ejemplo $[0, 1]$ y $[1, 100]$ son conjuntos que tienen la misma cantidad de elementos, pero el primero es de cierta forma más pequeño que el segundo, de tal suerte que si uno toma un número real aleatorio uniforme entre 0 y 100 existen más probabilidades de que dicho número se encuentre en el segundo intervalo en vez de que se encuentre en el primero.

Para el lector que no recuerde la idea de cardinalidad, es el tamaño que se le asocia a un conjunto, en términos del número de elementos que tiene. Por ejemplo, el conjunto $\{1, 2, 4\}$ tiene cardinal 3, puesto que posee tres elementos. Todos los conjuntos que tienen un cardinal dado por un número natural se les dice conjuntos finitos. Sin embargo, es bien sabido que hay conjuntos que no son finitos, como por ejemplo el conjunto de todos los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, y si queremos comparar cardinales de este tipo de conjuntos debemos hacer uso de funciones biyectivas. Sin embargo, antes de introducirnos en el tema, hay que hablar primero de relaciones entre conjuntos, para lo cual hay que discutir antes lo que es el producto cartesiano entre dos conjuntos.

Definición 1.1 (Producto cartesiano [Jec13]). *El producto cartesiano entre dos conjuntos A, B se denota como $A \times B$,*

y se define del siguiente modo:

$$A \times B := \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{0, -1\}$, entonces $A \times B = \{(1, 0), (1, -1), (2, 0), (2, -1), (3, 0), (3, -1)\}$. Otro ejemplo particular es $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Con esta última definición, podemos entender lo que es una relación entre dos conjuntos.

Definición 1.2 (Relación entre conjuntos [Jec13]). *Considere dos conjuntos A, B arbitrarios. Se dice que R es una relación entre los conjuntos A y B si $R \subset A \times B$ (R está contenido en $A \times B$).*

Entre todas las relaciones, existe una familia de relaciones especiales bastante útiles en lo que respecta a comparar conjuntos: las funciones. A continuación, se presentan los requisitos que debe tener una relación para ser considerada función.

Definición 1.3 (Función [Jec13]). *Se dice que una relación $R \subset A \times B$ entre dos conjuntos A y B es una función si se satisface el siguiente par de propiedades.*

1. *Para todo elemento $x \in A$, existe algún $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$.*
2. *Si para algún $x \in A$ ocurre que $(x, y_1), (x, y_2) \in R$, necesariamente se debe tener que $y_1 = y_2 \in B$.*

La primera propiedad de función asegura que todo elemento en A (que se refiere usualmente como dominio) tiene asociado un elemento en B , lo que implica que no existe ningún elemento en A que no esté relacionado con algún elemento de B (que se refiere usualmente como codominio). La segunda propiedad garantiza que cada punto del dominio está relacionado con un único elemento del codominio.

Una notación alternativa para una función entre dos conjuntos A y B es $f : A \rightarrow B$, donde cada elemento $x \in A$ está relacionado con $f(x) \in B$. Por ejemplo, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es una función que le asigna a cada elemento de los reales su cuadrado. Como contraejemplo de función tenemos la relación $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que le asigna a cada real su raíz cuadrada, esto es, $r(x) = \sqrt{x}$; esta relación no es una función porque para cada elemento $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, existe un par de elementos distintos $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ (por ejemplo, $4 = 2^2 = (-2)^2$) para los cuales $y_1^2 = y_2^2 = x$, de modo que x está relacionado con ambos a la vez (incumpliendo la segunda propiedad de función). Además, no todos los reales tienen raíz cuadrada (al

*Egresado Departamento de Matemáticas, Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Bogotá-Colombia

menos en los reales), por lo que tampoco cumple la primera condición. Lo que se suele hacer para que la raíz cuadrada sea función es tomar como dominio únicamente a los reales no negativos y asignarles su raíz cuadrada positiva.

A continuación, exponemos algunas subclases de funciones especialmente útiles para comparar tamaños entre conjuntos.

Definición 1.4 (Función Inyectiva [Zal07]). *Una función $f : A \rightarrow B$ se dice inyectiva si para cualesquiera $x_1, x_2 \in A$ que satisfacen $f(x_1) = f(x_2)$ se tiene que $x_1 = x_2$.*

En otras palabras, una función es inyectiva si ningún elemento en B está asociado con dos o más elementos de A . Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ es una función inyectiva. En contraposición, la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ no es una función inyectiva porque 4 en el codominio está relacionado con 2 y -2 a la vez.

Definición 1.5 (Función Sobreyectiva [Zal07]). *Una función $f : A \rightarrow B$ se dice sobreyectiva si para cualquier $y \in B$ existe algún $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

Intuitivamente, si una función es sobreyectiva todos los elementos del codominio están asociados con al menos un elemento del dominio. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ definida por $f(x) = \sin(x)$ es sobreyectiva, mientras que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ no es sobreyectiva, dado que ningún real negativo está asociado con algún elemento de $\mathbb{R}$.

Observe que si existe una función inyectiva $f : A \rightarrow B$, A tiene menos o el mismo número de elementos que B ; y si existe una función sobreyectiva $g : A \rightarrow B$, A tiene más o el mismo número de elementos que B . Tómese un tiempo para digerir este hecho, dado que será importante para nuestra próxima definición. Si existe una función $f : A \rightarrow B$ que es tanto sobreyectiva como inyectiva, se le conoce como **función biyectiva**, e implica que A y B tienen el mismo cardinal, lo que se suele denotar como $A \cong B$.

Por ejemplo, los pares $2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ tienen el mismo cardinal que los naturales $\mathbb{N}$, dado que la función $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$ definida por $f(x) = 2x$ es biyectiva. De forma similar, se tiene que los enteros $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ tienen el mismo cardinal que los naturales $\mathbb{N}$ (intente encontrar una función biyectiva entre estos dos conjuntos). También se tiene que $\mathbb{N} \cong \mathbb{Q}$, donde $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales (los que son el resultado de la división de dos números enteros), y para demostrarlo se usa el teorema fundamental de la aritmética [Zal07]. Ciertamente resulta extraño que un conjunto contenido en otro tenga el mismo cardinal que el primero, siendo esta una de las primeras consecuencias del infinito que se puede abordar de manera más precisa con la teoría de la medida.

Las aplicaciones de la teoría de la medida van desde la probabilidad hasta la geometría diferencial. A continuación, se presentan un par de resultados de cada una de estas áreas que requiere aplicar las herramientas o la intuición que provee

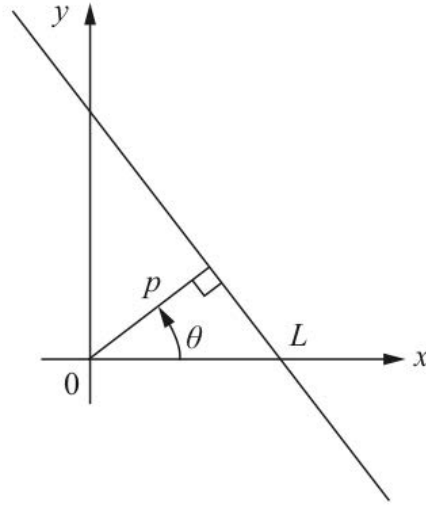


Figura 1: Una recta se puede determinar por un vector, y este vector se puede determinar por su magnitud p y ángulo con respecto al eje x . Figura tomada de [DC16].

esta rama de las matemáticas.

Teorema 1.1 (Punto aleatorio en una bola n -dimensional [Tao11]). *Considere la bola n -dimensional de radio 1 definida como el conjunto $B = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq 1\}$. Tome ahora un punto X al azar de esta bola. Cuando $n \rightarrow \infty$, la probabilidad de encontrar este punto dentro de la bola (es decir, tal que $\|X\| < 1$) se hace nula, de modo que cada vez que se incrementa la dimensión aumenta la probabilidad de encontrar a X en la frontera ($\|X\| = 1$), y disminuye la de encontrarlo dentro de la esfera.*

Para enunciar el siguiente teorema se mencionarán primero algunas ideas. La primera es que cualquier recta en $\mathbb{R}^2$ se puede determinar a partir de un vector normal a ella que empieza en el origen, y este vector a su vez se puede determinar por una magnitud y una dirección (ver Figura 1). Con ello, el conjunto de todas las rectas en $\mathbb{R}^2$ se puede ver como el conjunto

$$\mathcal{L} = \{(p, \theta) \in \mathbb{R}^2; (p, \theta) \sim (p, \theta + 2k\pi) \wedge (p, \theta) \sim (-p, \theta \pm \pi)\}. \quad (1)$$

La expresión $(p, \theta) \sim (p, \theta + 2k\pi)$ indica que ambas coordenadas se refieren a la misma recta, así como que $(p, \theta) \sim (-p, \theta \pm \pi)$ representan la misma recta (verifique por qué son la misma en ambos casos). Además, e define la medida de cualquier subconjunto $A \subset \mathcal{L}$ como el área que ocupa en $\mathbb{R}^2$. Con estas ideas se introduce a continuación la fórmula de Cauchy-Crofton.

Teorema 1.2 (Fórmula de Cauchy-Crofton [DC16]). *Considere una curva plana regular de longitud l . La medida del conjunto de líneas rectas que intersecan a C contando multi-*

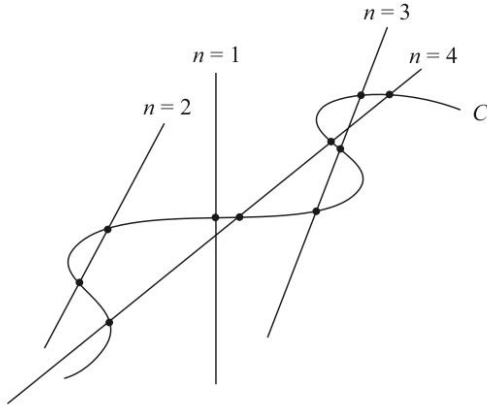


Figura 2: En este ejemplo, n es la multiplicidad de cada línea recta. Figura tomada de [DC16].

plicidades (por ejemplo, si una recta intersecta tres veces la curva, se cuenta tres veces. Ver Figura 2) es igual a $2l$.

2. Medida Elemental.

Para entender lo que es una medida, empezamos con la más intuitiva de todas, la medida elemental sobre $\mathbb{R}$, que va a ser referida como la función

$$m : \varepsilon(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}.$$

El conjunto $\varepsilon(\mathbb{R})$ es el conjunto de todos los conjuntos elementales en $\mathbb{R}$, los cuales son intervalos de la forma $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ o (a, b) , con $a \leq b$, o uniones finitas de estos; también se puede demostrar que operaciones conjuntistas binarias finitas entre conjuntos elementales aparte de la unión como lo son la intersección, diferencia, entre otras, generan conjuntos elementales. A continuación escribimos formalmente lo que es un conjunto elemental en $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.1 (Conjunto Elemental). *Se dice que un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto elemental si es la unión de un número finito de cajas $B_1, \dots, B_k$. Una caja B_i es simplemente el conjunto formado por el producto cartesiano de n intervalos de la forma $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ o (a, b) , con $a \leq b$. El conjunto de todos los conjuntos elementales sobre $\mathbb{R}^n$ se denota como $\varepsilon(\mathbb{R}^n)$*

Como se comentó, operaciones conjuntistas binarias de conjuntos elementales son conjuntos elementales, y es lo que resumimos en el siguiente teorema.

Teorema 2.1 ([Tao11]). *Si $E, F \in \varepsilon(\mathbb{R}^n)$, entonces la unión $E \cup F$, la intersección $E \cap F$, la diferencia $E - F = \{x \in E : x \notin F\}$ y la diferencia simétrica $E \Delta F = (E - F) \cup (F - E)$ son conjuntos elementales.*

Para demostrar que las operaciones binarias (aparte de la unión) entre productos elementales generan conjuntos elementales basta con demostrar que la intersección (o resta) de

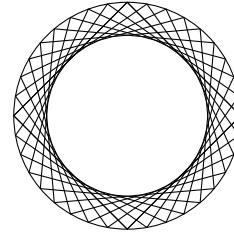


Figura 3: A pesar de que el círculo se puede construir como una unión infinita de cuadrados, no es un conjunto medible porque no existe una familia finita de cajas que lo describa.

dos cajas es la unión de un número finito de cajas. A continuación, mencionamos algunos ejemplos de conjuntos elementales.

Ejemplo 2.1 (Singletons). *Cualquier singleton (conjunto con un único elemento) $\{b\}$, con $b \in \mathbb{R}$ es un conjunto elemental, porque $\{b\} = [b, b]$. De forma general, cualquier elemento $\{x\}$, con $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto elemental, dado que $\{x\} = [x_1, x_1] \times \dots \times [x_n, x_n]$.*

Ejemplo 2.2 (Círculo en $\mathbb{R}^2$). *Considere el círculo*

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}.$$

Intuitivamente, podemos ver que se puede representar este círculo como una unión infinita de cuadrados inscritos en él, pero esto no implica que C sea elemental, dado que la condición necesaria para serlo es ser la unión finita de cajas, y para este conjunto se necesita siempre un número infinito de cajas para describirlo. En conclusión, C no es elemental. En la Figura 3 se observa la ilustración de cómo el círculo se puede ver como una unión infinita de cuadrados (ojo, porque solo uno de estos cuadrados es una caja, los demás no se pueden escribir como el producto cartesiano de dos intervalos).

Como se comentó antes, la medida elemental $m : \varepsilon(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$, actúa sobre conjuntos elementales de $\mathbb{R}$ y los envía a los reales no negativos junto con el infinito, ¿pero cómo? La noción de medida que uno tiene en $\mathbb{R}$ refiere a la longitud de un intervalo. Por ejemplo, uno dice que la medida de un intervalo¹ $[a, b]$ es $b - a$, de modo que uno espera que nuestra medida recree este resultado. Ahora bien, la medida también se debe poder aplicar a cualquier conjunto elemental, para lo cual necesitamos el siguiente resultado.

Teorema 2.2 (Partición de un conjunto elemental [Tao11]). *Si $E \in \varepsilon(\mathbb{R})$, entonces E se puede expresar como una unión finita de cajas disyuntas. Esto es, E se puede escribir como la unión de cajas sin elementos en común entre ellas. El conjunto de estas cajas se conoce como partición de E .*

Por supuesto, una caja es un intervalo en $\mathbb{R}$, de forma que se podría definir la medida de un conjunto elemental E en función de la suma de las medidas de cada una de las cajas que componen su partición disyunta. De manera formal, si

¹Puede ser un intervalo con extremos abiertos o cerrados, su medida no se ve afectada por ello.

$\{B_i\}_{i=1}^n$ es una partición del conjunto E , entonces

$$m(E) := \sum_{i=1}^n m(B_i). \quad (2)$$

Puede comprobar que la definición de esta medida satisface que la medida de cualquier intervalo es equivalente a la distancia entre sus dos extremos. Si usted es un lector inquieto, seguro que le intrigará si la medida es independiente de la partición que se tome. La respuesta a esta cuestión es que sí, pero para probar este resultado se necesitan algunas herramientas avanzadas, por lo que no se discutirá el razonamiento para llegar a este resultado aquí. Si está interesado, puede encontrar la prueba formal de los dos últimos resultados en [Tao11].

El siguiente paso es extender esta medida definida sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ a $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Para ello, recuerde que una caja $B \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ se puede ver como el producto cartesiano de n intervalos, es decir, existen intervalos $I_1, \dots, I_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ tal que $B = I_1 \times \dots \times I_n$. Además, cualquier conjunto elemental en $\mathbb{R}^n$ tiene una partición finita de cajas disjuntas, de forma que podemos escribir nuevamente la medida de este elemental como la suma de las medidas de los elementos de su partición. Finalmente, extendemos la idea de la medida de la caja B en $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ multiplicando las medidas de cada intervalo que lo compone, es decir:

$$m^n(B) := \prod_{i=1}^n m(I_i), \quad (3)$$

donde el símbolo $\prod$, en vez de representar una suma como Σ , representa la multiplicación de todos los elementos que están siendo iterados. Se denota esta medida como m^n para hacer énfasis en que está definida sobre las cajas (y próximamente los elementales) de $\mathbb{R}^n$, mientras que m está definida sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$. Como puede observar, esta medida para la caja generaliza la noción de área, volumen, hipervolumen, etc. Con ello, si $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, y $\{B_i\}_{i=1}^m$ es una partición disyunta de E , entonces la medida de E es

$$m^n(E) := \sum_{i=1}^m m^n(B_i). \quad (4)$$

A continuación se presentan algunos ejemplos de conjuntos elementales y sus medidas.

Ejemplo 2.3 (Conjuntos Finitos). *Considere cualquier conjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$. Este conjunto es medible (demuéstrela), y su medida es 0.*

Usando el mismo razonamiento, considere algún conjunto elemental $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ con $m^n(E) > 0$. Se puede sumergir este conjunto elemental en $\mathbb{R}^{n+1}$ si se le aplica el producto cartesiano con un elemento de $\mathbb{R}$. Por ejemplo, $E \times \{0\} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+1})$, y en este caso $m^{n+1}(E \times \{0\}) = 0$ (demuéstrela). Intuitivamente, este resultado nos dice que una línea no tiene área, un área no tiene volumen, y así sucesivamente.

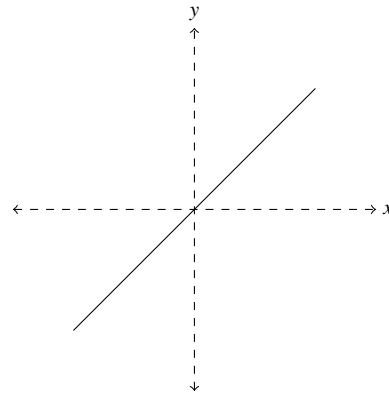


Figura 4: Una línea en $\mathbb{R}^2$ no tiene área.

Ejemplo 2.4 (Cubo n -dimensional). *Definimos un cubo n -dimensional como el producto cartesiano de n intervalos con la misma medida. Por ejemplo, $D = [0, 1] \times \dots \times [0, 1] = [0, 1]^n$ es un cubo n -dimensional formado por intervalos de medida 1, dado que $m([0, 1]) = 1$. De manera general, si D es un cubo n -dimensional donde todos sus intervalos miden $d \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $m^n(D) = d^n$ (demuéstrela).*

3. Medida de Jordan.

La medida elemental es bastante restrictiva, puesto que solo se puede evaluar sobre conjuntos elementales, y existen bastantes conjuntos que no son elementales, como por ejemplo el círculo en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, la intuición sugiere que a pesar de que el círculo no es elemental, uno puede construirlo como una unión infinita de cajas, como se ilustró en el ejemplo 2.2. En general, cualquier conjunto acotado² (existen algunos conjuntos patológicos para lo cual esto no es cierto) puede escribirse como unión enumerable³ de cajas, con lo que si tuviésemos una forma de obtener la medida de esta unión enumerable, tendríamos una expresión coherente para la medida de estos conjuntos.

Sin embargo, antes de lanzarnos a construir esta medida más general, podemos pensar en algunas propiedades intuitivas que consideramos que debe tener una medida. De hecho, iremos un paso más allá y diremos que una función es una medida, si satisface todas las propiedades que se exponen en la siguiente definición.

Definición 3.1 (Medida en un conjunto $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ⁴). *Diremos que la función*

$$m : A \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$$

²Un conjunto acotado es un conjunto que está contenido en un círculo de tamaño finito

³Cuando se dice unión enumerable se quiere decir que se tiene a lo sumo tantos elementos en la unión como números naturales.

⁴Recuerde que $\mathcal{P}(B)$ es el conjunto constituido de todos los subconjuntos de B , es decir, $\mathcal{P}(B) = \{X : X \subset B\}$.

es una medida sobre el conjunto A si se satisfacen las siguientes propiedades.

1. Si $E, F \in A$ y $E \cap F = \emptyset$, entonces $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$.
2. Si $E, F \in A$ y $E \subset F$, entonces $m(E) \leq m(F)$.
3. Si $E, F \in A$, entonces $m(E \cup F) \leq m(E) + m(F)$ (esta propiedad es consecuencia de las dos anteriores).
4. Si $E \in A$, entonces $m(E) = m(E + x)$, donde $x \in \mathbb{R}^n$, y $E + x := \{x + y : y \in E\}$.

La primera propiedad hace explícito el hecho de que si uno tiene un conjunto que se puede partir en dos, su medida es la suma de las medidas de su partición, siempre y cuando todos los elementos de esta partición no tengan ningún elemento en común par a par. La segunda propiedad asegura que la medida debe ser coherente con la contenencia conjuntista; es decir, cuando un conjunto está contenido en otro, la medida del primero no debe ser mayor que la del segundo. La tercera propiedad es natural cuando uno reconoce que E y F pueden llegar a tener elementos en común (verifique por qué es natural, y pruebe que se puede deducir de las dos primeras propiedades). Por último, la cuarta propiedad garantiza la invarianza bajo traslaciones de la medida, es decir, la medida de un conjunto debe ser la misma independientemente de donde se encuentre posicionado en $\mathbb{R}^n$.

Un ejercicio interesante sería probar que si se toma $A = \varepsilon(\mathbb{R}^n)$, la medida elemental $m^n : \varepsilon(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$ es efectivamente una medida.

Para proseguir con nuestra tarea de definir una medida un poco más general que la elemental, necesitamos algunas ideas que serán comentadas a continuación.

Definición 3.2 (Cota superior (inferior) de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$). Decimos que $a \in \mathbb{R}$ es una cota superior (inferior) del conjunto A si para todo $x \in A \subset \mathbb{R}$ se tiene que $x \leq a$ ($x \geq a$).

Definición 3.3 (Supremo (ínfimo) de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$). El supremo (ínfimo) de A es la menor (mayor) de todas las cotas superiores (inferiores). El supremo (ínfimo) de A se denota por $\sup(A)$ ($\inf(A)$).

No todos los conjuntos tienen supremo o ínfimo, dado que puede que no estén acotados, de forma que no se puede definir cuál es la menor o mayor de estas cotas. Si además el supremo o ínfimo está contenido en A , se les llama **máximo o mínimo**, respectivamente. Finalmente, gracias al siguiente axioma se garantiza la existencia del supremo o ínfimo de cualquier subconjunto en $\mathbb{R}$, siempre y cuando esté acotado por arriba o abajo, respectivamente.

Axioma 3.1 (Axioma de completez). Todo conjunto acotado por arriba (con cota superior) tiene supremo.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de conjuntos acotados, y sus respectivos supremos o ínfimos.

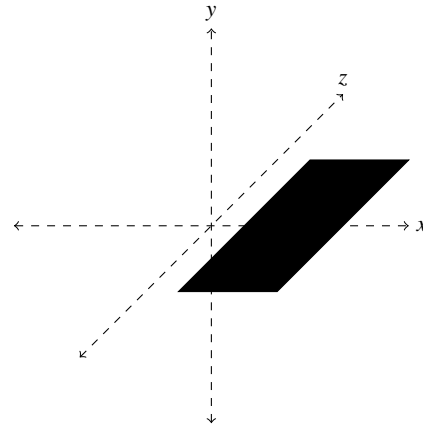


Figura 5: Una superficie en $\mathbb{R}^3$ no tiene volumen.

Ejemplo 3.1 (Sucesión $1/n$, $n \geq 1$). Considere la sucesión $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$. Esta sucesión está acotada por encima por 1 y por debajo por 0. De hecho, esta sucesión converge a 0. Considerando el conjunto formado por todos los elementos de esta sucesión, se tiene que el 0 es su ínfimo, pero no su mínimo, dado que ningún valor de la sucesión es nulo.

Ejemplo 3.2 (Número de Euler). El conocido número de Euler e , se puede obtener como límite de la sucesión convergente

$$\{(1 + 1/n)^n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Si se construye un conjunto con todos los elementos de la sucesión, se verifica que dicha sucesión es acotada por debajo por 0 y por encima por 3 (puede intentar probar este hecho usando el teorema del binomio de Newton), de forma que por el axioma anterior tiene cota superior en $\mathbb{R}$, la cual resulta ser e , dado que esta sucesión es creciente.

Observe que la sucesión está completamente contenida en $\mathbb{Q}$, pero si se analiza el problema de las cotas en $\mathbb{Q}$, se verifica que esta sucesión no tiene supremo, porque los racionales no contienen a e .

Con las ideas de supremo e ínfimo podemos definir la siguiente medida, conocida como medida de Jordan, tomada de [Tao11].

Definición 3.4 (Medida de Jordan). Tome $E \subset \mathbb{R}^n$ como un conjunto acotado.

- La medida de Jordan interna $m_{*,(J)}$ de E se define como

$$m_{*,(J)}(E) := \sup_{A \subset E, A \in \varepsilon(\mathbb{R}^d)} m(A).$$

- La medida de Jordan externa $m^{*,(J)}$ de E se define como

$$m^{*,(J)}(E) := \inf_{E \subset B, B \in \varepsilon(\mathbb{R}^d)} m(B).$$

- Si $m^{*,(J)}(E) = m_{*,(J)}(E)$, se dice que E es Jordan medible, y se denota como $m(E) := m^{*,(J)}(E) = m_{*,(J)}(E)$ a la medida de Jordan de E . Por convención, se dice que los conjuntos no acotados no son Jordan medibles.

Un conjunto acotado es entonces Jordan medible si podemos aproximarlos de forma tan precisa como queramos por debajo y por encima usando elementales cada vez más refinados, que se adapten a la forma de dicho conjunto.

Esta medida es muchísimo más general que la medida elemental, porque si existe un conjunto no elemental E , pero que tiene una sucesión convergente de conjuntos elementales que se aproxima a él, tendrá medida de Jordan. Este hecho se ve sustentado por el siguiente teorema.

Teorema 3.1 (Caracterización de la medida de Jordan [Tao11]). *Tome $E \subset \mathbb{R}^n$ como un conjunto acotado. Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

1. E es Jordan medible.
2. Para todo $\varepsilon > 0$, existen conjuntos elementales $A, B \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ con $A \subset E \subset B$ de tal modo que $m(B - A) \leq \varepsilon$.
3. Para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto elemental $A \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ tal que $m^{*,(J)}(A \Delta E) \leq \varepsilon$.

A continuación, se presenta un ejemplo de aplicación de la medida de Jordan en la integración de una función continua en un intervalo cerrado.

Ejemplo 3.3 (Integral definida de una función continua y positiva). *Considere una función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Defina el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$, que corresponde al área que se encuentra debajo de la curva inducida por f y encima de 0 en $\mathbb{R}^2$. La medida de Jordan se corresponde con el área de D , y es a su vez igual al valor de la integral, es decir,*

$$\int_a^b f(x)dx = m(D). \quad (5)$$

Intuitivamente esto es cierto porque uno puede aproximar el conjunto D usando rectángulos, y se puede hacer esta aproximación tan refinada como se desee, haciendo el ancho de los rectángulos cada vez más pequeño (ver Figura 6). De hecho, esta es la forma en la que Riemann define la integral [Rud64].

Para terminar, usted puede comprobar que esta medida satisface las condiciones que concluimos en la definición 3.1.

A pesar de que la medida de Jordan es bastante más general que la medida elemental, sigue habiendo algunos conjuntos no acotados que no tienen medida de Jordan. Por ello, se define la medida de Lebesgue como la mejor generalización de la medida elemental y la medida de Jordan en el sentido de que es la que tiene la mayor cantidad de conjuntos medibles en $\mathbb{R}^n$, pero su motivación, definición y propiedades las dejaremos para otra ocasión.

Referencias.

- [Tao11] Terence Tao, *An introduction to measure theory* (2011).
 [Hal13] Paul R Halmos, *Measure theory*, Vol. 18, Springer, 2013.

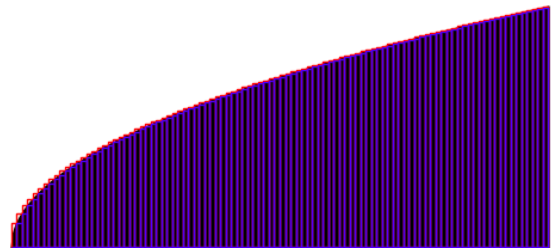
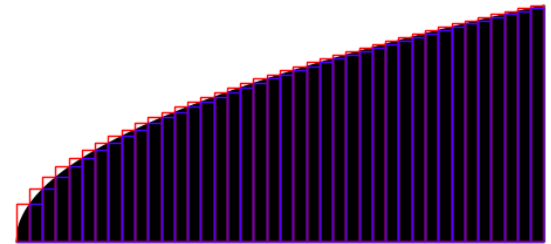
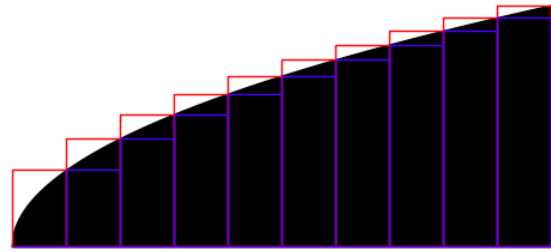


Figura 6: Ilustración de la aproximación usando conjuntos elementales del área bajo una curva. Observe que el conjunto elemental formado por los rectángulos en rojo contiene al área de interés, mientras que el de los rectángulos en azul está contenido en dicha área.

- [Bog07] Vladimir I Bogachev, *Measure theory*, Vol. 1, Springer Science & Business Media, 2007.
 [Rud64] Walter and others Rudin, *Principles of mathematical analysis*, Vol. 3, McGraw-hill New York, 1964.
 [DC16] Manfredo P Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition*, Courier Dover Publications, 2016.
 [Jec13] Thomas Jech, *Set theory*, Springer Science & Business Media, 2013.
 [Zal07] Fernando Zalamea, *Fundamentos de matemáticas*, Universidad Nacional de Colombia, 2007.

Acerca del autor: Julián Jiménez Cárdenas es egresado del Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz, egresado del Programa de Física de la Universidad Nacional y estudiante de la Maestría en Matemáticas de la Universidad de los Andes. Es un gran programador, en especial en Python, del cual da cursos y dirige un sitio en internet. Es un gran nadador y le gustaría aprender a cocinar.

UN LENGUAJE LLAMADO MATEMÁTICAS

Saúl Quispe *

saul.quispe@ufrontera.cl

1. Introducción.

A las matemáticas se les puede considerar como un lenguaje, porque como en cualquier lengua, esta ciencia tiene sus propias reglas, fórmulas y matices; los símbolos utilizados en matemáticas son únicos y están profundamente arraigados en la historia. Sin embargo, en gran parte de la comunidad matemática existe un conocimiento bastante vago sobre el tiempo de aparición, origen y desarrollo de los símbolos matemáticos. Por lo anterior, en esta nota nos centraremos en la notación de relaciones, operaciones y objetos importantes en la aritmética, álgebra y análisis.

2. Símbolos de operación.

Los primeros símbolos de los cuales se conocen varias representaciones, fueron aquellos que indicaban suma y resta. Desde la edad antigua se evidenció el uso de símbolos que representaran estas operaciones, uno de estos casos fue el de los Egipcios, que aunque no usaron la notación $+$ y $-$ para indicar suma y resta, en el Rhind Papyrus se muestra que usaban un par de patas caminando hacia la derecha para sumar y un par de patas caminando hacia la izquierda que implicaban la resta:



También se conoce el trabajo de Nicole d'Oresme (1323 - 1382), quien usó el símbolo $+$ para abreviar el latín "et" (que significa "y") en su obra *Algorismus Proportionum*. Pero no fue sino hasta 1489, que estos símbolos de suma $+$ y diferencia (o resta) $-$ aparecieron por primera vez de forma impresa, en el libro *Mercantile Arithmetic* de Johannes Widmann (1460 - 1498).

Por otro lado, se tienen registros de las obras en las que se utilizaron por primera vez otros símbolos matemáticos, como el radical $\sqrt{}$, empleado por primera vez en 1525 en *Die Coss* de Christoff Rudolf (1499 - 1545). De este símbolo también se sabe de uso en la obra del Italiano Rafael Bombelli (1526 - 1572), en su *l'Algebra*, donde escribió "R.q.[2]" para la raíz cuadrada de 2 y "R.c.[2]" para la raíz cúbica de 2. Pero como se conoce hoy en día, el símbolo $\sqrt[n]{}$ que significa "raíz n -ésima" fue usado por primera vez en 1629 por Albert Girard (1595 - 1632) y en 1637, René Descartes (1596 - 1650) convirtió el $\sqrt{}$ en el símbolo de raíz cuadrada $\sqrt{}$ que tenemos ahora. De hecho, la operación potencia, muy relacionada

con la radicación, fue usada por primera vez en 1637 en *La géométrie* de René Descartes (1596 - 1650), quien mostró al símbolo n -ésima potencia " a^n " que significa " n -ésima potencia del número a ".

Continuando con la lista de símbolos, el tan famoso símbolo $\times$, que denota la multiplicación, fue visto por primera vez en 1628 en *Clavis Mathematicae* de William Oughtred (1574 - 1660) y fue hasta el siglo XIX que el símbolo $\times$ fue popular en aritmética. Asimismo, recibió cierta oposición por parte de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), quien escribió: "No me gusta (la cruz) como símbolo de multiplicación, ya que se confunde fácilmente con x ", a menudo yo simplemente relaciono dos cantidades por un punto $\cdot$, es decir $RS \cdot PQ$ ". Por tal motivo, su confusión con la letra x en álgebra llevó al punto $\cdot$ a ser más ampliamente aceptado para significar multiplicación. Actualmente también se utiliza el símbolo asterisco $*$, como símbolo de multiplicación, pero este fue usado más adelante, en 1659, en *Teutsche Algebra* de Johann Rahn (1622 - 1676).

La operación inversa a la multiplicación, es la división, y el símbolo que denota esta operación $\div$, fue empleado inicialmente en 1659 por Johann Heinrich Rahn (1622 - 1676) en *Teutsche Algebra*. Otro símbolo que también denota esta operación es $/$, el cual fue usado por primera vez en 1845 por Augustus De Morgan (1806 - 1871). Incluso se conoce el símbolo $:$ para la división, pero este fue usado por primera vez en 1633 en *Arithmetica integra* de Michael Stifel (1487 - 1567), aunque Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) usó $:$ para relación y división en 1684 en *Acta eruditorum*.

Entre otros símbolos, vale la pena hablar de algunos de los símbolos que corresponde a operaciones muy utilizada en combinatoria y análisis. El primero de ellos es el factorial; la notación $n!$ que significa " $n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)$ ", fue utilizado inicialmente en 1808 por Christian Kramp (1760 - 1826) en *Elements d'arithmétique universelle*. Por su parte, del símbolo permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a & b & c & \cdots & f \end{pmatrix},$$

se tiene el registro de su primer uso en 1815, hecho por Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857). Por último, el símbolo binomial $\binom{n}{m}$ que significa

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

fue utilizado por primera vez en 1827 en *Vorlesungen über*

*Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, Temuco-Chile

höhere Mathematik de Andreas von Ettingshausen (1796 - 1878).

3. Relaciones binarias.

Entre las operaciones con relaciones binarias, se encuentra el famoso símbolo *igual* “=” que significa “es lo mismo que”, introducido en 1557 por Robert Recorde (1512 - 1558) en *The Whetstone of Witte*. Este símbolo no debe confundirse con el símbolo *igual por definición* “:=” que significa “es igual por definición a”, que es una alternativa para “=Def”, fue introducido por primera vez en 1894 por Cesare Burali-Forti (1861 - 1931) en *Logica matematica*.

Otros de los símbolos que están enmarcados en las relaciones binarias son el *mayor que* “>” que significa “estrictamente mayor que” y el símbolo *menor que* “<”, que significa “estrictamente menor que”, de los cuales se sabe que fueron usados por primera vez en *Artis analyticae praxis* de Thomas Harriot (1560 - 1621), que se publicó en 1631 después de su muerte. Casi cien años después, en 1734, Pierre Bouguer (1698 - 1758), puso una línea debajo de las desigualdades para formar los signos “≤” y “≥” que significan “menor o igual que” y “mayor o igual que”.

Adicionalmente, encontramos al símbolo *congruencia* “≡”, el cual fue acreditado a Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), ya que en 1801 declaró

$$-16 \equiv 9 \pmod{5},$$

lo que significa que dieciséis negativo es congruente con nueve módulo cinco. Durante el mismo período, Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833) trató de emplear su propia notación para congruencia; sin embargo, fue un poco descuidado porque usó el “=” dos veces para referirse a la congruencia y una vez para la igualdad.

4. Algunos símbolos de lógica matemática y teoría de conjuntos.

En esta sección, encontramos símbolos como “∴” que significa “por lo tanto” y apareció por primera vez impreso en 1659 en *Teusche Algebra* de Johann Zahn (1622-1676). También lo es símbolo *implicación* “→”, fue usado por primera vez en 1922 en *Neubergründung der Mathematik* por David Hilbert (1862 - 1943), y el símbolo “⇒” que significa “lógicamente implica eso” fue empleado inicialmente en 1954 en *Theorie des ensembles* de Nicholas Bourbaki (un grupo de matemáticos principalmente europeos).

Por su parte, está el símbolo *equivalencia* “↔”, que apareció por primera vez en 1933 en *Die Aristotelische Theorie der Möglichkeitsschlüsse* de Albercht Becker (1907-?), y el símbolo “⇔” que significa “si y solo si” fue usado en 1954 en *theorie des ensembles* de Nicholas Bourbaki.

En cuanto a los cuantificadores, aparece el símbolo *cuantificador universal* “∀” que significa “para todo” visto por primera vez en 1935 y publicado en *Untersuchungen ueber das*

logische Schliessen de Gerhard Gentzen (1909 - 1945). El símbolo *cuantificador existencial* “∃” que significa “existe” apareció por primera vez en 1897 en *Formulaire de mathematiques* de Giuseppe Peano (1858 - 1932).

Por añadidura, el signo *está incluido* “⊂” que significa “este conjunto es un subconjunto de” y el signo *incluye* “⊃” que significa “este conjunto tiene como subconjunto a” aparecieron en 1890 en *Vorlesungen übre die Algebra der Logik* de Ernst Schröder (1841 - 1902). El símbolo *es en* “∈” que significa “es un elemento de” apareció por primera vez en 1885 en *Formulaire de mathematiques* de Giuseppe Peano (1858 - 1932). Peano usó originalmente la letra griega ε (que es la primera letra de la palabra latina *est*, que significa “es”), pero fue Bertrand Russell (1872 - 1970) en 1903 en su libro *Principles of mathematics* quien introdujo la versión estilizada moderna. Por su lado, el símbolo *negación de es en* “∉” que significa “no es un elemento de” apareció por primera vez en 1939 en *Theorie des ensembles* de Nicholas Bourbaki.

Entre otros símbolos que vale la pena señalar en esta sección, está el símbolo *llaves encerrando los elementos de un conjunto*

$$\{\},$$

que fue usado por primera vez en 1907 en *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre* de Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871 - 1953). El símbolo **p** para una proposición fue usado por primera vez en 1897 en *Studi di logica matematica* de Giuseppe Peano (1858 - 1932).

Asimismo, la *negación*, conocida por su símbolo “~”, fue usado por primera vez en 1897 en *Studi di logica matematica* de Giuseppe Peano (1858 - 1932), aunque ~**p** para “negación de **p**” aparece por primera vez en 1908 en *Mathematical logic as based on the theory of types* de Bertrand Arthur William Russell (1872 - 1970). El símbolo *disyunción* “∨”, que significa “o” fue usado por primera vez en 1906 en *The theory of implication* de Bertrand Arthur William Russell (1872 - 1970), y **p** ∨ **q** que significa “**p** o **q**” aparece en 1908 en *Mathematical Logical as based on the Theory of Types* de Bertrand Arthur William Russell (1872 - 1970). El símbolo *conjunción* “∧”, que significa “y” fue usado por primera vez en 1930 por Arend Heyting (1898 - 1980).

También se sabe que el símbolo *unión* “∪” que significa “tomar los elementos que están en cualquier conjunto”, y el símbolo *intersección* “∩” que significa “tomar los elementos que los dos conjuntos tienen en común”, aparecen por primera vez en 1888 en *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann precedente dalle operazioni della logica deduttiva* de Giuseppe Peano (1858 - 1932).

A su vez, el *conjunto vacío* designado por el símbolo “∅”, significa “el conjunto sin ningún elemento” y se usó por primera vez en 1939 en el libro *Éléments de mathématique* de Nicholas Bourbaki, que fue tomado simultáneamente de los alfabetos Norwegian, Danish y Faroese por el miembro del grupo André Weil (1906 - 1998). Es muy importante también, mencionar al símbolo *infinito* “∞” que denota “una cantidad de magnitud arbitrariamente grande”, el cual fue introducido por primera vez en 1655 en el libro *De Sectionibus Conicis*

de John Wallis (1616-1703).

Incluso, el símbolo *omega* “ ω ” que denota “primer número ordinal de la segunda clase”, utilizado inicialmente en 1883 en *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre* de Georg Cantor (1845 - 1918). Gracias a este matemático, se sabe de la existencia de los símbolos “ $\aleph_0$ ” que denota “el número cardinal transfinito más pequeño” y “ $\aleph_1$ ” que denota “el siguiente número cardinal superior” apareció por primera vez en 1895 en *Mathematische Annalen* del mismo Georg Cantor (1845 - 1918).

5. Algunas notaciones de cálculo.

En cálculo aparecen algunos símbolos como el de *función* “ $f(x)$ ”, siendo utilizada por primera vez en 1734 en *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* de Leonhard Euler (1707 -1783), quien también introdujo el símbolo *suma* “ Σ ” en 1755. También se sabe del símbolo *diferencial* “ $dx, ddx, d^2x, d^3x, \dots$ ”, comenzó siendo empleado en 1675 por Wilhem Gottfried von Leibniz (1646 - 1716). Por esta línea, se encuentra el símbolo *derivada*

$$\frac{dy}{dx},$$

donde $y = f(x)$ y f una función, fue visto por primera vez en 1675 por Wilhem Gottfried von Leibniz (1646 - 1716), y los símbolos “ f' ” que significa “primera derivada”, “ f'' ” que significa “segunda derivada”, “ f''' ”, $\dots$, donde $f(x)$ una función, fue utilizado inicialmente por en 1797 en *Théorie des fonctions analytiques* de Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), y el símbolo “ $D_x y$ ” se introduce en 1800 en *De calcul des dérivations et des usages dans la théorie des suites et dans le calcul différentiel* de Louis Francois antoine Arbogast (1759 - 1803); el símbolo *derivada parcial* “ $\frac{\partial f}{\partial x}$ ”, “ $\frac{\partial f}{\partial y}$ ”, donde $f(x, y)$ una función, apareció por primera vez en 1786 en *Memoire sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le calcul des variations* de Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833).

Por otra parte, el símbolo *integral indefinida* “ $\int$ ”, apareció en 1675 en *Analyseos tetragonisticae pars secunda* de Wilhem Gottfried von Leibniz (1646 - 1716). El símbolo *integral definida*

$$\int_a^b,$$

fue utilizada por primera vez en 1822 *La Theorie analytique de la chaleur* de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830).

Sumado a lo anterior, está el símbolo *límite* “ $\lim$ ”, introducido por primera vez en 1786 por Simon Antoine Jean L'Huilier (1750 - 1840) en su trabajo *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs*, aunque en principio la abreviación de límite fue “ $\lim.$ ” que gradualmente se llegó a escribir “ $\lim$ ”, que es lo que se utiliza en la actualidad. El símbolo *límite* “ $\lim_{x \rightarrow a}$ ”, que indica “el límite cuando x se aproxima a a ” fue usado por primera vez en 1908 por Godfrey Harold Hardy (1877 - 1947), aunque anteriormente

Karl Weierstrass (1815 - 1897) en 1841 ocupaba la notación “ $\lim_{x=a}$ ”.

6. Algunos números en matemáticas.

Como no iniciar con π , que denota el número 3,141592653589..., siendo empleado por primera vez en 1706 en *Synopsis palmariorum mathesios* de William Jones (1675 - 1749). Sin embargo, fue Leonhard Euler (1707 - 1783) quien popularizó por primera vez en 1748 el uso de la letra π para este número en su libro *Introductio in Analysin Infinitorum*. Otro famoso,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

representa el número 2,718281828459..., y apareció inicialmente en *Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper instituta* de Leonhard Euler (1707-1783). De Euler también se conoce $i = \sqrt{-1}$ (la **unidad imaginaria**) y se usó por primera vez en 1777 en su obra *Institutionum calculi integralis*. Y no menos famoso

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right),$$

que denota el número 0,577215664901..., y apareció por primera vez en 1792, gracias a Lorenzo Mascheroni (1750 - 1800) en *Adnotationes ad Euleri Calculum Integraleum*.

Conclusiones.

Sin una notación bien desarrollada, las distintas áreas de la matemáticas no podrían realizar su gran función en las matemáticas modernas. La historia del desarrollo de los símbolos en matemática no solo es interesante, sino que puede servir como guía en la invención de nuevos símbolos.

Agradecimientos.

Parcialmente financiado por el proyecto Fondecyt 11170129

Referencias.

- [Boy89] C. B. Boyer, *A history of mathematics*, Willey, New York., 1989.
- [Caj11] F. Cajori, *A history of mathematical Notation, I, II*, Dover Publications New York, 2011.
- [Smi58] D. E. Smith, *History of mathematics, I, II*, Dover Publications New York, 1958.

Acerca del autor: Saúl Quispe es Doctor en Matemática de la Universidad de Concepción (Chile). Es investigador en áreas de geometría algebraica y dinámica racional. Entre sus pasa tiempos están los deportes al aire libre como el atletismo y el fútbol; y le encanta pasar un buen rato con sus amigos junto a una parrillada.

Una versión de las actuaciones de Werner Heisenberg durante la Segunda Guerra Mundial.

¿Soy acaso mi propia versión de Mefistófeles o del Erlkönig ¹? ¿ha venido esta quimera a anunciarme una locura senil?, ¿esta visión de mi pasado viene a pedirme cuentas?, ¿a cuestionarme?

Es fácil hoy recordar esos años y los posteriores, lo difícil es hacerlo sin amargura. He amado enteramente a mi nación, y de eso se me acusa; desde que practiqué el montañismo en los Wehrkraftverein ² he amado el suelo de mi patria, en mis interpretaciones en el piano he demostrado mi profunda afición por la música de cámara de Beethoven y Mozart, también por los lieder de Schubert ³, me he involucrado apasionadamente con el desarrollo de la ciencia de mi país; lo confieso, ¡he sido un nacionalista comprometido!, ¿es esto acaso un crimen?

nante para entender y demostrar mi noble intención; no sería esta la única vez en que el orden de los factores si altera el resultado.

De manera sistemática el álgebra que se deducía de las relaciones antes mencionadas no poseía la propiedad de conmutatividad; luego de recibir el consejo de mis colegas (principalmente de Paul Dirac) empleé la muy desconocida para mí en aquel entonces: álgebra de matrices; la que resultó ser muy conveniente no solo para operar los cálculos sino también, para que pudiera identificarse una función vectorial de onda asociada a la matriz que contiene los parámetros de la partícula; lo que constituye la primera coincidencia directa entre mi teoría de Mecánica Matricial y la teoría de Schrödinger en la que su ecuación pertenecía también a un espacio vectorial.

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

⁴Resultantes del hecho de que el estado cuántico del sistema se caracteriza por tener asociado una distribución de probabilidad.

del mismo, esto a causa de la imposibilidad de una medición perfecta. La incertidumbre es una palabra que no solo se halla omnipresente en mi ciencia, sino también acompaña las diferentes hipótesis acerca de mi actuar, de mi escala de valores, de las decisiones políticas en mi vida.

Sigue esta sombra inmutada, sentada frente a mí, con un gesto sereno, viéndome, puro es su ojo, y en su boca no se oculta náusea alguna ⁵, es mi imagen de los años en los que aún no había instaurado el Nacional Socialismo un cambio en el orden económico-cultural alemán, el inicio del Tercer Reich, antes de que todos debiéramos enfrentarnos a decisiones difíciles, y antes de que la ética de los vencedores de la Segunda Guerra Mundial nos pusiera una conveniente letra escarlata en la frente.

Si esa imagen me acusa de filo-nazi, tal acusación no es para mí, una novedad. Con el inicio del periodo del gobierno Nacional Socialista, un importante número de científicos -entre muchos otros grupos sociales- abandonaron Alemania con el fin de evadir los dictados que más adelante se convertirían en las Leyes de Núremberg; siendo yo un científico famoso y de gira por los Estados Unidos se me abrieron las puertas para continuar mi carrera docente en estas latitudes. Se me acusa de no haber abandonado a mi país.

He recibido intensamente el calificativo de “simpatizante Nazi” por parte de los detractores de la Alemania Nacional Socialista, sin que antes se tenga en cuenta que para el Gobierno de Adolf Hitler inicialmente fui una especie de “detractor solapado” por negarme a pertenecer al NSDAP ⁶, y hasta fui calificado como “judío blanco” ⁷ por trabajar en ciencias naturales de forma teórica y sin recurrir de manera inmediata a la experimentación, campo en el que inicialmente se encontraba un significativo número de físicos con ascendencia semita.

Como lo he dicho, ¡soy un nacionalista! Y me sentí siempre comprometido a aportar en el desarrollo científico de Alemania, haber abandonado mi país me hubiera convertido en un traidor, Alemania siempre ha sido para mí algo más grande que el gobierno de turno.

Es cierto que durante la guerra dirigí el programa estratégico militar, que buscaba el desarrollo de una reacción en cadena como consecuencia de la desestabilización del núcleo del uranio 235, lo que podría servir para la generación controlada de energía en un reactor, o eventualmente, para la producción de una bomba de fisión nuclear. Este episodio de mi vida puede ser uno de los mas polémicos, por el contrario, yo lo encuentro como la emancipación de cualquier culpa que se me endilgue.

Niels Bohr y yo trabajamos juntos en Copenhague entre los años 1924 a 1927, un periodo altamente productivo para

ambos. Bohr reprochaba cariñosamente mi insolencia al atreverme a corregirle con altivez, lo que en mi actuar engraido era una constante en esta época, como puede verse en los calificativos despectivos que di a la Mecánica Ondulatoria de Schrödinger, que asociaba a su ecuación un componente probabilístico del comportamiento de las partículas cuánticas - finalmente Paulí demostró que esta ecuación era equivalente a mi teoría de Mecánica Matricial-. También corregí el nombre que en griego dio Yukawa a la partícula que teóricamente pronosticó, la llamó “mesotróon” cuando la acepción “tr” no es pertinente semánticamente en la palabra mesos en el griego antiguo ⁸, por lo que el nombre de la citada partícula pasó corregirse como: mesón.

En cualquier caso, ambos, Bohr y yo, representábamos dos de los rostros más visibles en la mecánica cuántica y como consecuencia, seríamos la primera opción para el desarrollo de la ciencia del átomo.

En 1941 y luego de años de no verle, me dirigí desde Berlín a la Copenhague ocupada para visitar a Bohr; sabíamos que las SS ⁹ tenían sembrados de micrófonos todos los posibles objetivos de interés, por lo que cualquier afirmación que pudiera ser calificada como “traición” debía ser expuesta por mi parte en un lenguaje críptico.

En mi encuentro con Bohr quise darle a entender que mi participación y la del muy competente equipo de científicos alemanes ¹⁰ que dirigía en el proyecto de energía nuclear para el Tercer Reich, tenía como objetivo real y subrepticio evitar que Alemania obtuviera una bomba atómica y, que mi interés, era que las iniciativas de armamento nuclear que se estaban desarrollando en la cooperación anglo-estadounidense llegaran también al estancamiento; era mi intención librar al mundo del terror nuclear.

En favor de demostrar mis intenciones puedo decir que, durante el desarrollo del proyecto en Alemania, mi comportamiento fue sumamente errático, por un lado manteniendo viva la esperanza del logro de los objetivos del proyecto nuclear frente a Albert Speer ¹¹ - para evitar ser removido de la Dirección del proyecto y que mi lugar fuera ocupado por un científico con intenciones menos loables -, y a la vez, por otra parte, comentando la casi imposibilidad de obtener un diferencial positivo de energía en la reacción en cadena a los oficiales que tenían a su cargo la gestión de los recursos en la investigación y desarrollo de la Alemania en guerra, esto, para que eventualmente descartaran la financiación del proyecto.

También tengo como prueba de mi posición contraria al escalamiento nuclear de la guerra, el hecho de que durante mi reclusión y la de la élite científica alemana a mi cargo en las cómodas instalaciones aliadas de Farm Hall, que en el momento en que fuimos enterados de la explosión del primer ar-

⁵Paráfrasis de los atributos que Nietzsche atribuye a Zaratustra, el despierto.

⁶El Partido Nacionalsocialista Obrero Alemán, conocido como Partido Nazi.

⁷El asedio aquí mencionado fue realizado principalmente por los alemanes Premio Nobel en Física, Philipp Lenard y Johannes Stark.

⁸Además de que la esmerada educación que Heisenberg recibió durante su adolescencia en el Gymnasium le formó en lenguas clásicas, su padre que era Doctor en griego y latín; para motivarle le regaló al joven Werner una copia de la tesis doctoral del Kronecker escrita en lenguas clásicas; más que el transformo filológico del obsequio, lo que a Heisenberg le impactó fue la Teoría de Números expuesta.

⁹El ejército de élite Nazi, Las Schutzstaffel o Escuadras de Protección.

¹⁰Entre los miembros más destacados del equipo se encontraba Otto Hahn, Premio Nobel de Química y primero en lograr la fisión de un átomo de uranio.

¹¹Ministro de Armamento y Producción de Guerra Alemán durante la segunda guerra mundial.

tefacto nuclear en Hiroshima, convoqué a mis compañeros de presidio a una reunión urgente para el día siguiente, en la que expuse cálculos detallados de la masa crítica necesaria para el desarrollo del artefacto explosivo atómico; aun cuando tuve algunos errores en la ecuación de difusión, este nivel de conocimiento era contrario al grado de atraso en el que intencionalmente mantuvimos al programa nuclear alemán.

Lamentablemente en 1941 en Copenhague, Bohr se encontraba muy afectado por la invasión de su país por parte del mío, y no logró ver en mí a un aliado sino a un espía que quería manipularle, para conocer el avance de los aliados en la producción de la bomba atómica y para hacerles desistir de su desarrollo, mediante estratagemas y engaños, por lo que interrumpió nuestra reunión y el diálogo para el resto de nuestras vidas, dejándome solo en el empeño de evitar que el mundo en guerra poseyera un arma colosal.

Luego de esta fallida reunión, Bohr - de ascendencia en parte judía -, huyó de la Dinamarca ocupada a América del Norte, y en palabras del Director del Proyecto Manhattan ¹² Robert Oppenheimer, Bohr aportó de manera determinante al desarrollo de la bomba atómica, Enrico Fermi ¹³ también afirmaría que el mecanismo para la detonación de la segunda bomba de fisión (esta de plutonio en Nagasaki) fue también ideado por Bohr.

Entonces, ¿de qué me acusan?, ¿quiénes me acusan?

Los vencedores de la segunda guerra mundial, los aliados, me acusan de participar en el equipo científico designado por el Alto Mando Alemán para el desarrollo de la energía nuclear, en honor de la discusión y en franca lid, asumiré lo que no está demostrado y es que si intenté el desarrollo de la bomba atómica; de ser así, me acusan de haber intentado producir un artefacto explosivo atómico para el Gobierno Alemán - mi país -, en guerra con los aliados y dividido en dos frentes; dicho sea de paso, mi país fue vencido principalmente por las acciones en el frente del este, es decir, por la Unión Soviética.

Quiénes me acusan son los fabricantes de la bomba atómica, los que la lanzaron en dos ocasiones sobre el país Nipón, ya derrotado en las campañas del pacífico. La primera detonación ocurrió en Hiroshima, una ciudad de casi 400.000 habi-

tantes civiles sin importancia estratégica o militar. Para 1950 la cifra estimada de muertos en Hiroshima como consecuencia de la bomba atómica fue de cerca de 200.000 personas, una tercera parte falleció de forma instantánea, los demás en penosa agonía, unas más extensas que otras.

Los que me acusan lanzaron tres días después una segunda bomba atómica en la ciudad de Nagasaki, ocasionando a la larga cerca de 140.000 muertes, en su mayoría civiles, esto cuando el imperio del Japón ya se había rendido y tenía como única condición que prevaleciera el legado de su Emperador Hirohito; este artefacto nuclear se detonó para probar experimentalmente la eficacia del plutonio frente al uranio, y para además darle un claro aviso a la URSS, país que luego de vencer a Alemania ya no sería "necesario" como aliado y para el cual, occidente ya tenía preparada una nueva guerra: la guerra fría; impulsada por los mismos intereses que sirvieron a las otras dos guerras mundiales.

La guerra es el mecanismo catalizador de los más intensos sentimientos humanos, los mejores y los peores; esta aparición de mi pasado, inocente del terror de un conflicto bélico es para mí también un catalizador, dando paso acelerado a una introspección propia del final de los días de un hombre, en la que se hace evidente el verdadero significado de mis actos.

¿Qué valor tiene ser denominado bueno y justo por un malvado?

¿Qué valor tiene la injuria de un tirano?

Dayron Fabián Achury-Calderón

dayronf.achuryc@konradlorenz.edu.co

Acerca del autor: Fabián Achury-Calderón es ingeniero de la UDFJC y estudiante de último semestre de matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Se ha interesado por estudiar la interacción de las matemáticas con otras ciencias. Asesora compañías en asuntos financieros y de dirección estratégica. Le apasiona la ópera, el ballet y las ciencias sociales. Sus pasatiempos favoritos son la lectura y la colección de registros de radio internacional. Disfruta recorrer museos cuando viaja y admite que se conmueve con facilidad. Algún día espera aprender a tocar piano.

¹²Proyecto de la bomba atómica de los aliados durante la segunda guerra mundial, desarrollado en Estados Unidos.

¹³Director Asociado del laboratorio de los Álamos, sitio de la prueba de la bomba atómica del proyecto Manhattan.

K' Problema

Ajedrez, sinónimo de inteligencia, astucia, paciencia, estrategia y más habilidades de índole intelectual, es un juego de muy larga tradición, que al día de hoy se conoce y se practica en todo el mundo. Sus orígenes, cuentan los historiadores, se dieron en la India en algún momento dentro del siglo VII, aunque no fue hasta 1749 que el compositor francés François-André Danican, también campeón de ajedrez de la época por ciertos certámenes que se organizaban en aquel entonces en París, publicó un tratado titulado *Analyse du jeu des echecs*, que al día de hoy es considerado como el primer “manual” oficial de ajedrez, que al ser traducido a diversos idiomas, aportó significativamente para llevar el ajedrez a los más diversos públicos [HW92].

Prácticamente todo lo que pasa en un juego de ajedrez, puede ser explicado con matemáticas, y las aplicaciones y relaciones entre ajedrez y matemáticas a lo largo de la historia, se encuentran de todos los colores y sabores. De todas estas, nos ocuparemos de una, conocida como *el problema de las n reinas*. Pero para llegar hasta allá, remontémonos a 1850 cuando de manera oficial Franz Nauck, publica en la revista *Berliner Illustrirte Zeitung*, una historia alrededor del *problema de las 8 reinas*[RVZ94], consistente en ubicar de todas las maneras posibles en el tablero de ajedrez de 8×8 casillas, 8 reinas de tal manera que no estuvieran amenazadas entre ellas, teniendo en cuenta que en ajedrez, una reina captura a las demás piezas, moviéndose en líneas rectas y diagonales a lo largo y ancho del tablero (ver Figura 1).

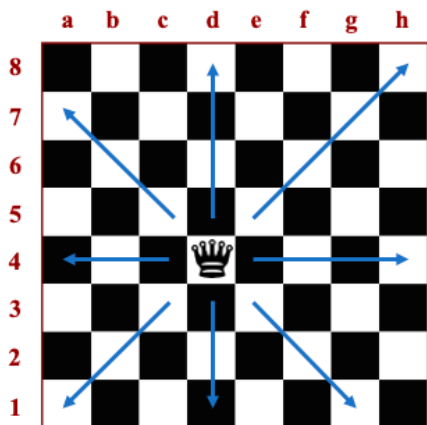


Figura 1: Movimientos de ataque de la reina en un tablero usual de ajedrez .

El problema de las 8 reinas cobró tal popularidad, que el mismísimo K.F. Gauss intentó su solución y conjeturó que

existían 72 diferentes soluciones, pero en 1874, J.W. Glaisher [GJ74] demostró que existían un total de 92 diferentes soluciones al problema. Aunque posteriormente se probó, que de estas 92, solamente 12 son esencialmente distintas, es decir, a partir de ellas las demás se obtienen mediante traslaciones, simetrías y rotaciones.

Vamos a construir una de las soluciones del problema de las 8 reinas, con una estrategia, que hasta donde hemos consultado, parece original, aunque sinceramente sería sorprendente que alguien de los muchos que han trabajado en el problema, no se haya percatado de lo que les mostraremos. Pero primero observemos que el poder de la reina, radica en que posee los movimientos de casi todas las demás piezas del ajedrez, ya que puede desplazarse a lo largo de todas las rectas horizontales y verticales como las torres, y a lo largo de todas las diagonales como los alfiles. El único movimiento que no está en su arsenal, es el del caballo, el movimiento en forma de L. Veamos cómo este peculiar desplazamiento nos permitirá llegar a una solución del problema. Comencemos con una reina ubicada como se indica en el tablero de la Figura 1, y no perdamos de vista que esta primera reina, divide el tablero en 8 regiones habilitadas para ubicar más reinas, 4 de ellas con 3 casillas y las otras 4 con 6 casillas; suena a que debemos ubicar las otras 7 reinas, una, en cada una de estas regiones.

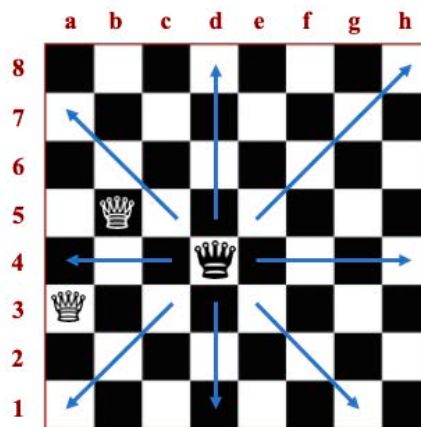


Figura 2: Desde la posición inicial de la primera reina, ubicamos dos más siguiendo el movimiento en L del caballo.

Recordemos que en *notación algebraica*, nuestra primera reina está en la casilla **d4**. La segunda reina que vamos a ubicar, será a partir de la primera en un movimiento del caballo, con lo cual usaremos la casilla **b5** y de nuevo a partir de esta, en movimiento del caballo, ubicamos una tercera reina en la

casilla **a3** (ver Figura 2). Hemos usado dos de las 8 regiones disponibles. Pueden seguir bajo esta lógica y se convencerán de que les faltará “cinco para el peso”.

Para ubicar la cuarta reina, hagamos uso de algo de geometría, trasladando el tablero de la Figura 2 hacia la derecha, de tal manera que podemos identificar su lado derecho con su lado izquierdo, como se muestra en la Figura 3.

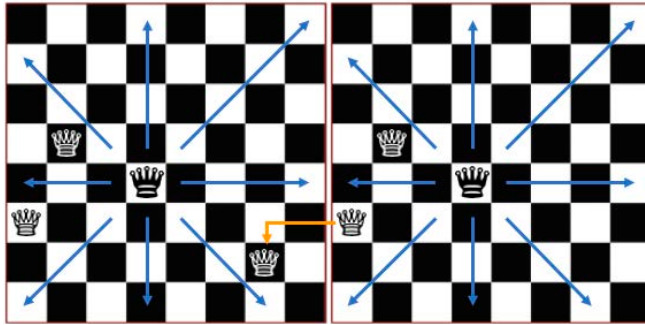


Figura 3: Identificando lados del tablero, podemos continuar ubicando reinas codificando sus posiciones con movimientos del caballo.

La cuarta reina la ubicaremos en la casilla **g2**, que se obtiene de realizar un movimiento del caballo desde la posición **a3** del tablero trasladado, y moviéndonos desde **g2** podemos ubicar la quinta reina en la casilla **e1** (ver Figura 4). Observemos que la región compuesta de las casillas **b1**, **c1**, **c2** ha quedado inhabilitada para ubicar alguna reina.

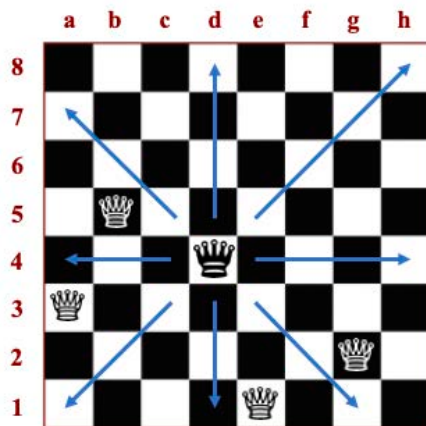


Figura 4: 5 reinas distribuidas de acuerdo al movimiento del caballo.

Ahora traslademos el tablero de la Figura 4 hacia arriba, de tal manera que podemos identificar su lado inferior con su lado superior, como se muestra en la Figura 5. De esta manera ubicaremos la sexta reina en la casilla **f7**, a partir de un movimiento del caballo desde la casilla **e1** del tablero trasladado verticalmente. Inmediatamente podemos ubicar la séptima reina con un movimiento más del caballo desde la posición

de la sexta reina, en la casilla **h6**. Las siete reinas que hemos ubicado, están representadas en la Figura 6.

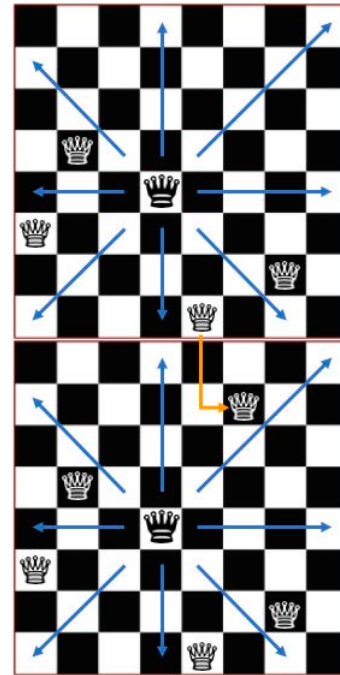


Figura 5: Trasladamos el tablero en la dirección de las columnas, de tal manera que logremos con un movimiento del caballo de un tablero al otro, ubicar una nueva reina.

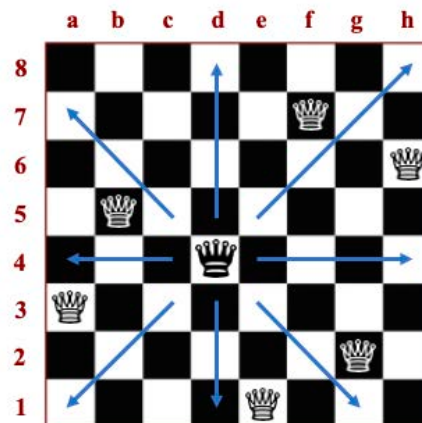


Figura 6: 7 reinas distribuidas de acuerdo al movimiento del caballo.

Observemos que en las regiones en las que hemos ubicado alguna reina, ya no se disponen de casillas que no estén amenazadas por alguna de las siete reinas. Hagamos una nueva traslación horizontal de este último tablero hacia la izquierda, identificando de nuevo el lado izquierdo con el derecho. De esta manera observamos que la séptima reina ubicada en la casilla **h6** del tablero trasladado, queda conectada mediante un movimiento del caballo con la segunda reina del tablero original, en la casilla **b5**, esto es, hemos obtenido una trayectoria,

una órbita, (como la que describen los planetas en su movimiento alrededor del Sol) que conecta siete reinas por medio de movimientos del caballo, que no se atacan mutuamente. De manera más precisa, hemos obtenido una trayectoria cerrada con paso de caballo que da las posiciones de siete reinas en el tablero de ajedrez que no se atacan una con otra (ver Figura 7).

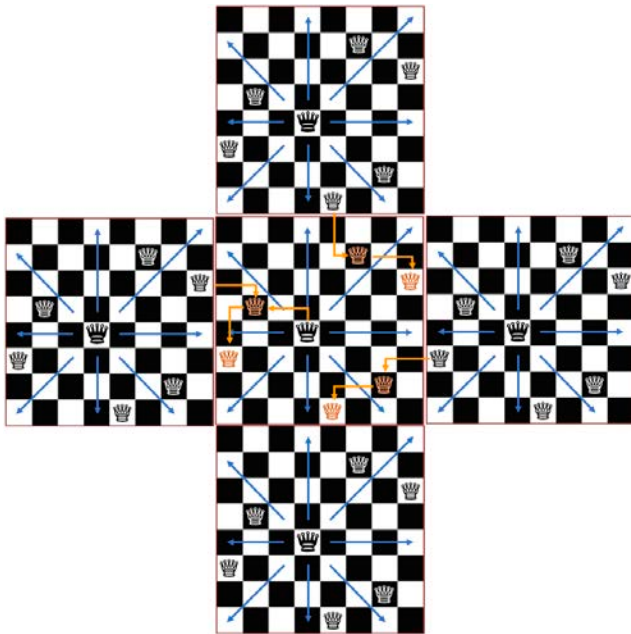


Figura 7: Después de cuatro traslaciones del tablero sobre sí mismo, las flechas amarillas muestran como se obtiene una trayectoria cerrada con saltos de caballo para ubicar siete reinas.

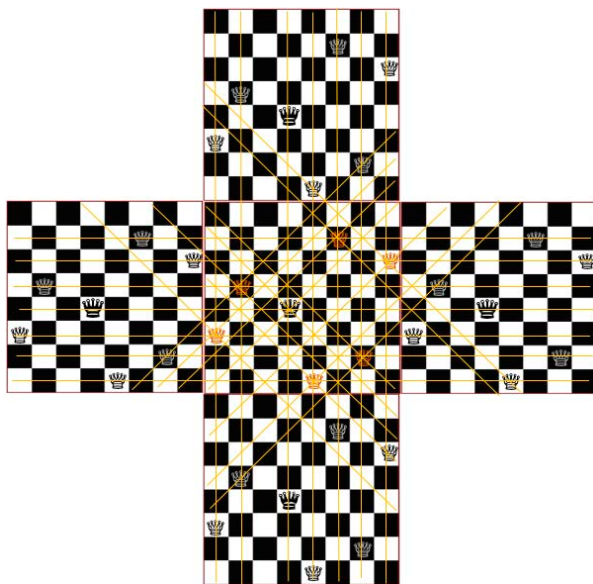


Figura 8: En el tablero central solamente hay una casilla libre de ataques de las demás reinas.

Finalmente, después de ubicar de manera correcta siete reinas, estamos a un paso de resolver el problema, si no es evidente, extendamos las líneas de ataque de todas las reinas ya ubicadas, simplemente para observar que queda una única casilla libre del ataque de cualquier reina, la casilla **c8**.

De esta manera hemos obtenido una muy elegante solución al problema de las 8 reinas, compuesta de una trayectoria cerrada que recorre las casillas **d4, b5, a3, g2, e1, f7, h6** haciendo uso del movimiento del caballo y la casilla **c8**.

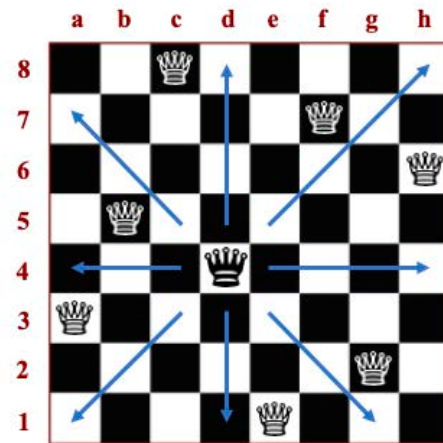


Figura 9: Una solución al problema de las 8 reinas.

¿Podrá el movimiento del caballo, estar de alguna manera, detrás de otras de las 12 soluciones esenciales del problema de las 8 reinas?, ¿las posiciones de alguna de las 12 soluciones esenciales, se podrán recorrer en su totalidad con una trayectoria dada por el movimiento del caballo? El lector interesado en interactuar con este tablero y descubrir más soluciones, encontrará diversos sitios en la red para este propósito, en este sitio <http://www.hbmeyer.de/backtrack/achtdamen/eight.htm#up> podrá jugar y ver qué tan difícil es encontrar otras soluciones. Difícil puede tener diversas connotaciones, teniendo en cuenta que está demostrado que existen 92 posibles soluciones al problema de las 8 reinas, pero por otro lado alrededor de 10^{14} formas de acomodar arbitrariamente las 8 reinas.

El problema de las n reinas no es más que la generalización del caso que hemos estado discutiendo, considerar un tablero de ajedrez de tamaño $n \times n$ y ubicar en él, de todas las formas que sea posible, n reinas sin que ellas se ataquen mutuamente dos a dos [GJN17], y teniendo en cuenta que el problema tiene mal contados 170 años de historia, que al día de hoy, el tablero más grande para el que se conocen todas las soluciones sea de 27×27 (googlear *the Q27 project*), dice mucho de la dificultad del mismo. También lo justifica que su solución implique, ser considerado para recibir un premio de un millón de dólares. ¿Interesado?, aquí hay más información <https://www.youtube.com/watch?v=W0Z4wDt-iYA...>

Referencias.

- [HW92] D. Hooper and K. Whyil, *The Oxford Companion to Chess, Second Edition*, New Edition., 1992.
- [GJN17] Ian P. Gent, Christopher Jefferson, and Peter Nightingale, *Complexity of n -queens completion*, J. Artificial Intelligence Res. **59** (2017), 815–848.
- [GJ74] Glaisher J., *On the problem of the eight queens*, Philosophical Magazine **18** (1874), 457–467.
- [RVZ94] Igor Rivin, Ilan Vardi, and Paul Zimmermann, *The n -queens problem*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), no. 7, 629–639.

Dedicado al pollito más inteligente del mundo...

John A. Arredondo
alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co

Política Editorial

El Paskín Matemático es una producción del Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Está abierto a todos y todas. Si tienes interés en escribir un artículo con cualquier tipo de contenido matemático, reseñar a un personaje, comentar un problema o tienes comentarios sobre nuestra publicación, envía un mensaje a paskin@konradlorenz.edu.co

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + V(q)$$

El Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz fue creado en 1998. Conoce más acerca de nuestro programa en nuestra página institucional

<http://www.konradlorenz.edu.co/es/aspirantes/carreras-universitarias/carrera-de-matematicas/presentacion.html>

Bogotá, Colombia. 2020

PASKÍN MATEMÁTICO

Volumen 2, No. 2, 2020

Contenido

- Jesús R. Muciño Raymundo
Las matemáticas emanan de la naturaleza.....1
- Dennis Gabriela Coy Calderón
Rubik, el pasatiempo de un algebrista.....9
- Julián Jiménez Cárdenas
Una probada de teoría de la medida.....22
- Saúl Quispe
Un lenguaje llamado Matemáticas.....27
- Dayron Fabián Achury
MateKuento.....30
- John A. Arredondo
K'Problema.....33

*No es que no puedas ver la solución. Es que
no puedes ver el problema.*

GK Chesterton

