



e-ISSN
2665-2471

PAS XIN MATEMÁTICO

 **KONRAD
LORENZ**
FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

Vol. 2

No. 1

$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

$$\sin \frac{3}{4}$$

$$V + E + F = 2$$

$$m=s$$

$$\sqrt[3]{a\sqrt{4}}$$

$$\sum_{n=1}$$

$$(x)=d$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot [\text{Adj}(A)]^t$$

$$n! = \prod_{k=1}^n k$$

$$\sqrt{x^2-x}-x^2$$

$$\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$y^3$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\tan \alpha}$$

$$???$$

$$\frac{x_A + x_C}{2}$$

$$m \cdot S/2$$

$$(x) = \frac{d}{3}$$

$$f(x) \sim \frac{\alpha \pi}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{n+1}} x^2 - (n-1)x}{1 + (n-1)2x^2}$$

PASKÍN MATEMÁTICO

<https://editorial.konradlorenz.edu.co/2019/02/paskin-matematico.html>

e-mail: paskin@konradlorenz.edu.co

EDITORES

John A. Arredondo

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co

Carlos Alberto Díez

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
carlosa.diez@konradlorenz.edu.co

Esta publicación puede ser difundida y reproducida con fines académicos y científicos por todos aquellos que tengan a bien hacer un correcto uso de su contenido.

ISSN 2665-2471

Fundación Universitaria Konrad Lorenz: Tel: (+57 1) 347 23 11, Carrera 9 Bis No. 62 – 43 Bogotá – Colombia, eMail: info@konradlorenz.edu.

Carácter académico: Institución Universitaria. Personería Jurídica por Resolución 18537 del 4 de noviembre de 1981 del Ministerio de Educación Nacional. Institución de Educación Superior sujeta a inspección y vigilancia por el Ministerio de Educación Nacional (Art. 2.5.3.2.10.2, Decreto 1075 de 2015).

Matemáticas ocultas en el arte

Rafael Melo Jiménez*

rafael.meloj@konradlorenz.edu.co

1. Introducción

No importa de qué se trate, podemos encontrar herramientas matemáticas en cualquier cosa que contemplemos. Puede tratarse de la situación más diversa o del objeto más simple; solo basta con observar un rato y ellas aparecerán solas. En este escrito veremos algunos ejemplos de obras de arte que tienen una relación estrecha con las matemáticas. Dicha relación la clasificaremos en dos: explícita e implícita. Esta última a su vez se clasificará en otras dos: las que tienen una relación invisible y las que tienen una relación visible.

2. Relación explícita

Desde pequeños, la naturaleza y la sociedad nos enseña algunas de las herramientas matemáticas fundamentales, por ejemplo, la luna tiene forma circular, los árboles son segmentos de recta, la superficie de una mesa es plana, etc[1]. Para muchas personas, estos objetos son ya, de por sí, obras de arte, más aún si los mezclamos con diferentes colores en distintas tonalidades, y si además van organizados de alguna manera. Esto es lo que pasó por la mente, quizás de manera inconsciente, del reconocido artista colombiano: Omar Rayo (1928-2010), quien dedicó la mayoría de sus trabajos a las figuras geométricas, en especial los rombos y los segmentos de recta. Entre sus obras más famosas se encuentran: Kumo XV (1973) y Saratoy III (1980) (ver Figura 1).

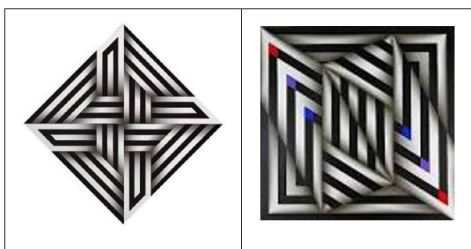


Figura 1: Obras de Omar Rayo; Kumo XV y Saratoy III, respectivamente.

Estas figuras le sirvieron al autor como un medio para expresar los sentimientos y emociones que cruzaban por su cabeza. De hecho, esto es lo que hacen todos los artistas. En ellas podemos apreciar cómo una disposición de segmentos

de recta forman una especie de nudo, que además, con la adecuada utilización de sombras, dan una impresión de relieve.

Otro ejemplo de un artista que se valió de figuras geométricas fundamentales para elaborar sus obras fue el pintor ruso Vasily Kandinsky (1866-1944). Sin embargo, a diferencia de Rayo, sus trabajos son más abstractos, utiliza una gran paleta de colores y envuelven más significados. Podemos apreciar estas ideas en las pinturas: En blanco II (1923) y Curva Dominante (1936) (ver Figura 2).

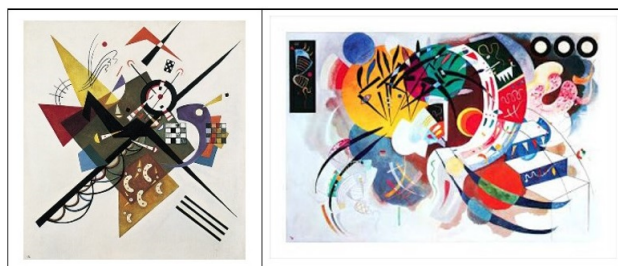


Figura 2: Obras de Kandinsky; En Blanco II y Curva Dominante, respectivamente.

Ahora imaginemos que los nudos de Rayo se fusionan con las figuras abstractas de Kandinsky para representar a una mujer llorando en dos dimensiones (ver Figura 3). El resultado se puede clasificar dentro del movimiento artístico denominado *cubismo*, cuyo padre es el famoso artista Español Pablo Picasso (1881-1973), en su obra titulada: La mujer que llora (1937).



Figura 3: Obra de Picasso: La mujer que llora.

*Docente de la Facultad de Matemáticas, Fundación Universitaria Konrad Lorenz.

Hay muchos otros ejemplos de artistas [2] en cuyas obras podemos apreciar explícitamente ciertas herramientas matemáticas. Algunos son más realistas y exponen el objeto matemático directamente. Tal es el caso de Jacopo de'Barbari (1445-1515), un pintor italiano que, aproximadamente en el año 1500, en una de sus obras (la más destacada), retrató a un gran matemático de su época, frente a una pizarra donde se encuentran algunos objetos matemáticos (ver Figura 4).



Figura 4: Obra de Jacopo: Retrato de Pacioli.

En ella podemos contemplar al matemático franciscano Luca Pacioli (1445-1517), acompañado al parecer de uno de sus estudiantes, el cual ignora lo que está haciendo su maestro para vigilarnos. Pacioli está realizando la demostración de uno de los teoremas de Euclides, mientras sobre la mesa se encuentran: una tiza, una brújula, un compás, un sólido platónico: el *dodecaedro*, y un libro cerrado que es del mismo Pacioli. Atrás, como un tercer testigo, se encuentra, colgado, un sólido de Arquímedes: el *rombicuboctaedro*, medio lleno de agua.

3. Relación implícita

Como vimos en la sección pasada, muchos artistas utilizan diversos objetos matemáticos de manera explícita como medio para transmitir ideas o sentimientos en sus trabajos. Es más, en el último ejemplo dichas herramientas matemáticas no son el medio, son los sentimientos como tal. Ahora conoceremos algunas obras que utilizan herramientas matemáticas, pero de una manera mucho más discreta, tanto así que podrían pasar desapercibidas. Esta sección estará compuesta por otras dos subsecciones. La primera muestra las obras que tienen una relación implícita invisible y constará de aquellas obras que llevan herramientas matemáticas tan ocultas que son invisibles para la mayoría de espectadores que no centren su atención a los detalles que la componen. La segunda muestra las obras que tienen una relación implícita visible y constará de aquellas obras que, a pesar de que en ellas no se hacen explícitas las matemáticas, son completamente visibles en el sentido de que lo que se quiere representar es alguna de sus interesantes propiedades.

3.1. Relación implícita invisible

Comenzaremos esta subsección hablando de una controverial pintura del Renacimiento, realizada en 1533 por el alemán *Hans Holbein el joven* (1497-1543), conocida como *los embajadores* (ver Figura 5).



Figura 5: Obra de Holbein: Los embajadores.

Como era común en las pinturas del Renacimiento, la obra esconde referencias y significados ocultos. En ella podemos apreciar a dos hombres, muy parecidos, que se sostienen en una mesa que contiene: un globo terráqueo (Geografía), un libro de aritmética (Matemáticas), Un instrumento (Música), y un libro de coros (Religión), entre otras cosas. Destaca una *mancha* en la parte inferior, y es aquí donde se esconden las matemáticas de esta obra. Por años se pensó que se trataba de un error o un arrebato del autor. Sin embargo, resulta que si contemplamos la pintura desde un ángulo adecuado, vemos que no se trata de una simple mancha (ver Figura 6).

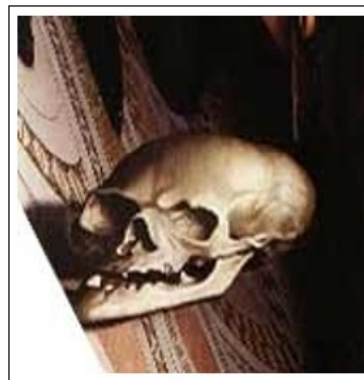


Figura 6: La mancha en Los embajadores.

300 años después se descubrió que se trataba de un cráneo deformado. Sin duda, un gran trabajo de *perspectiva*. Este tipo de gráficos conlleva un dominio total de ciertas fórmulas

geométricas, lo que implica además entenderlas al momento de usarlas. Sin embargo, se desconoce si Holbein tenía conocimiento de ello, o si simplemente usó su intuición y su talento nato como dibujante.

Observemos ahora la Figura 7. Esta obra se llama *las Meninas* (1656), y su autor es un maestro de la pintura universal, el español Diego Velázquez (1599-1660).



Figura 7: Obra de Velázquez: Las Meninas.

No vemos ni un rastro de matemáticas a primera vista en esta pintura. Más aún, nos puede desagradar el hecho de que más de la mitad de la obra se desperdicia en el techo y en los cuadros oscuros que cuelgan en la pared del fondo. En ella podemos observar a un perro casi dormido en primer plano, un grupo de *damitas* (meninas en portugués), con la más pequeña como protagonista, a un pintor que resulta ser el mismo autor, más atrás en la oscuridad a una pareja, en el fondo un cuadro con otra pareja retratada, y finalmente una puerta abierta donde se visualiza a un hombre con intenciones de salir. Notemos que hay algo que centra nuestra atención en la obra cuando se observa y es justamente el hombre con intenciones de salir del fondo, pues afuera se ve muy iluminado. Esto es lo que se conoce como *punto de fuga*. La distribución de los elementos que conforman esta pintura, están organizados de tal manera que se pueden pensar como una *sucesión* de puntos que atraviesa todos los rincones de la obra, y que finalmente *converge* al punto de fuga. No importa donde comencemos a mirarla, nuestros ojos se moverán solos hasta cumplir con el objetivo de chequear todas las partes de la obra. La noción de sucesión convergente es una herramienta matemática bastante común, y ampliamente utilizada en distintas ramas como el análisis y la topología.

Hay muchos más ejemplos que caben dentro de esta subsección, pero la finalizaremos hablando de una de las obras más famosas de la historia de la humanidad, y que seguramente has visto por ahí, ya sea la imagen real o en forma de *memé*. La cantidad de enigmas que giran en torno a ella la ha hecho merecedora de ese título, incluso hoy en día se siguen generando hipótesis acerca de significados ocultos que se esconden en ella. Hay películas, libros, restaurantes, juegos, etc, que han usado su imagen para capturar la atención de las personas. Se trata de *La Gioconda*, un óleo¹ pintado entre 1503 y 1519, por el genio italiano Leonardo da Vinci (1452-1519).

La Gioconda, también conocida como la *Mona Lisa* (ver Figura 8), retrata a una mujer cuya identidad ha generado debates. Es una obra interesante desde cualquier punto de vista. No sólo nos cautiva la belleza del cuadro en sí, sino también la técnica que el autor utilizó para conseguir plasmar lo que quería. Por ejemplo, el inteligente juego de sombras que bordean sus labios, crean la impresión de seriedad cuando se le ve directamente, pero cuando fijamos la vista en otra parte, periféricamente intuimos que ella está sonriendo.



Figura 8: Obra de Leonardo da Vinci: La Gioconda.

Para ver las herramientas matemáticas en esta obra de arte, tenemos que hablar primero del *número de oro*, también llamado *proporción áurea* o *razón divina*. Se trata de un número irracional representado por la letra griega phi minúscula, ϕ , el cual surge del siguiente problema geométrico: dividir en dos un segmento de recta, de tal forma que la razón entre la longitud de todo el segmento y el trozo más largo sea igual a

¹El óleo es una técnica de pintura basada en aceites vegetales. Se suele llamar un *óleo* a la obra pictórica elaborada mediante esta técnica.

la razón entre el trozo más largo y el trozo más corto. Si llamamos a al trozo más largo, y b al trozo más corto, entonces la longitud de todo el segmento será: $a + b$, y el problema se puede representar gráficamente como en la Figura 9.

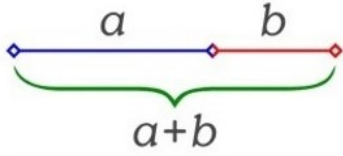


Figura 9: Problema geométrico que nos lleva a φ .

Dicha razón es el famoso número φ . En símbolos:

$$\varphi := \frac{a}{b}, \text{ donde, } \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

El problema anterior genera la ecuación cuadrática:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0,$$

y su solución positiva es el mencionado número:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803398\dots$$

El número φ tiene propiedades curiosas, como que su cuadrado: φ^2 , y su inverso multiplicativo: $\varphi^{-1} = 1/\varphi$, tienen la misma expansión decimal que el original:

$$\varphi^2 = 2,61803398\dots, \text{ y } \varphi^{-1} = 0,61803398\dots,$$

además φ está relacionado con la famosa *sucesión de Fibonacci*²: $\{F_n\}_n$, de varias formas, entre ellas:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi,$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - (1 - \varphi)^n).$$

Este número aparece en distintas situaciones producto de fenómenos naturales, tales como huracanes, copos de nieve, plantas, etc. Con el transcurso del tiempo, entre rumores y comentarios, estas apariciones le han dado un papel de objeto divino, de aquí la razón de sus múltiples nombres. Además de esto, φ se relaciona estrechamente con la estética de las cosas que llevan medidas cercanas a él, como por ejemplo la sonrisa de las personas [3].

Ahora que conocemos la proporción áurea, podemos definir lo que es un *rectángulo áureo*. Se trata de un rectángulo

cuyos lados satisfacen la relación geométrica que produce al número φ (ver Figura 10).

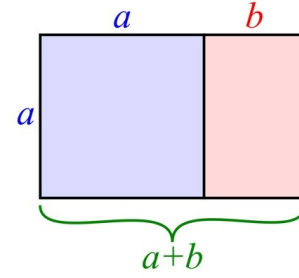


Figura 10: Un rectángulo áureo.

Los rectángulos áureos los encontramos en objetos comunes (hechos a propósito con estas medidas), tales como las tarjetas de crédito, algunas construcciones arquitectónicas, y los marcos de algunas obras, como por ejemplo el de la Mona Lisa y el de las Meninas (ver nuevamente las Figuras 7) y 8.

Finalmente, un simple proceso iterativo aplicado en los rectángulos áureos³, nos lleva a la construcción de una hermosa curva llamada la *espiral de Durero* (ver Figura 11), una curva muy famosa, ya que sigue un patrón con el que muchos objetos naturales se suelen desarrollar, como por ejemplo: los cuernos de algunos animales, las conchas de ciertos moluscos, la distribución de las hojas en las plantas, etc.

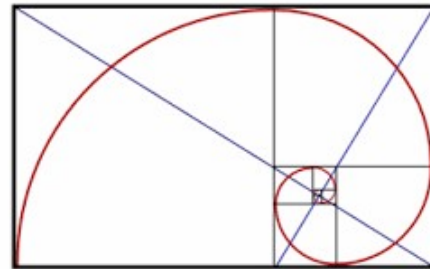


Figura 11: La espiral de Durero.

Así, ya podemos revelar las herramientas matemáticas en la Mona Lisa. Como ya se mencionó, el rectángulo que limita a dicha obra es un rectángulo áureo (ver el lado izquierdo de la Figura 12), y por otra parte, ella sigue el patrón de la espiral de Durero, en otras palabras, el físico de la Gioconda guarda las proporciones de la razón divina (ver el lado derecho de la Figura 12).

²La sucesión de Fibonacci es una famosa secuencia recursiva de números naturales, definida por:

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1, \\ F_{n+2} := F_n + F_{n+1}. \end{cases}$$

De esta manera: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, \dots$

³Dicho proceso iterativo se puede describir así: en el primer rectángulo grande, unir los vértices opuestos mediante un arco de circunferencia, hacer lo mismo con el segundo, y así sucesivamente. En la Figura 11 se encuentra el mencionado proceso.

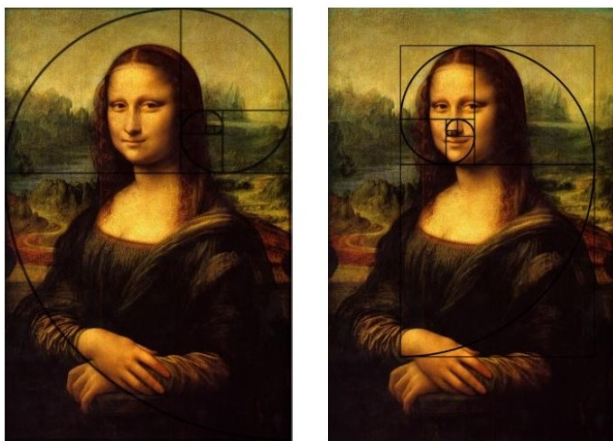


Figura 12: La espiral de Durero en la Mona Lisa.

3.2. Relación implícita visible

Esta subsección está gobernada por una sola persona, mencionada en algunas partes como *el artista favorito de los matemáticos*. Estamos hablando de Maurits Cornelis Escher (1898-1972), un artista holandés del siglo XX, quien dedicó su vida a demostrar en sus obras lo que solía decir con sus palabras: *solo quienes intentan cosas absurdas alcanzarán lo imposible*.

En sus trabajos⁴, Escher trata diversos temas, y a pesar de que no se hace explícito, todos están relacionados directamente con las matemáticas, de aquí la razón del nombre de esta subsección. Esa matemática evidente presente en cada una de sus obras es una característica especial de ellas y lo más increíble de esto, es que no es necesario ser un experto en matemáticas para descubrirlo; cualquier persona sin ninguna formación en ciencias puede constatarlo simplemente observando con detalle lo que sucede dentro de ellas.

Para comenzar, consideremos la Figura 13, llamada: *Galería de grabados* (1956). En ella se aprecia una realidad distorsionada con un círculo blanco en su centro. Un joven está mirando un grabado en el que él mismo aparece observándose. Esa visión de uno mismo, pero en otra realidad, recrea el hecho de que todo espacio vectorial tiene su propio espacio dual, y si se va más allá, es decir al dual del dual, estamos llegando a una parte del primero (teorema de reflexividad: todo espacio vectorial está embebido en su doble dual). Bueno, pero, ¿qué pasa con el círculo blanco?, ¿qué papel juega dentro de esta interpretación? Respecto a la primera pregunta, el mismo Escher apuntó que, *allí todo se vuelve tan detallado que proseguir hubiera sido imposible*. En el año 1998, un profesor de la Universidad de Leiden, llamado Hendrick Lensstra, comenzó una investigación acerca de este enigma y dos años más tarde, mediante la utilización de distintos programas computacionales, encontró que lo que se obtenía allí era el llamado *efecto Droste*, es decir, allí dentro debía ir la misma

imagen original rotada aproximadamente 180 grados, y en su centro, otra vez la misma imagen rotada, y así sucesivamente. Con la ayuda de un computador, hacer imágenes que muestren el efecto Droste es muy sencillo, pero hacerlo a pulso, es algo que solo un genio como Escher podría conseguir.

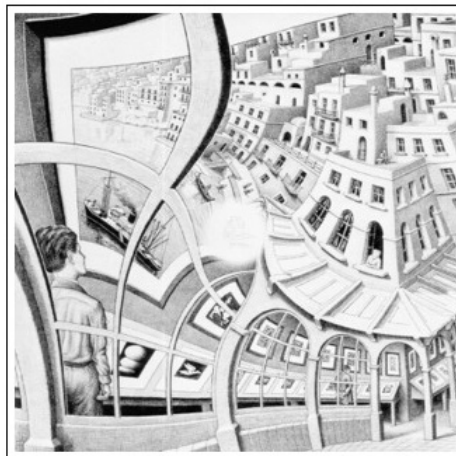


Figura 13: Obra de Escher: Galería de grabados.

El efecto Droste describe un comportamiento de *autosimilaridad*, el cual está directamente relacionado con ciertos objetos matemáticos bastante populares hoy en día; los *fractales* (ver Figura 14), curvas que comparten esa peculiaridad en todo punto, que no son diferenciables, y con las que se pueden describir muchas situaciones [4].

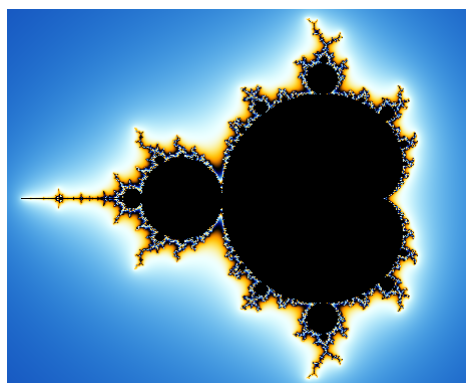


Figura 14: Fractal llamado: el conjunto de Mandelbrot.

Otras herramientas matemáticas se encuentran en *Caballos y jinetes* (1949), y en *Aire y agua I* (1938) (ver Figura 15). Claramente en ellas se exponen propiedades de simetría y periodicidad, características fundamentales en ciertas aplicaciones. De hecho, si analizamos la primera imagen, tenemos un cubrimiento total del plano, llegando al concepto de compacidad. Más aún, en la segunda imagen vemos cómo un ave poco a poco se convierte en un pez (o viceversa). Lo que se presenta aquí es una deformación gradual, un proceso típico

⁴En su mayoría, pinturas, y los demás, grabados.

en una hermosa rama de las matemáticas llamada: *topología*.

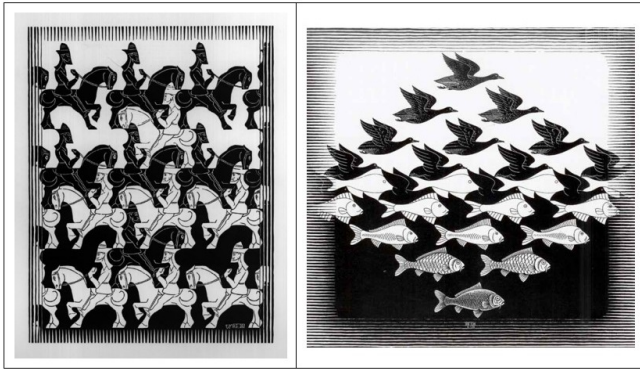


Figura 15: Obras de Escher: Caballos y jinetes, y aire y agua I, respectivamente.

En *Reptiles* (1943) (ver Figura 16), podemos viajar de un mundo de dos dimensiones a otro de tres, e incluso devolvernos. Mapeos inyectivos que van de un espacio a otro de dimensiones diferentes, son comunes en otra rama de las matemáticas llamada: *análisis funcional*. Dichos mapeos, también llamados transformaciones, son el medio de transporte para ir de un universo a otro, y un ejemplo excepcional de esto es la transformada de Fourier.



Figura 16: Obra de Escher: Reptiles.

La *cinta de Mobius* es un objeto matemático muy conocido dentro del campo de la *geometría diferencial*. Es una superficie (no orientable) con la interesante propiedad de que posee una sola cara (y un solo borde). Escher quedó fascinado con dicho objeto, y en su segundo intento por plasmarlo, nos regaló la excelente imagen de la Figura 17.

Ni siquiera el organizado mundo de las matemáticas se escapa de las paradojas y las contradicciones. De hecho, este tema ha partido en dos la historia de la reina de las ciencias con los resultados del matemático austriaco Kurt Goedel (1906-

1978), más precisamente con sus teoremas de incompletitud. Justamente este fue otro de los temas que trató Escher en sus obras. Cosas imposibles o inexplicables desde el punto de vista intuitivo, es lo que quiso plasmar Escher en esa nueva etapa de su vida.

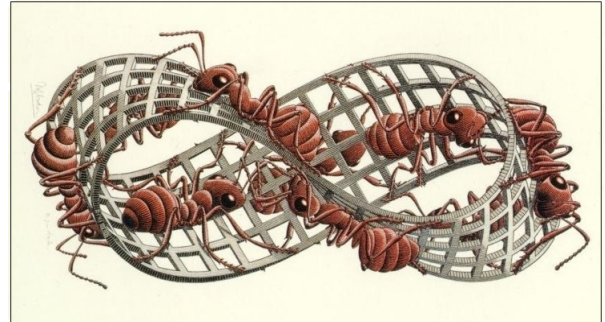


Figura 17: Obra de Escher: Cinta de Mobius II.

El *quinto postulado de Euclides*, la *paradoja de Russell* y la *hipótesis del continuo*, son ejemplos dentro del mundo de las matemáticas que describen ese tema en el que Escher estaba ahora interesado. En el mundo del arte, las siguientes obras de Escher, llamadas *Escalera arriba y escalera abajo* (1960) y *Cascada* (1961), hacen lo mismo, pues en la primera obra tenemos personas subiendo y bajando simultáneamente, y en la segunda, tenemos una cascada sin altura (ver Figura 18).

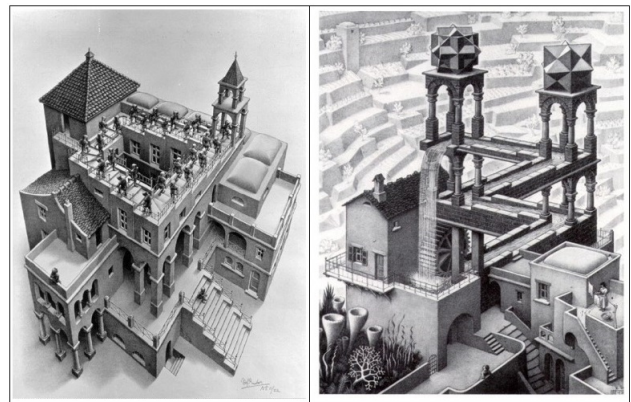


Figura 18: Obras de Escher: Escalera arriba y escalera abajo, y Cascada, respectivamente.

Pero las anteriores no son las únicas obras de Escher que representan conjeturas, hay otras que expresan acertijos como *Belvedere* (1958), donde podemos encontrar un hombre pensativo con un cubo imposible en sus manos, y donde las columnas que conforman una torre están adentro y afuera a la vez (ver Figura 19). La noción de estar adentro y afuera al mismo tiempo hace referencia a otro objeto matemático famoso: la *botella de Klein* (ver Figura 20), además del concepto de *frontera*, que ante estos ejemplos vemos que no es tan intuitivo que digamos.

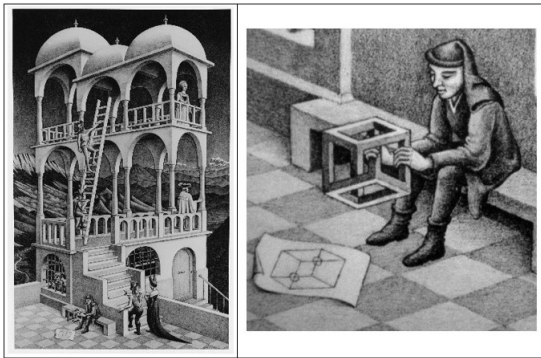


Figura 19: Obra de Escher: Belvedere.

Para terminar abordaremos el tema del infinito, otra gran herramienta matemática con la que Escher luchó. En esta ocasión, el artista estaba fascinado con la idea de representar el infinito en un espacio finito, pero naturalmente debía llegar a una parada brusca en alguna parte de la obra.

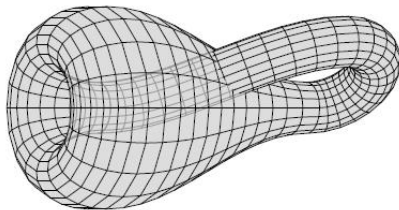


Figura 20: Una botella de Klein.

Entre los distintos intentos que realizó por alcanzar este objetivo, están sus obras: *Pequeño y más pequeño* (1956), y *Círculo límite IV* (1960) (ver Figura 21).

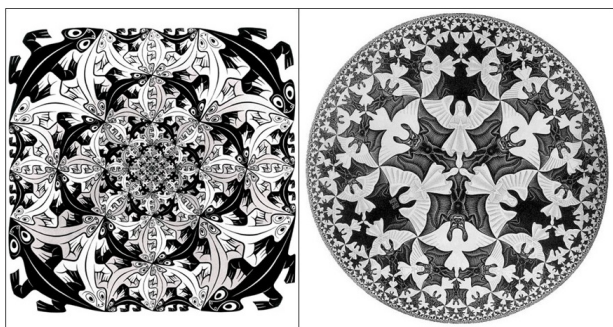


Figura 21: Obras de Escher: *Pequeño y más pequeño*, y *Círculo límite IV*, respectivamente.

Inicialmente, Escher intentó representar el infinito dentro de un cuadrado, y con su centro como punto de escape, como ocurre en *Pequeño y más pequeño*. Sin embargo, este resultado no le satisfizo y cambió radicalmente sus ideas, ahora lo haría dentro de un círculo, con su borde como escape, y así lo hizo en *Círculo límite IV*.

En *Círculo límite IV*, notamos que el tamaño de las figuras decrece paulatinamente cuando nos movemos del centro al perímetro, hasta que finalmente se pierden en el límite visual identificable. Bajo las reglas de la *geometría euclídeana*, tenemos la impresión de que las figuras pierden tamaño conforme se acercan a la frontera del círculo, y que además el borde se encuentra a una distancia relativamente cercana, pero bajo las reglas de la *geometría hiperbólica* [5], todos los ángeles y demonios tienen el mismo tamaño y su distancia al borde es infinita. Visto de esta forma, *Círculo límite IV* es un mosaico periódico, con piezas de tamaño constante y periodicidad uniforme, o mejor dicho, un teselado⁵ regular como el de la Figura 22.

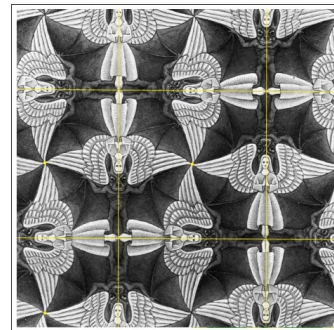


Figura 22: Teselado regular en círculo límite IV.

Una pregunta muy común que muchas personas se hacen después de ver las obras de Escher, es si en algún momento de su vida, él estudió matemáticas, y la respuesta es no. Lo más cercano fue que leyó con gran detalle el artículo de un colega matemático⁶ que conoció en el Congreso Internacional de Matemáticos de Ámsterdam, celebrado en el año 1954. El mismo Escher afirmó que no entendió del todo los conceptos que se manejaban en el artículo, pero que le sirvió para mejorar su trabajo actual. Esto es un ejemplo de que las matemáticas son más intuitivas y perceptivas de lo que parecen.

4. Conclusión

No importa cuál obra de arte estés contemplando, si miras con atención encontrarás un universo matemático escondido, o quizás completamente visible. Las matemáticas en sí son un arte, el arte de la demostración, el arte de la argumentación, el arte de la inspiración, y al mismo tiempo, son el medio con el que otras ciencias pueden desarrollarse. Entre más matemáticas sepas, más fácil será reconocerlas en las pinturas, objetos, situaciones, etc. Están tan dentro de nosotros que a veces, sin darnos cuenta, las usamos hasta en la actividad más simple.

⁵Un teselado es un patrón de figuras que cubre completamente una superficie plana de tal forma que no queden huecos y no se superpongan las figuras.

⁶Se trata de Harold Coxeter (1907-2003), un matemático inglés reconocido por sus contribuciones a la geometría.

Por más abstractas que ellas sean, siempre se aplicarán en alguna cosa. Ten por seguro que, incluso ahora, estás respirando matemáticas.

Referencias

- [1] Matemáticas y arte: https://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1ticas_y_arte
- [2] Artistas matemáticos y matemáticos artistas: <https://steemit.com/art/@joseromero/c/matematicasyarte4/artistasmatematicosyartistasmatematicos>
- [3] Companioni, A., Toledo, A., y Morán, I. La proporción áurea en la evaluación estética de la sonrisa. Revista Habanera de Ciencias Médicas, Vol.15, No.6, 2016.
- [4] Aplicaciones de los fractales: http://xfractal.blogspot.com/2008/06/aplicaciones-de-los-fractales_06.html
- [5] Melo, Rafael. *Las obras de Escher y la geometría hiperbólica*, Ingeciencia, Vol.1, No.2, 76-83, 2016.
- [17] Figura 15: <https://mcescher.com/gallery/most-popular/>
- [18] Figura 16: <https://mcescher.com/gallery/most-popular/>
- [19] Figura 17: <https://mcescher.com/gallery/most-popular/>
- [20] Figura 18: <https://mcescher.com/gallery/most-popular/>
- [21] Figura 19: <https://mcescher.com/gallery/most-popular/>
- [22] Figura 20: <https://matematicascercanas.com/2016/08/20/botella-de-klein/>
- [23] Figura 21: <https://mcescher.com/gallery/most-popular/>
- [24] Figura 22: <http://matebellas.blogspot.com/2017/10/teselaciones.html>

Créditos de las imágenes

- [6] Figura 1: <https://es.scribd.com/document/363887951/Kumo-XV>
- [7] Figura 2: <http://martha-fonosema.blogspot.com/2010/11/sobre-el-blanco-11-1923-kandinsky.html>
- [8] Figura 3: [https://www.ecured.cu/La_mujer_que_llora_\(cuadro_de_Picasso\)](https://www.ecured.cu/La_mujer_que_llora_(cuadro_de_Picasso))
- [9] Figura 4: https://es.wikipedia.org/wiki/Luca_Pacioli
- [10] Figura 5: https://es.wikipedia.org/wiki/Los_embajadores
- [11] Figura 7: https://es.wikipedia.org/wiki/Las_meninas
- [12] Figura 8: https://es.wikipedia.org/wiki/La_Gioconda
- [13] Figura 11: https://es.wikipedia.org/wiki/Espiral_dorada
- [14] Figura 12: https://matematicasbecquerelianas.weebly.com/uploads/6/0/1/0/60102399/andr%C3%A9s_suarez.pdf
- [15] Figura 13: <https://mcescher.com/gallery/most-popular/>
- [16] Figura 14: https://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Mandelbrot

Acerca del autor: Rafael Melo es docente de la fundación universitaria Konrad Lorenz. Su rama favorita de las matemáticas es el análisis funcional, pero admite que sus gustos van desde el álgebra hasta la transformada z. En sus ratos libres le gusta ver series de anime y jugar con sus gatos. Es apasionado por el deporte. Oscar Figueroa y Mateo Carvajal son sus ídolos. Algún día espera terminar una maratón en menos de tres horas y grabar su propia película.

Euler, Riemann y el santo grial de las matemáticas

Leidy Catherine Sánchez Ascanio *
leidyc.sancheza@konradlorenz.edu.co

1. Introducción

La Función Zeta de Riemann ha cautivado a grandes mentes matemáticas, desde el siglo XVII hasta nuestros días, por muchas razones, pero particularmente, por ser una poderosa herramienta para poder analizar la misteriosa distribución de los números primos, quiénes son el cimiento del Teorema Fundamental de la Aritmética, el cual establece que existe una sola manera para escribir cualquier número entero mayor que uno como el producto de números primos; y es por esta razón que los números primos son la base de los números enteros. Por otra parte, la Función Zeta puede ser extendida al estudio de los números algebraicos ¹ e incluso, sistemas dinámicos, y es así como han nacido otras funciones, como la Función Zeta de Dedekind, las Funciones L de Dirichlet, la Función Zeta de Selberg, la Función Zeta de Lefschetz, entre otras, que también conforman un desafío de estudio en la actualidad. En lo que sigue, estudiaremos la Función Zeta de Riemann en un caso muy particular, pero que tiene un gran trasfondo histórico, y nos llevará a una de las expresiones más bellas de las matemáticas, y a uno de los problemas abiertos de mayor misterio. Empecemos.

2. Entrando en contexto

Pasarían muchos años hasta que se le denominara oficialmente de esta manera, aunque históricamente, el estudio de la Función Zeta de Riemann se remonta al año 1644, con el famoso *Problema de Basilea*, formulado por Pietro Mengoli, quien estaba interesado en calcular la suma de los inversos de los cuadrados de los números naturales, y no fue sino hasta el año 1735 que Leonhard Euler halló su valor exacto (véase [Gra07, p. 56]):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}. \quad (1)$$

Además, al reemplazar el exponente 2 en la serie por los números enteros mayores a 1, en 1737 encontró una estrecha relación de esa serie con los números primos, naciendo así la siguiente identidad, conocida como el Teorema del Producto de Euler:

*Estudiante de matemáticas de quinto semestre de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz.

¹Un número $\alpha \in \mathbb{C}$ se dice que es algebraico si satisface la ecuación polinómica $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, siendo $a_i \in \mathbb{Q}$ un coeficiente racional.

Teorema 1 (Producto de Euler [Rie59]). Si $s > 1$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right),$$

siendo $\mathbb{P}$ el conjunto de todos los números primos.

Un siglo después, en 1859, Bernhard Riemann ingresó a la Academia de Ciencias de Berlín y presentó su estudio titulado *Sobre la cantidad de números primos menores que una magnitud dada* (véase [Rie59]) ², en el que manifestó que el comportamiento de la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

extendida en una función de variable compleja ³ influye en el análisis del comportamiento de los números primos. Es así como se originó la Función Zeta de Riemann, definida por [Gra09] ⁴

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (2)$$

en la región $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 1\}$. ⁵

3. Función Zeta para enteros pares

El desarrollo de la Función Zeta de Riemann implica, en particular, conocerla para todos los valores para los que s es un número real, aún más, un entero par o impar. Hace más de 200 años, Euler no sólo había encontrado el valor para $\zeta(2)$, que corresponde al problema de Basilea, esto es, podemos reescribir la ecuación (1) como

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

sino que también encontró la fórmula general, para el valor de la Función Zeta de Riemann cuando s es de la forma $2m$, con

²La publicación original se encuentra en alemán bajo el título *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*.

³Son funciones de (x, y) que dependen sólo de la combinación $(x + iy)$ [MIT].

⁴Esta función es expresada mediante una Serie de Dirichlet, las cuales son del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ en la que s y a_n con $n = 1, 2, 3, \dots$, son números complejos.

⁵Cuando $\operatorname{Re}(s) \leq 1$, la serie de Dirichlet diverge. Por el contrario, si $\operatorname{Re}(s) > 1$, la serie de Dirichlet converge y dicha suma es la famosa Función Zeta de Riemann.

m un número natural [Gra09]. En términos simples podemos enunciar este resultado así:

Teorema 2. Si $\zeta(s)$ es la Función Zeta de Riemann, entonces

$$\zeta(2m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = (-1)^m \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m}, \quad (3)$$

donde $m \in \mathbb{Z}^+$ y B_m son los números de Bernoulli.

Demostración. Antes que nada, vamos a introducir de manera adecuada, los coeficientes B_{2m} que acompañan el resultado de la serie en la Ec. (3):

Definición 3.1. El n -ésimo número de Bernoulli es el coeficiente B_n del desarrollo en series de Taylor ⁶ alrededor del origen de la siguiente función generatriz:

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{2!} - \frac{B_2 x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}. \quad (4)$$

siempre que $|x| < 2\pi$ [Kel18] ⁷.

Ahora sí, demos comienzo a nuestra prueba. Para los primeros n valores de $\zeta(2)$, Euler calculó que estos son menores o iguales que 1, razón que lo llevó a utilizar las propiedades de la función trigonométrica $\sin(x)$, debido a que sus valores siempre son menores o iguales a la unidad. En este orden de ideas, decide aplicar en la función $\sin(x)$ el Teorema de Polinomios de Taylor, expuesto a continuación:

Teorema 3 (Polinomios de Taylor [Apo01]). Sea f una función con derivadas de orden n en el punto $x = 0$. Existe un polinomio P y uno sólo de grado $\leq n$ que satisface las $n + 1$ condiciones

$$P(0) = f(0), P'(0) = f'(0), \dots, P^n(0) = f^n(0).$$

Tal polinomio viene dado por la fórmula

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(0)}{k!} x^k,$$

donde $x \neq x_0$.

Se sabe de la función $\sin(x)$, que sus derivadas en el punto $x_0 = 0$ son: $f(x) = \sin(x)$, $f(x_0) = 0$; $f'(x) = \cos(x)$, $f'(x_0) = 1$; $f''(x) = -\sin(x)$, $f''(x_0) = 0$; $f'''(x) = \cos(x)$, $f'''(x_0) = -1$, $f^{IV}(x) = \sin(x)$, $f^{IV}(x_0) = 0$, ..., y utilizando el teorema anterior, se tiene que la aproximación polinómica para la función $\sin(x)$ es:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n + \dots, \quad (5)$$

de modo que se puede hacer uso del Teorema Fundamental del Álgebra, el cual establece que:

⁶Su desarrollo se encuentra en la demostración de la formula general de la Función Zeta de Riemann para s par.

⁷Los primeros cuatro números de Bernoulli son $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = \frac{1}{30}$ y $B_4 = \frac{1}{42}$.

Teorema 4 (Teorema Fundamental del Álgebra [Ace09]). Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, con coeficientes complejos, entonces $f(x) = 0$ tiene exactamente b_n raíces en el cuerpo de los números complejos, contando multiplicidades, es decir que existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $f(\alpha) = 0$.

En este orden de ideas, una función $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ con $a_n \neq 0$, se puede expresar como

$$f(x) = (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3) \dots (x - b_n).$$

Ahora bien, los ceros de la función $\sin(x)$ son de la forma $n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$, así, por el Teorema Fundamental del Álgebra aplicado en Ec. (5), se obtiene que

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ &= (x - 0)(x - \pi)(x + \pi)(x - 2\pi)(x + 2\pi) \dots, \end{aligned}$$

expresión que se puede factorizar, como $(x - \pi)(x + \pi)$, $(x - 2\pi)(x + 2\pi)$, ..., y en general, cada producto de la forma $(x - n\pi)(x + n\pi)$ es una diferencia de cuadrados; de modo que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = x(x^2 - \pi^2)(x^2 - 4\pi^2)(x^2 - 9\pi^2) \dots, \quad (6)$$

dividiendo la Ec. (6) entre x , se llega a

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots = (x^2 - \pi^2)(x^2 - 4\pi^2)(x^2 - 9\pi^2) \dots \quad (7)$$

y tomando el límite cuando x tiende a cero en toda la expresión ⁸, se tiene que

$$1 = 1 = (-\pi^2)(-4\pi^2)(-9\pi^2) \dots \quad (8)$$

Dividiendo las Ecs. (7) entre (8):

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \\ &= \frac{(x^2 - \pi^2)}{-\pi^2} \frac{(x^2 - 4\pi^2)}{-4\pi^2} \frac{(x^2 - 9\pi^2)}{-9\pi^2} \dots, \end{aligned}$$

y operando la igualdad de la derecha se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \\ &= \left(-\frac{x^2}{\pi^2} + 1 \right) \left(-\frac{x^2}{4\pi^2} + 1 \right) \left(-\frac{x^2}{9\pi^2} + 1 \right) \dots \end{aligned}$$

Reorganizando los valores de cada producto en la parte derecha de la igualdad, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2 \pi^2} \right) \dots, \end{aligned}$$

⁸Recuerde que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Puede encontrar una demostración de este límite en <http://math.hws.edu/~mitchell/Math130F12/tufte-latex/TrigLimits>.

pero, los productos que se encuentran en la parte derecha de la igualdad se pueden reescribir en una sola expresión:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \quad (9)$$

despejando $\sin(x)$ y aplicando logaritmo natural, se obtiene la siguiente expresión:

$$\ln \sin(x) = \ln x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right). \quad (10)$$

Ahora, se procede a hallar la derivada de la expresión (10). Para derivar la parte izquierda, se aplica la regla de la cadena, por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln \sin(x) &= \frac{1}{\sin(x)} \cos(x) \\ &= \cot(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Para derivar la parte derecha de la igualdad, es necesario recordar que el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de dichos términos. De esta manera,

$$\ln x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

de donde,

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x} \quad (12)$$

y aplicando la regla de la cadena, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}} \cdot \frac{-2x}{n^2\pi^2} \\ &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2\pi^2 - x^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Así, por las igualdades (12) y (13) se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \ln x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \frac{1}{x} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2\pi^2 - x^2}. \quad (14)$$

Por consiguiente, la derivada de la expresión (10), que corresponde a igualar las expresiones (11) y (14), resulta

$$\cot(x) = \frac{1}{x} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2\pi^2 - x^2}. \quad (15)$$

Multiplicando por x ,

$$x \cot(x) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2\pi^2 - x^2}. \quad (16)$$

Al aplicar el algoritmo de la división en el término general de la serie expresada en la igualdad (16), $\frac{x^2}{n^2\pi^2 - x^2}$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{n^2\pi^2 - x^2} &= \frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2 - x^2} - 1, \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{n\pi}\right)^2} - 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Teorema 5 (Convergencia de una Serie Geométrica [Wei]).
Una serie geométrica de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

converge a $\frac{a}{1-r}$ si $0 < |r| < 1$.

De manera que la expresión

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{n\pi}\right)^2},$$

de acuerdo al Teorema 5, corresponde a la convergencia de una serie geométrica. En este orden de ideas, la igualdad (17) puede escribirse como:

$$\frac{x^2}{n^2\pi^2 - x^2} = -1 + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{n\pi}\right)^{2m},$$

pero cuando $m = 0$, $\left(\frac{x}{n\pi}\right)^0 = 1$, por lo que se cancela con el -1 , así que

$$\frac{x^2}{n^2\pi^2 - x^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n\pi}\right)^{2m}, \quad (18)$$

entonces, la Ec. (16) es igual a

$$x \cot(x) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m}}{n^{2m}\pi^{2m}} \right), \quad (19)$$

y aplicando la propiedad de intercambio de sumas $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_i c_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_i c_j$ y la propiedad de producto independiente $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_i c_j = \sum_{i=1}^n b_i \sum_{j=1}^m c_j$, la anterior igualdad se puede escribir de esta forma:

$$x \cot(x) = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m}}{\pi^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}, \quad (20)$$

de donde la expresión $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}$, equivale a $\zeta(2m)$, la Función Zeta de Riemann cuando s es un número par. Esto implica que la Ec. (20) sea igual a

$$x \cot(x) = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m}}{\pi^{2m}} \zeta(2m). \quad (21)$$

Por otra parte y tal como se mostró en la definición (3.1), los números de Bernoulli pueden ser descritos por la función generatriz $\frac{x}{e^x - 1}$, así que, aplicando el Teorema de Polinomios

de Taylor en $\frac{x}{e^x-1}$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{e^x-1} \\ f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{e^x-1-e^x x}{(e^x-1)^2}, \\ f'(0) &= -\frac{1}{2}; \\ f''(x) &= -\frac{e^x(-e^x x - x + 2e^x - 2)}{(e^x-1)^3} \\ f''(0) &= \frac{1}{6}; \\ f'''(x) &= \frac{e^x(-4e^x x - x - e^{2x} x + 3e^{2x} - 3)}{(e^x-1)^4} \\ f'''(0) &= 0; \\ f^{IV}(x) &= x e^x \frac{11e^x + 1 + e^{3x} + 11e^{2x}}{(e^x-1)^5} + \\ &\quad 4e^x \frac{-e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x + 1}{(e^x-1)^5} \\ f^{IV}(0) &= -\frac{1}{30}; \end{aligned}$$

...;

donde su aproximación polinómica es:

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \frac{x^6}{30240} + \dots$$

y generalizando la suma de la parte derecha de la igualdad,

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n, \quad (22)$$

siempre que $|x| < 2\pi$.

Además, si se expande la función e^x con el Teorema de Polinomios de Taylor, sus derivadas en el punto $x_0 = 0$ son: $f(x) = e^x, f(0) = 1; f'(x) = e^x, f'(0) = 1; f''(x) = e^x, f''(0) = 1; f'''(x) = e^x, f'''(0) = 1; f^{IV}(x) = e^x, f^{IV}(0) = 1; \dots$ y por tanto, su aproximación polinómica es

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (23)$$

Sustituyendo x por $i\pi$ y sabiendo que: $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, \dots$, la igualdad anterior queda expresada como

$$e^{i\pi} = 1 + \frac{i\pi}{1!} + \frac{-\pi^2}{2!} + \frac{\pi^3(-i)}{3!} + \frac{\pi^4}{4!} + \dots$$

Reorganizando la expresión, se consigue que

$$e^{i\pi} = \frac{i\pi}{1!} - \frac{i\pi^3}{3!} + \frac{i\pi^5}{5!} + \dots + 1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + \dots$$

y su sumatoria queda representada como

$$e^{i\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) i + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n)!} \right). \quad (24)$$

Estas sumatorias están particularmente relacionadas con las aproximaciones polinómicas para $\sin(x)$ y $\cos(x)$. Pues, por el Teorema de Polinomios de Taylor, se sabe que

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \quad (25)$$

y que

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \right). \quad (26)$$

Como $x = i\pi$, al sustituir x en las igualdades (25) y (26), da como resultado

$$i \sin(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) i \quad (27)$$

y

$$\cos(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n)!} \right). \quad (28)$$

Así, sustituyendo las dos expresiones anteriores en la igualdad (24) se sigue que

$$e^{i\pi} = i \sin(\pi) + \cos(\pi), \quad (29)$$

además, si $x = -i\pi$,

$$e^{-i\pi} = -i \sin(\pi) + \cos(\pi). \quad (30)$$

Restando las expresiones (29) y (30), se obtiene que

$$\sin(\pi) = \frac{e^{i\pi} - e^{-i\pi}}{2} \quad (31)$$

y sumando estas mismas expresiones,

$$\cos(\pi) = \frac{e^{i\pi} + e^{-i\pi}}{2i}. \quad (32)$$

Como $\cot(\pi) = \frac{\cos(\pi)}{\sin(\pi)}$, se pueden reemplazar las expresiones (29) y (30) en $\cot(\pi)$, con lo cual

$$\cot(\pi) = i \frac{e^{i\pi} + e^{-i\pi}}{e^{i\pi} - e^{-i\pi}}.$$

Si $x = \pi$, la parte derecha de la Ec. (21), también puede escribirse como

$$x \cot(x) = ix \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}$$

y factorizando e^{-ix} , se tiene que

$$x \cot(x) = ix \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1},$$

$$x \cot(x) = \frac{ix e^{2ix} + ix}{e^{2ix} - 1},$$

entonces,

$$x \cot(x) = ix + \frac{2ix}{e^{2i\pi} - 1}. \quad (33)$$

donde $\frac{2ix}{e^{2i\pi}-1}$ tiene la misma estructura de la igualdad (22), $\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$; así que esta fracción queda expresada de la siguiente manera:

$$x \cot(x) = ix + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2ix)^n,$$

que es igual a

$$x \cot(x) = ix + B_0 + 2ixB_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2ix)^n;$$

pero, como $B_0 = 1$ y $B_1 = -\frac{1}{2}$, entonces

$$x \cot(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2ix)^n. \quad (34)$$

De esta forma, es posible igualar las expresiones (21) y (34), pues ambas corresponden a $x \cot(x)$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m}}{\pi^{2m}} \zeta(2m) &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2ix)^n, \\ -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m}}{\pi^{2m}} \zeta(2m) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2ix)^n, \end{aligned} \quad (35)$$

e igualando los coeficientes de x^{2m} en ambas partes de la igualdad, se obtiene que ⁹

$$-\frac{2}{\pi^{2m}} \zeta(2m) = \frac{2^{2m}}{(2m)!} (-1)^m B_{2m} \quad (36)$$

y así,

$$\zeta(2m) = (-1)^{m-1} \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m},$$

quedando demostrada la fórmula general de la Función Zeta de Riemann cuando s es un número par. Una de las fórmulas más bellas de las matemáticas. $\square$

Luego de tan magnífico resultado, el paso siguiente sería encontrar $\zeta(2m+1)$ con $m \in \mathbb{N}$, esto es, el valor de la Función Zeta de Riemann evaluada en los enteros impares positivos, de hecho, esto fue algo que el gran Euler intentó durante toda su vida, pero que no pudo resolver. Increíblemente, al respecto, se han hecho múltiples intentos, los cuales han sido fallidos hasta la fecha. El avance más sorprendente estuvo en manos de Roger Apéry, quien en 1979 demostró la irracionalidad de $\zeta(3)$, hoy conocida como la constante de Apéry, esto sin tener el valor exacto de dicha constante. Sumado a esto, también se sabe que $\zeta(2m+1)$ con $m \in \mathbb{N}$ contiene una infinidad de irracionales, resultado demostrado por Ball y Rivoal en el año 2001 [BR01]. Encontrar una fórmula general para la Función Zeta de Riemann evaluada en los números impares e incluso,

⁹Nótese que los valores de x^{2m} de la Función Zeta siempre van a ser pares, así, al igualar los coeficientes de la parte izquierda de la igualdad (35) con los de la parte derecha, sólo tomará aquellos en los que n sea un número par, es decir, de la forma $2m$. Es por esta razón que toda la fórmula (36) está en términos de $2m$.

calcular el valor exacto para $\zeta(3)$, son sin duda uno de los retos más extraordinarios de las matemáticas y que hoy en día siguen siendo estudiados por la comunidad científica.

Por otro lado, la Función Zeta de Riemann es el corazón de la Hipótesis de Riemann, la cual establece que los ceros no triviales de la extensión analítica de la Función Zeta de Riemann tienen parte real $\frac{1}{2}$; esta conjetura fue formulada en 1859 por Bernhard Riemann y registrada en la lista de *Los 23 Problemas más Influyentes en la Matemática del Siglo XX*, presentados por Hilbert en el año 1900 y es el único de estos problemas que es partícipe de *Los Siete Problemas del Milenio*, publicados por el Instituto Clay en el año 1998. Y además, debido a la estrecha relación que guarda esta función con la distribución de los números primos, los matemáticos y matemáticas consideran su solución como el santo grial de las matemáticas.

Referencias

- [Ace09] Ospina y Salazar Acevedo, *Matemáticas Fundamentales para Ingeniería*, Universidad Nacional de Colombia, 2009.
- [Apo01] T. Apostol, *Calculus*, Reverté, España, 2001.
- [BR01] K Ball and T Rivoal, *Irrationalité d'une Infinité de Valeurs de la Fonction Zeta Aux Entiers Impairs*, *Inventiones Mathematicae* **146** (2001), 193-207.
- [Gra07] G. Grabinsky, *Euler, el prestidigitador de las series*, *Miscelánea Matemática* **45** (2007), 55-66.
- [Gra09] R. Granero, *El Problema de Basilea: historia y algunas demostraciones*, *La Gaceta de la RSME* **12** (2009), no. 4, 721-737.
- [Kel18] B Kellner, *Bernoulli Numbers*, <https://www.bernoulli.org/> (2018).
- [MIT] MIT, *Functions of a Complex Variable*, <http://math.mit.edu/>.
- [Rie59] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, *Monatsberichte der Berliner Akademie* (1859) (Aleman).
- [Wei] E Weisstein, *Geometric Series*, <http://mathworld.wolfram.com/>.

Acerca de la autora: Leidy Catherine Sánchez Ascanio es ingeniera industrial y actualmente es estudiante de matemáticas en la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. La apasionan los viajes y el deporte. Algún día espera conocer el Ebnalp y el Hoher Kasten.

Simetrías: ¿bloques fundamentales para construir teorías de la naturaleza?

Alejandro Cárdenas-Avendaño*

alejandro.cardenasa@konradlorenz.edu.co

1. Introducción

En 1915 David Hilbert y Felix Klein invitaron a Amalie Emmy Noether a unirse al departamento de matemática de la Universidad de Göttingen. Durante los años anteriores Noether había publicado varios trabajos que extendían algunas de las ideas de Hilbert y le permitieron ganar una notable reputación en la comunidad matemática. Sus contribuciones eran en el campo que hoy conocemos como álgebra abstracta, al estudiar funciones polinomiales que no cambian, i.e., invariantes, bajo transformaciones de grupo. Muy a pesar de su notable reputación, su posición oficial como Privatdozentin (similar al cargo actual de profesor asociado) tardó cuatro años en ser otorgada, después de haber dictado varias clases en la Universidad sin recibir remuneración, que de manera oficial aparecían a cargo de Hilbert.

En Göttingen siguió madurando sus ideas y en 1918 Noether escribió un artículo titulado *Invariante Variationsprobleme* (problemas invariantes de variación) [1], en donde presentó, entre otros resultados, un teorema que ha resultado fundamental para el desarrollo de la física moderna y cómo entendemos nuestras teorías físicas. Con respecto al artículo, Einstein le escribió a Hilbert [2]

Ayer recibí de la señorita Noether un artículo muy interesante sobre invariantes. Estoy impresionado de que tales cosas se puedan entender de una manera tan general. ¡La vieja guardia de Göttingen debería tomar algunas lecciones de la señorita Noether! Ella parece saber muy bien de lo que habla.

El teorema, que para algunas personas como León Lederman (premio Nobel en Física 1988) y Christopher Hill posiblemente está a la par con el teorema de Pitágoras, es el siguiente:

Teorema de Noether: A toda transformación continua de coordenadas o de los campos, que deje invariante la acción en un volumen cuadridimensional, le corresponde una corriente conservada j^μ en la evolución que cumple $D_\mu j^\mu = 0$.

En otras palabras, sin los términos matemáticos, el teorema afirma que cada *simetría* en un sistema físico está asociada a una ley de conservación, y viceversa. Por ejemplo, si el sistema físico es invariante bajo desplazamientos temporales, entonces la energía total del sistema se conserva, o si el momento angular total del sistema se conserva, existe una invariancia al realizar rotaciones angulares. A continuación desglosaremos algunos de los detalles técnicos del teorema y cómo se utiliza hoy en día en la física teórica.

2. La acción en la física teórica

A la distancia más corta entre dos puntos en el espacio plano (Euclidiano) la llamamos *línea recta*. Este concepto resulta sencillo de entender y dimensionar de manera intuitiva, quizá por su representación geométrica y que nuestro devenir transcurre en un espacio que es localmente plano. Sin embargo, cuando el espacio no es plano o nos estamos refiriendo al *espacio físico* (en donde cada punto representa un estado del sistema físico), nuestra misma intuición geométrica requiere otra interpretación.

Un péndulo ideal, por ejemplo, (ver el lado izquierdo de la Figura (2)) realiza una trayectoria que nos resulta familiar, empezando, por ejemplo, desde el reposo (sin velocidad angular) en el tiempo t_1 a un ángulo α medido desde la vertical, hasta llegar al otro extremo en un tiempo t_3 . El péndulo pasa por la vertical en el tiempo t_2 , cuando el ángulo es cero y tiene una velocidad angular máxima ω . Esta dinámica que nos es familiar, es representada a través de una circunferencia en el espacio físico (ver el lado derecho de la Figura (2)), en donde los ejes horizontal y vertical representan la posición y velocidad angular, respectivamente, del péndulo. Un diagrama en el espacio físico nos permite ver la dinámica completa del sistema. Por ejemplo, el espacio físico presentado en la Figura (2) representa la dinámica real de un péndulo, en donde la fricción con el aire hace que el péndulo no alcance exactamente el mismo ángulo tras cada oscilación, hasta que eventualmente queda estacionario sobre la vertical.

¿Por qué el péndulo presentado en la Figura (2) dejó de oscilar? Porque el sistema perdió *energía*, o en otras palabras la energía *no se conservó*. La energía es un concepto físico que

*Docente de la Facultad de Matemáticas, Fundación Universitaria Konrad Lorenz.

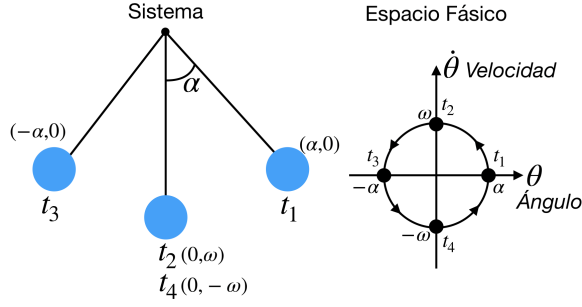


Figura 1: *Dinámica de un péndulo simple. En panel de la izquierda muestra el sistema físico y el de la derecha su representación en el espacio fásico (posición angular, θ , vs velocidad angular, $\dot{\theta}$). En el tiempo inicial t_1 , el péndulo se encuentra en reposo formando un ángulo α medido con respecto a la vertical. El péndulo se mueve en la dirección de las manecillas del reloj hasta alcanzar la vertical, i.e., $\theta = 0$, con la velocidad angular ω máxima en el tiempo t_2 . Su movimiento continúa hasta llegar a un ángulo $-\alpha$, nuevamente sin velocidad angular. En el diagrama fásico, la dinámica del péndulo forma una elipse.*

intuitivamente entendemos pero cuya definición resulta operativa y requiere de, por ejemplo, otros conceptos físicos; a saber el trabajo y la fuerza, de los cuales también tenemos representaciones intuitivas. De manera análoga, uno de los conceptos más fundamentales de la física teórica actual está basado en un principio (o axioma) cuya definición es operacional y su interpretación no es intuitiva, a saber; la *acción*, una cantidad abstracta que describe el movimiento general de un sistema físico.

La acción S de un sistema descrito entre un tiempo inicial t_{in} y un tiempo final t_{fi} está definida por

$$S = \int_{t_{in}}^{t_{fi}} L[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t] dt, \quad (1)$$

en donde $L[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t]$ es el *Lagrangiano* del sistema, i.e., una función que permite describir la dinámica del sistema considerado, $\mathbf{q} = (q^1, q^2, \dots, q^n)$ con q^i siendo la i -ésima coordenada que define la configuración del sistema, y $\dot{\mathbf{q}}$ es la derivada de $\mathbf{q}$ con respecto al tiempo t . El principio de mínima acción afirma que todo sistema sigue una trayectoria que minimiza la acción (1), es decir la trayectoria de un sistema entre dos tiempos, e.g., t_{in} y t_{fi} , es aquella para la cual su acción es estacionaria. A continuación más detalles.

Consideremos pequeños cambios $\delta \mathbf{q}(t)$, en la configuración del sistema

$$\mathbf{q}(t) \rightarrow \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{q}(t) + \delta \mathbf{q}(t), \quad (2)$$

con las siguientes condiciones de frontera

$$\delta \mathbf{q}(t_{in}) = \delta \mathbf{q}(t_{fi}) = \mathbf{0}, \quad (3)$$

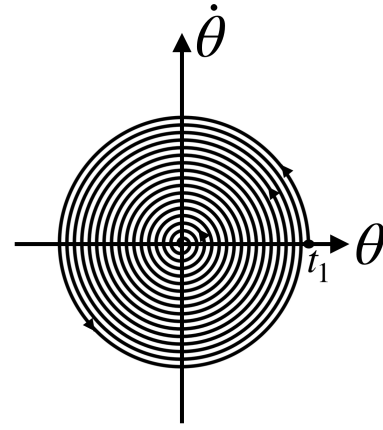


Figura 2: *El espacio fásico de un péndulo real, en donde la fricción con el aire permite una evolución en el espacio fásico, iniciando su recorrido desde un cierto ángulo sin velocidad angular, hasta el origen del plano, cuando el péndulo pierde toda su energía y queda estacionario en la vertical.*

es decir, que la trayectoria del sistema puede variar un poco en cualquier momento, salvo en su configuración inicial y final. El cambio de las coordenadas generado por $\delta \mathbf{q}(t)$ produce una variación¹ de la acción (1) de la siguiente forma

$$\delta S = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{t_{in}}^{t_{fi}} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) dt \right\}. \quad (4)$$

Dado que

$$\delta \dot{q}^i = \dot{\tilde{q}}^i - \dot{q}^i = \frac{d}{dt} \delta q^i,$$

podemos escribir

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i, \quad (5)$$

en donde se ha utilizado la convención de suma de Einstein, $\partial_i q^i \equiv \sum_i \partial_i q^i$. A partir de las condiciones de frontera dadas por la Ec. (3), el primer término del lado derecho de la Ec. (5) no contribuye cuando se integra con respecto al tiempo. Por lo tanto, la Ec. (4) se puede expresar como

$$\delta S = \int_{t_{in}}^{t_{fi}} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt.$$

Al requerir que la acción S sea estacionaria para toda variación pequeña de las las coordenadas Lagrangianas del sistema, i.e. $\delta S = 0$ para todo δq^i , se obtienen las famosas ecuaciones de *Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \quad (6)$$

¹El cálculo variacional es una generalización del cálculo elemental de máximos y mínimos de funciones reales de una variable a funcionales continuos definidos sobre un espacio funcional.

Este sistema de ecuaciones son las ecuaciones de movimiento del sistema, es decir, dado un Lagrangiano que describe un sistema, resolver las Ecs. (6) nos permite conocer la trayectoria de la(s) partícula(s) del sistema, es decir la evolución en el tiempo.

Hasta ahora no hemos especificado qué es el Lagrangiano L , el cual juega, evidentemente, un papel fundamental para describir un sistema físico. Para algunas clases de sistemas particulares, encontrar el Lagrangiano resulta sencillo. Por ejemplo el Lagrangiano de una partícula puntual que se mueve bajo la influencia de un potencial V (el cual puede ser generado por un campo gravitacional o electromagnético, por ejemplo). Para este caso el Lagrangiano del sistema está dado simplemente por la diferencia entre la energía cinética de la partícula T y su potencial V

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - V, \quad (7)$$

en donde $\mathbf{x} = (x, y, z)$ son las coordenadas Cartesianas de la partícula y $\dot{\mathbf{x}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ es la velocidad de la partícula en tres dimensiones. Las ecuaciones de Euler-Lagrange proporcionan las siguientes ecuaciones de movimiento

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V = \mathbf{F}. \quad (8)$$

El conjunto de Ecs. (8) coincide exactamente con la segunda ley de Newton para una partícula puntual en un potencial V , y por lo tanto, podemos decir que el Lagrangiano presentado en la Ec. (7) describe el movimiento de una partícula libre en la mecánica Newtoniana.

¿Cómo se construyen las teorías físicas hoy en día? A través de simetrías. De hecho, en palabras del nobel en física Philip Anderson [4]: “no resulta una gran exageración afirmar que la física es el estudio de la simetría”. ¿Cómo el concepto de simetría se convirtió en una de las herramientas más poderosas de la física teórica actual? La respuesta está lejos de ser trivial. Sin embargo, hasta el momento, prácticamente todas las leyes de la naturaleza se originan de simetrías.

Una simetría, ya sea de un sistema físico o un objeto matemático, se representa de manera formal cuando al aplicar una operación matemática sobre el objeto o sistema, el resultado es indistinguible del original. Por ejemplo, para elementos geométricos una simetría está asociada a transformaciones tales como rotaciones, reflexiones o traslaciones, ver e.g., Figura (3). Intuitivamente resulta sencillo visualizar los objetos que son, por ejemplo, invariantes bajo rotaciones, como una esfera.

3. La conservación de la energía

Las simetrías, sin embargo, también se pueden formular sin necesidad de apelar a la geometría: por ejemplo, una simetría



Figura 3: Objetos geométricos con diferentes tipos de simetrías. Note que varias partes de un objeto pueden ser idénticas, de modo que es posible voltear, girar o mover el objeto sin cambiar finalmente su aspecto.

temporal de un sistema. ¿Qué implica una *simetría temporal*? Primero algunos conceptos.

Supongamos nuevamente que un sistema físico está descrito por la acción (1). Supongamos, además, que la acción es invariante bajo una transformación de la forma (2). Definimos una simetría de variación como [6]

$$\delta q(t) \equiv \tilde{q}(t) - q(t), \quad (9)$$

cuya forma general se puede escribir en términos de un funcional $\Delta(q, \dot{q}, t)$ como $\delta q(t) \equiv \varepsilon \Delta(q, \dot{q}, t)$, en donde ε es un parámetro pequeño. Al calcular la variación de la acción S bajo la simetría obtenemos, luego de aplicar la regla de la cadena e integrando por partes,

$$\delta S = \int_{t_{in}}^{t_{fi}} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q(t) dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t) \Big|_{t_{in}}^{t_{fi}}.$$

Si las *órbitas* (soluciones) $q(t)$ satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange (6), entonces el primer término se anula y obtenemos que

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t) \Big|_{t_{in}}^{t_{fi}}. \quad (10)$$

Bajo la suposición de que δS es cero para toda solución $q(t)$, dado que por hipótesis la acción es invariante bajo esa transformación en particular, i.e., $\delta S = 0$, obtenemos que la cantidad

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t) = \varepsilon \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Delta(q(t), \dot{q}(t), t) = \varepsilon N(t) \quad (11)$$

tiene el mismo valor para los tiempos t_{in} y t_{fi} . Dado que los tiempos t_1 y t_2 son arbitrarios, la función $N(t)$ es independiente del tiempo, i.e.,

$$N(t) = N,$$

o en otras palabras, es una *cantidad conservada* o una *constante de movimiento*.

El anterior argumento se puede generalizar a transformaciones $\delta q(t)$ para las cuales la acción no es directamente la cantidad invariante, sino su simetría de variación (9) es igual a un término de frontera arbitrario, es decir

$$\delta S = \varepsilon F(q, \dot{q}, t) \Big|_{t_{in}}^{t_{fi}}. \quad (12)$$

En este caso la cantidad conservada, conocida como la *carga de Noether*, es

$$Q(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Delta(q, \dot{q}, t) - F(q, \dot{q}, t). \quad (13)$$

Ahora sí podemos regresar a la simetría temporal mencionada anteriormente. Supongamos un Lagrangiano que no depende explícitamente del tiempo, es decir

$$L(q(t), \dot{q}(t), t) \equiv L(q(t), \dot{q}(t))$$

Si realizamos una traslación temporal del sistema de coordenadas de la forma

$$\tilde{t} = t - \varepsilon,$$

la misma órbita (solución) del sistema tiene la nueva descripción

$$\dot{q}(\tilde{t}) = \dot{q}(t), \quad (14)$$

o en otras palabras, la órbita $\dot{q}(t)$ en el tiempo trasladado $\tilde{t}$ es precisamente la misma solución $\dot{q}(t)$ en el tiempo inicial. Si reemplazamos el argumento de $\dot{q}(t)$ en la Ec. (14) por $\tilde{t}$, describimos una solución trasladada en términos de las coordenadas originales. Esto implica la simetría de la forma (9)

$$\begin{aligned} \delta q(t) &= \tilde{q}(t) - q(t) \\ &= q(\tilde{t} + \varepsilon) - q(t) \\ &= q(\tilde{t}) + \varepsilon \dot{q}(\tilde{t}) - q(t) \\ &= \varepsilon \dot{q}(t). \end{aligned} \quad (15)$$

De esta manera, la simetría de variación del Lagrangiano es

$$\begin{aligned} \delta L &= L(\tilde{q}(t), \tilde{\dot{q}}(t)) - L(q(t), \dot{q}(t)) \\ &= \frac{\partial L}{\partial q} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}(t). \end{aligned}$$

Al reemplazar $\delta q(t)$ de la Ec. (15) en la última línea obtenemos que

$$\begin{aligned} \delta L &= \varepsilon \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial q} \ddot{q} \right) \\ &= \varepsilon \frac{d}{dt} L, \end{aligned}$$

es decir la derivada total de L . Por lo tanto, al variar la acción descrita por este Lagrangiano, obtenemos que $F = L$ en la Ec. (12) y por lo tanto la cantidad conservada $Q(t)$ en la Ec. (13) es

$$Q(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L(q, \dot{q}) = H(t).$$

La anterior expresión es conocida como una transformación de Legendre que produce el Hamiltoniano del sistema; la energía total del sistema. Por lo tanto, una simetría temporal implica la conservación de la energía. El teorema de Noether en acción.

4. La construcción de teorías físicas

Bajo esta elegante formulación matemática, a través de Lagrangianos, definimos actualmente nuestras teorías. ¿Cuál es el Lagrangiano de un sistema físico? Aquel que describe correctamente el sistema. En general, y dado que no existe un procedimiento general para construir un Lagrangiano, si queremos estudiar un sistema, podemos considerar un conjunto de Lagrangianos, cada uno representando un cierto modelo para dicho sistema y verificar (con experimentos u observaciones) cuál Lagrangiano describe mejor el sistema. Así de sencillo y así de complejo.

Los resultados experimentales y observacionales alcanzados hoy en día tienen, en la mayoría de casos, una precisión tan alta que construir un Lagrangiano que los explique no es una labor sencilla. A continuación veremos dos ejemplos, sin entrar en detalles.

El Modelo Estándar, la teoría actual que gobierna todas las interacciones, a excepción de la gravedad, tiene un Lagrangiano que inicia de la siguiente forma

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2} \partial_\nu g_\mu^a \partial_\nu g_\mu^a - g_s f^{abc} \partial_\mu g_\nu^a g_\mu^b g_\nu^c \\ &\quad - \frac{1}{4} g_s^2 f^{abc} f^{ade} g_\mu^b g_\nu^c g_\mu^d g_\nu^e + \frac{1}{2} i g_s^2 (\bar{q}_i^\sigma \gamma^\mu q_j^\sigma) g_\mu^a \\ &\quad + \bar{G}^a \partial^2 G^a + g_s f^{abc} \partial_\mu \bar{G}^a G^b g_\mu^c - \partial_\nu W_\mu^+ \partial_\nu W_\mu^- \\ &\quad - M^2 W_\mu^+ W_\mu^- - \frac{1}{2} \partial_\nu Z_\mu^0 \partial_\nu Z_\mu^0 - \frac{1}{2 c_w^2} M^2 Z_\mu^0 Z_\mu^0 \\ &\quad - \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_h^2 H^2 \\ &\quad - \partial_\mu \phi^+ \partial_\mu \phi^- - M^2 \phi^+ \phi^- \dots, \end{aligned}$$

en donde cerca de otras 50 líneas por el estilo no han sido escritas. Cada término de ese Lagrangiano está relacionado con un tipo de partícula elemental y sus respectivas interacciones. Este modelo ha tenido un éxito sin precedente a la hora de predecir y explicar datos [6]. ¿Cómo se formuló ese Lagrangiano? A través del estudio de simetrías. La formulación matemática de las simetrías es $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$, cuya explicación escapa del alcance de este texto. Sin embargo, en términos escuetos, la simetría $U(1)$ está asociada al electromagnetismo (una partícula, el fotón), $SU(2)$ a la fuerza débil (tres partículas conocidas como W^+ , W^- y bosones Z) y $SU(3)$ a la fuerza fuerte (con 8 partículas llamadas gluones).

A pesar del gran éxito del Modelo Estándar como la descripción de las fuerzas fundamentales, sabemos que no es la teoría completa para explicar todas las interacciones. Entre otros problemas abiertos, el modelo estándar no incorpora la gravedad, la energía y la materia oscura (las cuales dan razón de cerca del 95 % del contenido de nuestro Universo [5]).

La relatividad general de Einstein, por otra parte, se puede derivar de la famosa acción de Hilbert-Einstein

$$S = \int \left[\frac{c^4}{16\pi G} R + L_M \right] \sqrt{-g} d^4x,$$

la cual se basa en el principio de covarianza, que establece que las leyes de la física se expresan mediante ecuaciones tensoriales que conservan la misma forma en cualquier sistema de coordenadas. Este hecho se traduce matemáticamente a que la acción debe ser invariante ante difeomorfismos: la simetría que da forma a nuestro entendimiento actual de la gravedad. Esa simetría fue encontrada por Noether y resultó esencial para la formulación del teorema mencionado anteriormente. Entender que esa simetría existía en la teoría permitió demostrar que la relatividad general de Einstein no violaba la conservación de la energía y que la formulación de Hilbert y Einstein (de ahí el nombre particular de la acción) eran equivalentes.

La búsqueda de una teoría que unifique todas las interacciones ha resultado ser una labor lejos de ser trivial, y los esfuerzos humanos no han sido escasos. Durante las últimas décadas dos teorías han sido ampliamente exploradas: la teoría de cuerdas y la gravedad cuántica de lazos, cada una con diferentes tipos de simetrías e interpretaciones.

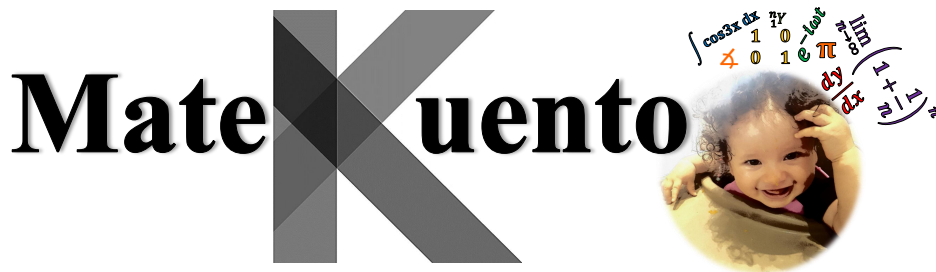
Hasta ahora la ruta que la física teórica ha seguido durante las últimas décadas ha sido alumbrada a través de simetrías, cuyas implicaciones y utilidad nacieron después del trabajo seminal de Emmy Noether. ¿Qué simetría tendrá (o no tendrá) la teoría de unificación? ¿Seguirán siendo las simetrías de utilidad para la descripción de la naturaleza? La búsqueda continúa.

Referencias

- [1] Noether, E. (1918), Invariante Variationsprobleme, Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 235–257.
- [2] Kimberling, Clark (1981), Emmy Noether and Her Influence, in Brewer, James W.; Smith, Martha K. (eds.), Emmy Noether: A tribute to her life and work, New York: Marcel Dekker, pp. 3–61, ISBN 978-0-8247-1550-2
- [3] Lederman, Leon M.; Hill, Christopher T. (2004), Symmetry and the Beautiful Universe, Amherst, MA: Prometheus Books, ISBN 978-1-59102-242-8
- [4] Anderson, P.W. (1972). More is Different (PDF). Science. 177 (4047): 393–396. Bibcode:1972Sci...177..393A. doi:10.1126/science.177.4047.393. PMID 17796623.
- [5] Aghanim, N., Akrami, Y., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Ballardini, M., ... & Battye, R. (2018). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. arXiv preprint arXiv:1807.06209.

- [6] Gabrielse, G. (2013). The standard model's greatest triumph. Physics Today, 66(12), 64–65.
- [7] Hagen, K. (2008). Multivalued Fields: In Condensed Matter, Electromagnetism, And Gravitation. World Scientific Publishing Company.

Acerca del autor: Alejandro Cárdenas-Avendaño es matemático de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Físico y Magíster en Ciencias Astronomía de la Universidad Nacional de Colombia y Magíster en Física de Montana State University. Actualmente es Investigador del Centro de Investigaciones de Matemáticas e Ingenierías CIMI y candidato a doctor en física teórica en University of Illinois en Urbana-Champaign. Su investigación consiste en estudiar el impacto de la teoría de la relatividad general de Einstein y algunas de sus extensiones, ya sea en vacío o acopladas a varios tipos de materia, en fenómenos astrofísicos.



Anotaciones sobre las brasas que acosan a los matemáticos antes de que asciendan al cielo en un tiempo $t \in \mathbb{R} : 0 < t < \infty$

Es un hecho establecido que, al morir, todos los matemáticos, sin excepción, van a dar al purgatorio. No es claro cuál sea el motivo de tan infame destino, tal vez se deba a la herejía insolente que significa atreverse a descifrar el lenguaje con el que Dios escribió el universo -parafraseando a Galileo Galilei-, o tal vez sea porque la soberbia, un pecado capital, tenga características veniales al ser casi un mal congénito de los matemáticos, como una especie de pecado original de oficio; sin embargo y cualquiera sea el caso, la amarga escala de obligatorio cumplimiento que deben hacer los matemáticos para la purificación antes de alcanzar la beatífica visión, es un suceso que no admite dudas.

Si ser matemático es sinónimo de una póstuma sentencia bajo el tormento de las redentoras brasas, que sirven de prelude para que los pecadores alcancen eventualmente la gloria, sujetos como el alemán Georg Friedrich Bernhard Riemann tendrían asignada una extensa condena. Como matemático y a pesar de su prematuro deceso a los 39 años de edad, Riemann realizó importantes aportes principalmente en las líneas de investigación del análisis matemático, la topología y la geometría diferencial, por lo que 28 años después de su muerte, aún se encontraba muy lejos de alcanzar el fin de su metafísica pena.

Y fue en esta época, entre el 31 de diciembre de 1894 y el 1 de enero de 1895, en que Riemann recibió una sorpresiva visita a sus indeseables aposentos; se trató de otro matemático que también arribó al purgatorio en busca de la expiación de la pecadora existencia de quienes a las ciencias exactas se dedican, nos referimos al holandés Thomas Joannes Stieltjes.

En su corto paso por este valle de lágrimas, Stieltjes también logró aportes sobresalientes principalmente en las ramas de la teoría de números, el análisis matemático y con frecuencia se le denomina el padre de la teoría analítica de las fracciones continuas. Stieltjes no fue un fuera de serie del tamaño de Riemann (la huella que cada uno tiene en Wikipedia da fe de esta afirmación), pero su nombre está intrínsecamente ligado a un muy reconocido objeto matemático, la integral de Riemann-Stieltjes.

El encuentro de las dos ánimas benditas fue cordial, tenso y distante. Riemann supo de los resultados de las investigaciones de Stieltjes, pues los buenos artículos científicos se leen hasta en el ultramundo. Para Riemann, el aporte de Stieltjes a

su definición de la integral era apenas accesoria, mientras que para Stieltjes su concepto de la integral¹ era una generalización en el amplio sentido de la palabra.

Con el pasar del tiempo y habiendo dejado de lado la noción que cada uno tenía de su propio aporte al concepto de integral, fue inevitable que Riemann y Stieltjes empezaran a tener un trato más cercano, la inminencia de este hecho se debe a que los dos difuntos en mención no sólo coincidieron en la nomenclatura del objeto matemático que une a sus apellidos, sino que también compartieron una serie de concomitancias en el ocaso de sus vidas, ambos murieron jóvenes, cerca, pero sin alcanzar los 40 años, ambos murieron a causa de enfermedades relacionadas con la gripe, ambos murieron en países extranjeros (Stieltjes en Francia y Riemann en Italia) y ahora, en el purgatorio, ambos estaban condenados a permanecer en este lugar hasta que se resolviera un mismo problema matemático.

Si la vida es irónica, la muerte puede serlo un poco más. La condena para estos dos matemáticos duraría tanto como lo que se tardaran en resolver la integral de la función de Dirichlet, definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \\ 1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Este problema matemático exige una extensión de la definición del concepto de integral de Riemann-Stieltjes, ya que, en el marco de dicha teoría, la función de Dirichlet no es integrable.

Nadie les dijo a Riemann o a Stieltjes que deberían resolver esta función para ascender al cielo, tampoco les llegó este designio en una nota o en forma de una de las flamas que les atormentaban, simplemente lo sabían, son cosas del purgatorio, ajenas al entendimiento de los mortales y en general de quienes no visitan el limbo (pero si usted es matemático no debe impacientarse por la intriga, como consecuencia de lo expuesto en el prolegómeno de este escrito, llegado su momento entenderá claramente de que tratan estas cuestiones).

Luego de surtido el protocolo de bienvenida y de limadas las asperezas, Riemann se reincorporó a sus actividades, en búsqueda de la solución de la integral de la función de Dirichlet; al observarlo y queriendo abandonar el purgatorio, Stieltjes también asumió la compleja tarea de resolver la

¹Contenida por primera vez en su trabajo denominado Recherches sur les fractions continues de 1893.

integral para dicha función. Cada uno de los dos científicos abordó de manera independiente el problema y así, por décadas, se entregaron a la solitaria e ininterrumpida búsqueda de la solución, aislándose por completo de todo.

A pesar del genio de los dos matemáticos, no encontraron los resultados que buscaban; la ansiedad jugaba en su contra y, en un círculo vicioso, la impaciencia minaba la ataraxia y a falta de esta el pensamiento se hizo cada vez menos claro, menos eficaz, y el trabajo de cada uno rendía cada vez menos frutos. Se llegó al límite de encontrar bloqueos insoslayables en cada camino posible de solución. En determinado momento Riemann y Stieltjes, sucumbiendo ante el pesimismo, la frustración y la desidia, abandonaron la búsqueda de la solución del problema.

En la mente de Stieltjes surgió la hipótesis de que tal vez era el deseo de la providencia que, tanto él como Riemann, invirtieran su talento en intentos inocuos de solución de un problema que no tiene tal, así que le expuso esta idea a Riemann, quien además de compartir su mismo destino por tener asignado para sí el mismo problema, en su juventud inició estudios que le prepararían para ser pastor protestante y aunque no llegó a tomar esa vocación, en vida siempre fue un cristiano practicante, ¡algo debería saber de las normas del purgatorio!, pensó Stieltjes.

Riemann desestimó las suposiciones de Stieltjes, no por creerlas contrarias a los designios divinos, sino porque consideraba que el problema tenía solución, y que, en determinado momento, su genio, superior al de Stieltjes, bastaría para resolver la cuestión de la integral de Dirichlet. Encontró Riemann a la vez muy reproachable la posición de Stieltjes a quien consideró pusilánime y mediocre, le acusó de debilidad de carácter y le recordó que, para nadie era un secreto que nunca obtuvo un título a través de la aprobación de los exámenes, de manera regular, sino que lo obtuvo en la modalidad de Honoris Causa, por el favor de Hermite.

Stieltjes no esgrimió defensa alguna frente a las acusaciones de Riemann, se limitó a exponer que, la autoridad moral necesaria para realizar tantas acusaciones como había hecho Riemann, le permitía inferir que Riemann se tenía a sí mismo en un concepto muy alto, lo que era contradictorio con el hecho de que aún se encontrara en el purgatorio, y adicionalmente que, al margen de que el problema de la integral de la función de Dirichlet fuera resuelto o no, al haber muerto Riemann antes que Stieltjes, sería Riemann quien permanecería más tiempo en el tortuoso tránsito al paraíso; entonces, a los ojos de la providencia ¿qué tan ejemplar era la conducta de Riemann -en comparación con la de Stieltjes- para que fuera él quien más tiempo experimentara el purgatorio?

La discusión terminó, pero la reflexión sobre los argumentos expuestos no. Para Riemann el cuestionamiento de Stieltjes era cuanto menos muy razonable, y para Stieltjes las observaciones que realizó a Riemann también aplicaban para él mismo.

¿Hasta dónde la autoconfianza y un autoconcepto positivo pueden ser distintos a la soberbia? ¿Todo problema puede ser resuelto si se invierte en él un tiempo infinito? ¿Hay entes inaccesibles para el entendimiento humano? ¿Hasta qué punto se admite la falibilidad humana sin tener una actitud de derrota? ¿Cuál es el límite que debe trazarse para evitar el conformismo sin caer en el perfeccionismo insano?

De manera sincera y profunda estos dos científicos se enfrentaron a interrogantes epistemológicos y morales referidos en primera persona; la simple existencia de estos cuestionamientos hubiera sido un argumento suficiente para asumir las limitaciones propias humanas, sin embargo, el golpe de gracia a la altivez de Riemann y de Stieltjes fue la noticia de que Lebesgue había extendido desde el año 1904 la teoría de la integral y que en el marco de dicha teoría ampliada la función de Dirichlet es integrable.

Extrañamente, Riemann y Stieltjes se sintieron liberados habiendo sido superados, siendo falibles, perfectibles, en síntesis, siendo humanos, y de este modo pudieron hallar la redención.

¿Podríamos encontrar durante la vida la liberación de las cargas autoimpuestas y que se derivan de modelos ideales, al asumir de manera consciente, humilde, pero sobre todo responsable, nuestra condición humana?

Tal vez una reflexión sensata y comprometida acerca de nuestro papel en el devenir de los hechos, y la observación cuidadosa del amplio espectro y variedad que existe en cuanto a las experiencias de la vida, nos permitan no solo esquivar el purgatorio, sino también evitar que hagamos de nuestro mundo su oficina local.

Dayron Fabián Achury-Calderón
dayronf.achuryc@konradlorenz.edu.co

Acerca de la autor: Fabián Achury-Calderón es ingeniero de la UDFJC y estudiante de último semestre de matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Se ha interesado por estudiar la interacción de las matemáticas con otras ciencias. Asesora compañías en asuntos financieros y de dirección estratégica. Le apasiona la ópera, el ballet y las ciencias sociales. Sus pasatiempos favoritos son la lectura y la colección de registros de radio internacional. Disfruta recorrer museos cuando viaja y admite que se conmueve con facilidad. Algún día espera aprender a tocar piano.

K' Problema

Como dicen los mexicanos, ahí les va este torito: tomen su número natural favorito, si es par divídanlo por dos, si es impar, multiplíquelo por tres y súmenle uno. En cualquiera de los dos casos, apliquen repetidamente la transformación indicada (iteración). Pues a ver, he aquí un par de números que se me vienen a la mente, 27 y 145. Y para no aburrirlos con todos los números que salen, veámoslos en una gráfica (ver Figura 1).

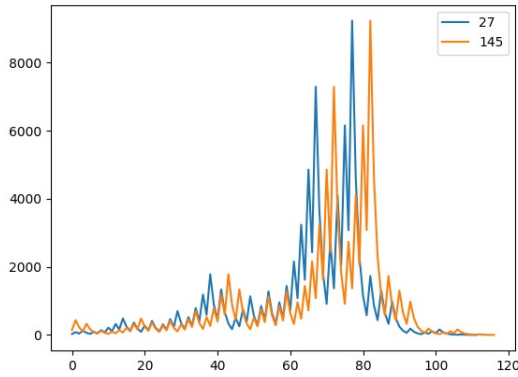


Figura 1: Recorrido de los números 27 y 145 bajo la aplicación de la transformación descrita por la ecuación 1.

En detalle, después de un poco más de cien aplicaciones de la transformación indicada en cada número, y de pasear por números más allá de ocho mil, en ambos casos se llega al número uno. ¿Será acaso una mera coincidencia? Para hacernos una idea, consideremos diez números naturales al azar, como en la Figura 2. Sorpresa, en este caso también, para cada uno de los números que tomamos, la transformación correspondiente lleva al número uno, aún más, viendo detenidamente la secuencia de números que se obtienen en cada uno de los números que tomamos al azar, dicha secuencia termina en 4, 2, 1.

Creo que ya se puede sospechar, el torito es mucho más que eso, en realidad es un problema abierto bien conocido, establecido por el matemático Lothar Collatz, de la siguiente manera:

Conjetura 0.1. Dado un número natural, considere la transformación $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{3n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \quad (1)$$

probar que para todo n , la iteración bajo esta transformación, $f^k(n)$, terminará en 4, 2, 1.

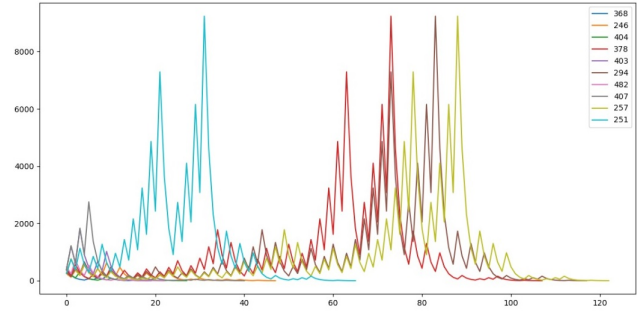


Figura 2: Recorrido de diez números escogidos al azar, bajo la aplicación de la transformación descrita por la ecuación 1.

La literatura respecto de este problema, tanto investigativa como divulgativa, es más que abundante, el lector interesado podrá encontrar en este interesante artículo de Jeffrey Lagarias [Lag10] una magnífica recopilación de los resultados sobre la conjetura que se habían publicado hasta 2011. Respecto de los resultados, podríamos hablar largo y tendido, por supuesto, de resultados parciales o colaterales, aunque el interés por esta conjetura ha motivado desarrollos matemáticos más que impresionantes, este es un buen punto para decir que el proceso de Collatz se le ha aplicado a algo así como un quintillón de números, sin falla. De hecho, uno de estos, desató una nueva ola de interés en el problema. A finales de 2019, Terence Tao [Tao] presenta a la comunidad matemática un trabajo en el que el mayor resultado que presenta establece que

Teorema 0.1. (Almost all Collatz orbits attain almost bounded values). Let $f : \mathbb{N} + 1 \rightarrow \mathbb{R}$ be any function with $\lim_{N \rightarrow \infty} f(N) = +\infty$. Then one has $\text{Col}_{\min}(N) < f(N)$ for almost all $N \in \mathbb{N} + 1$

En conclusión, lo que nos dice este resultado es que, de todos los números naturales que se sometan a la transformación de la conjetura de Collatz, el 99 por ciento estará muy cerca de cumplirla, esto es, terminará en un número inferior a 200. O sea, por ahí va la cosa. Para los interesados en ahondar en los detalles de la prueba de Tao, así como en sus implicaciones, les recomiendo la nota de Kevin Hartnett publicada en el sitio de **Quantamagazine: Mathematician Proves Huge Result on 'Dangerous' Problem** y su traducción al español en el sitio de **Investigación y Ciencia: Un gran resultado matemático para un «problema peligroso»**. También

pueden echar un vistazo a las diapositivas de la presentación de Tao para una charla pública al respecto en la Universidad de Basel, titulada "The Notorious Collatz conjecture", en <https://terrytao.files.wordpress.com/2020/02/collatz.pdf>.

El consenso de la comunidad matemática, es que la prueba de la conjetura de Collatz, a pesar de la simplicidad de su enunciado, es una empresa titánica, incluso Tao, autor del último y más importante avance al respecto, afirma que «*Cabe acercarse cuanto se quiera a la conjetura de Collatz, pero seguirá estando fuera de alcance*».

Y a parte de su demostración, ¿en qué más nos podemos fijar en esta conjetura?

Discutiendo al respecto, mi amigo Julián Jimenez [JJC19] me comenta: *La conjetura de Collatz es prácticamente inagotable, porque se puede analizar desde múltiples perspectivas. Por ejemplo, si la conjetura es cierta, uno se podría preguntar cuál es la velocidad con la que un número n llega a 1. La velocidad mínima (lo que se conoce como orden) es $\log_2(n)$, y ocurre cuando n es una potencia de dos. Decimos que esta es la velocidad que tarda una potencia de dos porque si $n = 2^m$, se requieren $m = \log_2(n)$ pasos para llegar al 1, y como la secuencia de potencias de dos es la que conecta a todos los naturales con el 1, si la conjetura de Collatz es verdadera todos los números desembocan en una potencia de dos, por lo que la velocidad de convergencia de un número n es al menos de $\log_2(n)$* . Relacionado con el tema de la velocidad de convergencia, uno también podría buscar la familia de números que converge a 1 a una velocidad dada, y encontrar una velocidad máxima de convergencia, en caso de que la conjetura de Collatz sea cierta.

La Figura 1 sugiere que, familias de números naturales sometidas al proceso iterativo de la ecuación 1, se agrupan bajo una misma curva. ¿De qué manera se distribuyen estas curvas?, ¿a qué tipo de distribuciones de probabilidad estarán asociadas?, ¿existe alguna relación entre los números agrupados bajo una misma curva, o su agrupamiento este determinado completamente al azar?

Dado que estamos ante un problema de números naturales, los cuales tienen a los primos como sus ladrillos fundamentales, preguntémosnos cómo se comportan estos números, bajo la iteración de Collatz. Para 17 se tiene:

17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Para 29 se tiene

29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

¿Lo notaron? Si aún no, miren de izquierda a derecha, se ve más fácil. Todos los números en la iteración, son un primo, siguen algunos de sus múltiplos, un nuevo primo, de nuevo algunos de sus múltiplos, y así sucesivamente. Y aun más, en muchos casos, como para el 17, los primos de su secuencia de iteraciones no aparecen al azar, aparecen de manera ordenada, esto es, cada secuencia queda dividida en bloques determinados por números primos. Les recomiendo que calculen Collatz de 31, tiene 94 términos que no me caben en esta pequeña nota (no es necesario que sepan programar, pueden ir a la calculadora de números de Collatz en

<https://www.dcode.fr/collatz-conjecture>). Pero en conclusión: ¿qué relación existe entre un número primo, y los primos en su iteración de Collatz?, ¿de qué depende el número de múltiplos de cada primo, en cada secuencia de iteraciones?, y en general, ¿cómo los primos determinan las iteraciones de Collatz, tanto de números primos, como de compuestos?

Otra pregunta interesante, es buscar otras conjeturas de Collatz, esto es, qué tipo de transformación sobre un número natural, tendrá como resultado, que después de un número finito de iteraciones, sin importar el natural al cual se le aplique, la secuencia de resultados termine en 2, en 3 o en un número cualquiera n . Amigo lector, he aquí la conjetura que puede llevar tu nombre...

Referencias

- [JJC19] Julián Jiménez Cárdenas, *Armonía en las matemáticas*, Vol. 1, Paskín Matemático, 2019.
- [Lag10] Jeffrey C. Lagarias, *The $3x + 1$ problem: an annotated bibliography (1963–1999)*, The ultimate challenge: the $3x + 1$ problem, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, pp. 267–341.
- [Tao] Terence Tao, *Almost all orbits of the collatz map attain almost bounded values*, en arXiv:1909.03562.

John A. Arredondo
alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co

Política Editorial

El Paskín Matemático es una producción del Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Está abierto a todos y todas. Si tienes interés en escribir un artículo con cualquier tipo de contenido matemático, reseñar a un personaje, comentar un problema o tienes comentarios sobre nuestra publicación, envía un mensaje a paskin@konradlorenz.edu.co

$$\chi(S) = 2 - 2g$$

El Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz fue creado en 1998. Conoce más acerca de nuestro programa en nuestra página institucional

<http://www.konradlorenz.edu.co/es/aspirantes/carreras-universitarias/carrera-de-matematicas/presentacion.html>

Bogotá, Colombia. 2020

PASKÍN MATEMÁTICO

Volumen 2, No. 1, 2020

Contenido

- Rafael Melo Jiménez
Matemáticas ocultas en el arte.....1
- Leidy Catherinne Sánchez
Euler, Riemann y el santo grial de las matemáticas.....9
- Alejandro Cárdenas-Avendaño
Simetrías: ¿bloques fundamentales para construir teorías
de la naturaleza?.....14
- Dayron Fabián Achurry
MateKuento.....19
- John A. Arredondo
 K' problema.....21

*La lógica te llevará de A hasta B, la
imaginación te llevará a cualquier parte.*

Albert Einstein

KONRAD
LORENZ
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSITARIA