

$$\oint_{\partial \tau} A \cdot dS = \int_{\tau} \nabla \cdot A d\tau$$

$$X_{(1-t)} = kr_t(1-t)$$

MATEMÁTICO

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \approx L \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} = e^{-2} \frac{\partial u}{\partial x^2}$$

$$A^{-t} = \frac{1}{\det(A)} \cdot [\text{Adj}(A)]^t$$

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$n! = \prod_{k=1}^n k$$

$$\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$(\nabla \times F) \cdot u = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_F F \cdot dr$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \nabla \cdot T + f$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{(2n+1)}$$

ISSN
2665-2471

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$



**KONRAD
LORENZ**
FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

Vol. 1
No. 2

PASKÍN MATEMÁTICO

<https://editorial.konradlorenz.edu.co/2019/02/paskin-matematico.html>

e-mail: paskin@konradlorenz.edu.co

EDITORES

John A. Arredondo

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co

Carlos Alberto Díez

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
carlosa.diez@konradlorenz.edu.co

Esta publicación puede ser difundida y reproducida con fines académicos y científicos por todos aquellos que tengan a bien hacer un correcto uso de su contenido.

ISSN 2665-2471

Fundación Universitaria Konrad Lorenz: Tel: (+57 1) 347 23 11, Carrera 9 Bis No. 62 – 43 Bogotá – Colombia, eMail: info@konradlorenz.edu.

Carácter académico: Institución Universitaria. Personería Jurídica por Resolución 18537 del 4 de noviembre de 1981 del Ministerio de Educación Nacional. Institución de Educación Superior sujeta a inspección y vigilancia por el Ministerio de Educación Nacional (Art. 2.5.3.2.10.2, Decreto 1075 de 2015).

Una breve historia imaginaria

Camilo Ramírez Maluendas *
camramirezma@unal.edu.co

1. Resumen.

En este escrito relatamos cronológicamente varias situaciones que han permitido madurar y formalizar a los objetos que conocemos como números imaginarios o complejos. Comenzaremos introduciendo la evidencia más antigua que se conoce del cálculo de la raíz cuadrada de una cantidad negativa, la cual involucra al griego Herón de Alejandría, hasta el concepto formal de los números complejos dado por William Rowan Hamilton.

2. Arranca la historia.

La evidencia escrita más antigua que se conoce del cálculo de una raíz cuadrada de una cantidad negativa data de aproximadamente del año 75 d. C. Esta apareció en el libro *Estereometría*, escrito por el griego *Herón de Alejandría* (siglo I d. C.).

¿Cómo aparece la raíz cuadrada de una cantidad negativa? Pues bien, el griego quería calcular la altura de una *pirámide truncada de base cuadrada* (véase Figura 2), donde $a = 28$ unidades y $b = 4$ unidades eran las medidas de los lados de los cuadrados inferior y superior, respectivamente, y $c = 15$ unidades era el valor de la arista inclinada.

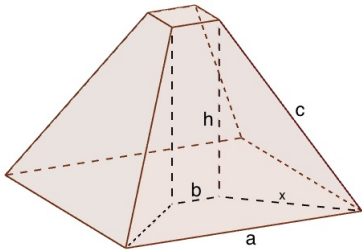


Figura 1: Pirámide truncada.

Sabemos que la fórmula para hallar dicha altura es $h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$, Herón también lo sabía. En la solución de

su problema, Herón escribió (en términos modernos)

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{(15)^2 - \left(\frac{28-4}{2}\right)^2} = \sqrt{125 - 2(144)}, \\ &= \sqrt{125 - 144 - 144} = \sqrt{81 - 144}. \end{aligned}$$

De la anterior igualdad concluimos que el valor de la altura de la pirámide es $h = \sqrt{-63}$. Sin embargo, en el siguiente paso Herón calculó $h = \sqrt{144 - 81}$ (véase *e.g.*, [NRI], [Nah98, p. 4], [Smi25, p. 261]). ¡A lo mejor fue un escribano el que cometió el error de escritura!

Otro griego que se encontró en circunstancias muy parecidas fue Diofanto de Alejandría (siglo III d. C.). En su obra *Aritmética*, de aproximadamente el año 275 d. C., Diofanto deseaba encontrar la medida de los lados de un triángulo rectángulo con área 7 unidades cuadradas y perímetro 12 unidades (véase Libro VI, problema 22 [Ras84]). Si x y y denotan las medidas de los lados de dicho triángulo rectángulo, entonces el problema se plantea de la siguiente manera en términos algebraicos

$$\frac{xy}{2} = 7 \quad y \quad x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2.$$

Del método de sustitución aplicado en las anteriores igualdades obtenemos la ecuación de segundo grado

$$172x - 24x^2 - 336 = 0. \quad (1)$$

Si usamos la fórmula general cuadrática concluimos que las soluciones de la ecuación (1) son

$$x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}.$$

Sin embargo, Diofanto escribió que la ecuación (1) no podría resolverse a menos que la mitad del coeficiente de x multiplicado por sí mismo, menos 24×336 sea un cuadrado. Obviamente,

$$\left(\frac{172}{2}\right)^2 - (24)(336) = -668$$

¡no es un cuadrado! Puesto que no podemos encontrar un real tal que su cuadrado sea -668 .

Después de Diofanto, tal parece que no era aceptada la posibilidad de que un objeto fuese la raíz cuadrada de una cantidad negativa. Alrededor del año 850 d. C. el matemático hindú

*Profesor Asociado Universidad Nacional de Colombia sede Manizales.

*Mahaviracarya*¹ estableció la siguiente ley para tratar a las raíces de las cantidades negativas en su único libro *Ganita Sara Samgraha*:

“Como en la naturaleza de las cosas (cantidades) negativas no son cuadrados (cantidades), por lo tanto, no tienen raíz cuadrada”. Véase e.g., [Smi13, p. 312].

Así mismo, el conocido matemático y astrónomo hindú *Bhaskara Acharya* (1114-1185) en su libro *Bijaganita* escribió:

“...nunca puede haber un cuadrado negativo como se ha demostrado”. Véase e.g., [Str23, p. 15].

Fue hasta el año 1545 en que el italiano *Gerolamo Cardano* (1501-1576) publicó su obra *Ars magna*, en ella introdujo por primera vez los objetos de la forma $a + \sqrt{-1}b$ en el álgebra, con a y b reales [vdW85, p. 56]. En esta obra, el italiano planteó un método desarrollado por *Scipione del Ferro* (1465-1526) y *Targaglia*² (1501-1557) para encontrar las soluciones de las ecuaciones de tercer grado. También, propuso un método desarrollado junto con *Ludovico Ferrari* para hallar las soluciones de las ecuaciones de cuatro grado. ¿Cuál o cuáles son las raíces de una ecuación de tercer grado? La ecuación general cúbica es de la forma

$$ay^3 + by^2 + cy + d = 0.$$

Podemos introducir la variable $x = y + \frac{b}{3a}$ en la expresión anterior y obtenemos la forma reducida

$$x^3 + px + q = 0, \quad (2)$$

donde

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad y \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}.$$

Ahora, realizamos el cambio de variable $x = u + v$, entonces

$$\begin{aligned} x^3 &= (u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3v^2u, \\ &= u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = u^3 + v^3 + 3uvx. \end{aligned} \quad (3)$$

De esta última expresión obtenemos

$$x^3 - 3uvx - u^3 - v^3 = 0. \quad (4)$$

De la comparación de las ecuaciones (2) y (4) tenemos que

$$\begin{aligned} 3uv &= -p, \\ u^3 + v^3 &= -q. \end{aligned} \quad (5)$$

En (5), en la primera ecuación despejamos v en términos de p y u . Luego, sustituimos en la segunda ecuación y así obtenemos

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Esta última ecuación la podemos resolver mediante la fórmula cuadrática, pues hacemos $z = u^3$ y tenemos $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$. Entonces

$$z = u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

tomamos la raíz positiva³ y tenemos que

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (6)$$

Dado que $v^3 = -q - u^3$ (véase ecuación (5)), entonces

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (7)$$

Finalmente, como $x = u + v$, entonces

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (8)$$

¡Esta es la fórmula de Cardano!

En el Capítulo 37 del *Ars magna*, Cardano deseaba encontrar dos números cuya suma fuera 10 y su producto fuera 40, en términos algebraicos, quería encontrar los valores x y y tales que

$$x + y = 10 \quad y \quad xy = 40.$$

Él realizó ciertas operaciones básicas y obtuvo los términos $5 + \sqrt{-15}$ y $5 - \sqrt{-15}$ (véase [Car93, p. 219]) como soluciones a las ecuaciones. Luego, Cardano verificó que estos objetos satisfacían las condiciones requeridas. Él escribió:

“Putting aside the mental tortures involved, multiply $5 + \sqrt{-15}$ and $5 - \sqrt{-15}$, making $25 - (-15)$ which is $+15$. Hence this product is 40... This is truly sophisticated.” Véase [vdW85, p. 56].

El italiano *Rafael Bombelli* (1526-1572) fue otro matemático que también estudió las raíces de las ecuaciones cúbicas y cuadráticas. En su obra *L'Algebra* publicada en 1572 [Bom72] llamó al objeto $+\sqrt{-1}$ *più di meno* y a $-\sqrt{-1}$ *meno di meno*. Además, presentó ocho reglas para la multiplicación de raíces con cantidad negativa $\sqrt{-1}$ ⁴ (véase Figura 2 y [Fla03, p. 25]):

En el Capítulo 2, Bombelli solucionó la ecuación $x^3 = 15x + 4$ usando la fórmula de Cardano: Él encontró la raíz

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

la cual llamó una raíz *s sofisticada*. Sin embargo, también notó que $x = 4$ era una raíz de la ecuación. Ahora, Bombelli se interesó en investigar qué era la raíz cúbica de un número imaginario, quería encontrar valores a y b tal que

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}. \quad (9)$$

¹El maestro Mahavira.

²Así era apodado el matemático italiano *Niccolò Fontana* debido a su tar-tamudez.

³Si consideramos la raíz negativa obtendremos el mismo valor para x .

⁴El símbolo $\sqrt{-1}$ fue introducido por *Albert Girard* (1595-1632) su obra *Invention Nouvelle en l'Algèbre* publicado en 1629.

1. Più via più di meno fà più di meno.	$1 \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-1}.$
2. Meno via più di meno fà meno di meno.	$(-1) \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}.$
3. Più via meno di meno fà meno di meno.	$1 \cdot (-\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}.$
4. Meno via meno di meno fà più di meno	$(-1) \cdot (-\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}.$
5. Più di meno via più di meno fà meno.	$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1.$
6. Più di meno via meno di meno fà più.	$\sqrt{-1} \cdot (-\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}.$
7. Meno di meno via più di meno fà più.	$(-\sqrt{-1}) \cdot \sqrt{-1} = 1.$
8. Meno di meno via meno di meno fà meno."	$(-\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1}) = -1.$

Figura 2: Reglas para la multiplicación de raíces con cantidad negativa dadas por Bombelli.

¿Cómo halló Bombelli a y b ? De la anterior expresión dedujo que

$$\begin{aligned} 2 + \sqrt{-121} &= (a + \sqrt{-b})^3, \\ &= a^3 + (\sqrt{-b})^3 + 3a^2\sqrt{-b} + 3a(\sqrt{-b})^2, \quad (10) \\ &= a^3 - 3ab + (3a^2 - b)\sqrt{-b}. \end{aligned}$$

Seguidamente, igualó los coeficientes y obtuvo

$$2 = a^3 - 3ab \quad (11)$$

y

$$\sqrt{-121} = (3a^2 - b)\sqrt{-121}. \quad (12)$$

Él concluyó que si estas dos últimas igualdades se satisfacían, entonces la siguiente igualdad también era cierta

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}, \quad (13)$$

Luego, multiplicó las ecuaciones (9) y (13) y obtuvo

$$25 = \sqrt[3]{125} = a^2 + b. \quad (14)$$

Así substituyó (14) en la ecuación (11) y obtuvo la ecuación cúbica

$$4a^3 - 15a = 2,$$

la cual tenía como solución $a = 2$. Finalmente, reemplazó en la ecuación (11) y encontró que $b = 1$.

Bombelli encontró los complejos conjugados⁵

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1},$$

tal que al sumarlos obtenía el valor 4.

En 1637, el francés René Descartes (1596-1650) publicó su trabajo *La Géométrie* [Des54], en el cual describió sus ideas geométricas aplicadas al álgebra. Una de ellas fue la posibilidad de asociar longitudes a los segmentos y hallar la longitud de un segmento que satisficiera una ecuación de segundo

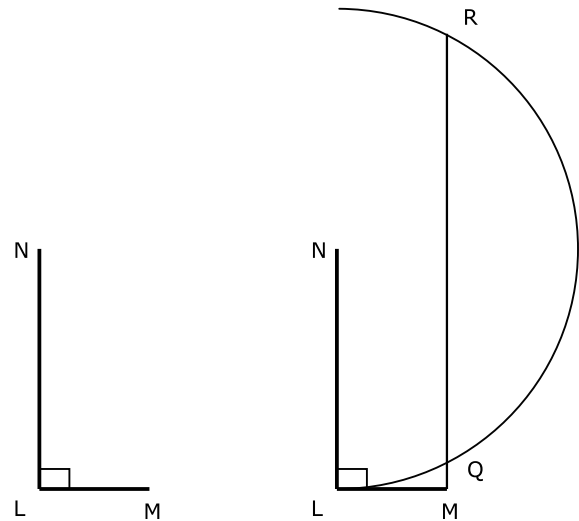
grado. En el libro *I* (véase [Des54, p. 14]), Descartes quería construir un segmento cuya longitud satisficiera la ecuación

$$x^2 = ax - b^2,$$

siendo a y b reales positivos. De la fórmula cuadrática sabemos que las soluciones de esta ecuación son

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

Descartes, para hallar estas raíces, construyó $\overline{NL}$ un segmento de línea recta de longitud $\frac{1}{2}a$ y $\overline{LM}$ un segmento de línea recta de longitud b como se muestra en la Figura 3-a. Luego, trazó la línea recta paralela a $\overline{NL}$ que pasa por el punto M y, la circunferencia con centro en N y radio $NL = \frac{1}{2}a$. Él notó que esta circunferencia cortaba a la línea recta en dos puntos Q y R (véase Figura 3-b). Entonces, concluyó que las longitudes de los segmentos $\overline{MQ}$ y $\overline{MR}$ eran las raíces de la ecuación, i.e., $\overline{MQ} = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ y $\overline{MR} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. ¿Por qué?



a. Segmentos $\overline{NL}$ y $\overline{LM}$. b. Puntos de intersección Q y R .

Figura 3: Construcción geométrica de las raíces de la ecuación $x^2 = ax - b^2$.

⁵El término conjetado fue introducido por Augustin Louis Cauchy en 1821 (véase [Gre76, p: 103]).

Del teorema de *Potencia de un punto*; el cual dice: si una tangente y una secante se cortan en un punto exterior al círculo, entonces el cuadrado de la tangente es igual al producto de la secante por su segmento exterior; Descartés dedujo que

$$MQ \cdot MQ = (LM)^2. \quad (15)$$

A partir de esta última igualdad planteó el siguiente razonamiento. Si la longitud del segmento $\overline{MQ}$ fuese $MQ = x$, entonces la longitud del segmento $\overline{MR}$ debía ser $MR = a - x$. Entonces la ecuación (15) la reescribió como: $x(a - x) = b^2$ o $x^2 = ax - b^2$. De esta igualdad pudo interpretar que la longitud del segmento $\overline{MQ}$ satisfacía la ecuación $x^2 = ax - b^2$. Contrariamente, si la longitud del segmento $\overline{MR}$ fuese $MR = x$, entonces la longitud del segmento $\overline{MQ}$ debía ser $MQ = a - x$. Entonces, la ecuación (15) la reescribió como: $x(a - x) = b^2$ o $x^2 = ax - b^2$. De esta última igualdad pudo interpretar que la longitud del segmento $\overline{MR}$ satisfacía la ecuación $x^2 = ax - b^2$. Nótese que la construcción geométrica de Descartes estaba basada en el hecho $\frac{1}{2}a \geq b$, de lo contrario la circunferencia no intersectaría a la recta que pasa por R y Q y, las raíces de la ecuación serían de la forma $a \pm \sqrt{-b}$. A esta observación Descartes escribió:

“Et si le cercle, qui ayant son centre au point N passe par le point L, ne coupe ni ne touche la ligne droite MQR, il n’y a aucune racine en l’équation, de façon qu’ on peut assurer que la construction du problème proposé est impossible.” Véase [Des54, p. 15].

Por esta razón, a las raíces sofisticadas se les empezó a conocer como números *imposibles*. Descartes también les acuñó el calificativo de *imaginarios* desde que expresó en el libro III:

“...on ne fçaurait les rendre autres qu’ imaginaires.” Véase [Des54, p. 174].

Podríamos pensar que Descartes trató de encontrar un significado geométrico a las cantidades imaginarias o imposibles, pero sus escritos indican que no tuvo éxito. Otro intento por construir geoméricamente la cantidad $\sqrt{-1}$ apunta hacia el matemático inglés *John Wallis*⁶ (1616-1703), en su obra *Traite de l’Algebre* (1685), Capítulo LXVI, conociendo los números negativos, a cada punto de una línea recta le asoció un único número real y viceversa. ¡Esta es la representación geométrica de la recta real que conocemos! Parece ser que Wallis tenía idea de dónde construir geoméricamente los números imaginarios, pues escribió:

“Where $\sqrt{}$ implies a Mean Proportional between a Positive and a Negative Quantity. For like as $\sqrt{bc}$ signifies a Mean Proportional between $+b$ and $+c$; or between $-b$ and $-c$; (either of which, by Multiplication, makes $+bc$) tween $-b$ and $+c$; either of which being Multiplied, makes $-bc$. And this as to Algebraick confideration, is the true notion of such Imaginary Root, $\sqrt{-bc}$.” Véase [Wal85, p. 290]

En el capítulo LXVII, Wallis representó la cantidad $\sqrt{-81}$ como la longitud del segmento de línea recta $\overline{BC}$ cercana al eje perpendicular $\overline{PC}$ (véase Figura 4), el cual conocemos como el eje imaginario. Este trabajo fue un gran progreso a la interpretación geométrica de las raíces imaginarias.

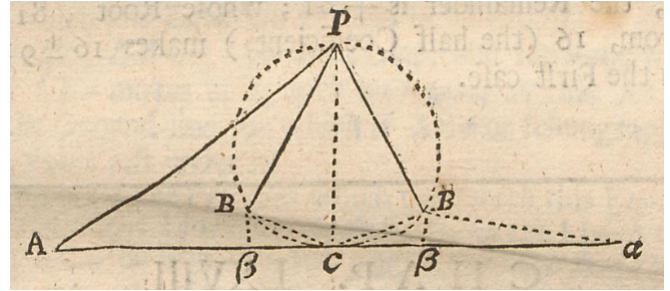


Figura 4: *Construcción de Wallis.*

Uno de los artifices del *cálculo infinitesimal* también estudió las raíces imaginarias. El alemán *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716) probó en 1676 la relación

$$\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = \sqrt{6}.$$

Además, en 1702 factorizó la expresión $x^4 + a^4$ como (véase [Smi25, p. 264])

$$x^4 + a^4 = \left(x \pm a\sqrt{-\sqrt{-1}} \right) \left(x \pm a\sqrt{\sqrt{-1}} \right).$$

Con ayuda de la sustitución trigonométrica, nosotros nos convencemos que la primitiva de la función $\frac{1}{x^2 + 1}$ es $\arccotan(x)$, es decir,

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arccotan(x) + C.$$

En 1702, el matemático suizo Johann Bernoulli (1667-1748) descompuso la función fraccionaria $\frac{1}{x^2 + 1}$ como la suma de otras dos fracciones más “sencillas”

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left(\frac{1}{x - \sqrt{-1}} - \frac{1}{x + \sqrt{-1}} \right)$$

y, expresó la función *arcotangente* (salvo constantes) en términos del *logaritmo complejo*⁷

$$\begin{aligned} \arccotan(x) &= \int \frac{1}{x^2 + 1} dx, \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \int \left(\frac{1}{x - \sqrt{-1}} - \frac{1}{x + \sqrt{-1}} \right) dx, \quad (16) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \ln \left(\frac{x - \sqrt{-1}}{x + \sqrt{-1}} \right). \end{aligned}$$

⁶Introdujo también el símbolo que conocemos como infinito ∞ .

⁷Desde el punto de vista histórico, podemos pensar que allí surgió este logaritmo.

Doce años después, en marzo 1714 el inglés Roger Cotes (1682-1716) publicó el artículo titulado *Logometria* en *Philosophical Transactions of Royal Society*,⁸ en él, presentó una fórmula interesante

$$\ln(\cos(\phi) + \sqrt{-1} \sin(\phi)) = \sqrt{-1}\phi, \quad (17)$$

la cual es equivalente a la conocida fórmula de Euler $\cos(\phi) + i \sin(\phi) = e^{i\phi}$.

¿Cómo obtuvo Cotes esta relación? En términos modernos, él tomó la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde a y b son las longitudes de los semi ejes. Ahora, la curva que se obtiene al intersectar la elipse con el primer cuadrante del plano cartesiano (véase Figure 5-a) la giró alrededor del eje y y generó una superficie S , la cual es la parte superior de un elipsoide (véase Figura 5-b).

Luego, calculó el área de la superficie S y obtuvo las relaciones

$$A(S) = \pi a \left(a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) \right), \quad (18)$$

si $a > b$, o

$$A(S) = \pi a \left(a + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \right) \right), \quad (19)$$

si $a < b$. Sin embargo, Cotes notó que cualquiera de las expresiones (18) o (19) era correcta para ambos casos: $a > b$ y $a < b$, i.e.,

$$\begin{aligned} \pi a \left(a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) \right) = \\ \pi a \left(a + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \right) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

El siguiente paso de Cotes fue definir la cantidad ϕ de la siguiente manera

$$\sin(\phi) = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \frac{\sqrt{-1}\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \text{ y } \cos(\phi) = \frac{a}{b},$$

y luego, reescribió la ecuación (20) como sigue

$$\begin{aligned} \pi a \left(a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln(\cos(\phi) - \sqrt{-1} \sin(\phi)) \right) = \\ \pi a \left(a + \frac{b^2}{\sqrt{-1}\sqrt{b^2 - a^2}} \sin^{-1}(\sin(\phi)) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

De esta última igualdad obtuvo la expresión

$$-\sqrt{-1}\phi = \ln(\cos(\phi) - \sqrt{-1} \sin(\phi)),$$

la cual era equivalente a la relación (17)

$$\ln(\cos(\phi) + \sqrt{-1} \sin(\phi)) = \sqrt{-1}\phi.$$

⁸Para una completa versión inglesa *Logometria* véase [Gow83].

La fórmula de Cotes le permitió al matemático francés Abraham de Moivre (1667-1754) introducir en 1730 la conocida relación

$$(\cos(\phi) + \sqrt{-1} \sin(\phi))^n = \cos(n\phi) + \sqrt{-1} \sin(n\phi).$$

Además, si consideramos $\phi = \frac{\pi}{2}$ y reemplazamos en la ecuación dada por Cotes obtendremos

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\ln(\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}},$$

una maravillosa manera de representar π mediante el logaritmo complejo. ¡Esta representación ya era conocida por Leonhard Paul Euler (1707-1783) y Johann Bernoulli! (Véase [Fla03, p. 82]). El 18 de octubre de 1740, Euler escribió una carta a Johann Bernoulli contándole que encontró la solución a la ecuación diferencial

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 2 \quad \text{y} \quad y'(0) = 0,$$

la cual escribió como

$$y(x) = 2 \cos(x) \quad \text{y} \quad y(x) = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}.$$

Así, Euler introdujo las relaciones⁹ (véase [Nah98, p. 143])

$$\sin(\phi) = \frac{e^{\sqrt{-1}\phi} - e^{-\sqrt{-1}\phi}}{2\sqrt{-1}} \text{ y } \cos(\phi) = \frac{e^{\sqrt{-1}\phi} + e^{-\sqrt{-1}\phi}}{2}.$$

Euler también desarrolló la notación $a + b\sqrt{-1} = e^C(\cos(\phi) + \sqrt{-1} \sin(\phi)) = e^C e^{\sqrt{-1}(\phi \pm 2\lambda\pi)}$ y la función logaritmo complejo $\ln(a + b\sqrt{-1}) = C + \sqrt{-1}(\phi \pm 2\lambda\pi)$, donde λ es un entero positivo o cero [Kli72, p. 411]. La notación i que actualmente usamos para designar $\sqrt{-1}$ fue introducida también por Euler en su artículo *De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet*. *M. S. Academiae exhibit. die 5. Maii 1777*. Allí Euler escribió:

“...formulam $\sqrt{-1}$ littera i in posterum designabo...”

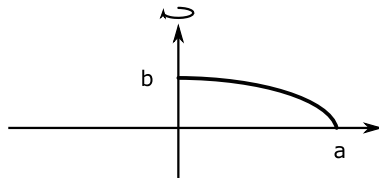
El problema de la representación geométrica de las raíces imaginarias se abordó con mayor éxito el 10 de marzo de 1797. En esta fecha el noruego Caspar Wessel (1745-1818) presentó su trabajo titulado *On the Analytical Representation of Direction. An Attempt Applied Chiefly to Solving Plane and Spherical Polygons*¹⁰ [Wes99] a *La Real Academia de Ciencias Danesa*, que fue publicado dos años después. En él, representó geométricamente a una raíz imaginaria $a + bi$, mediante un *segmento dirigido*¹¹ y, describió la adición y multiplicación de dichos segmentos dirigidos¹². Desde el punto

⁹El trabajo de Euler con este resultado fue publicado en 1748.

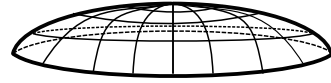
¹⁰Su trabajo está escrito en danés, sin embargo este libro contiene la traducción en la lengua inglesa del ensayo escrito por Casper Wessel, presentado a la Real Academia de Ciencias Danesa.

¹¹Actualmente los conocemos como vectores.

¹²Este trabajo dio apertura al nombre de los números imaginarios.



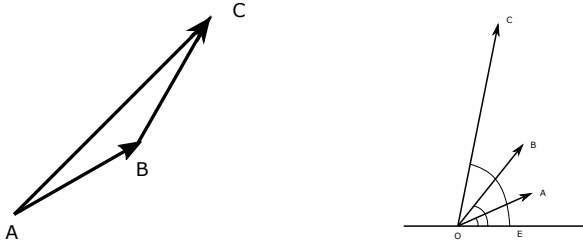
a. Intersección de la elipse y el primer cuadrante.



b. Parte superior de un elipsoide.

Figura 5: Construcción de la superficie S .

de vista geométrico, la suma de segmentos dirigidos correspondía a la regla del paralelogramo. En la Figura 6-a se ilustra la suma de los segmentos dirigidos $\vec{AB}$ y $\vec{BC}$, la cual escribimos formalmente mediante $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. Para definir el producto entre segmentos dirigidos, Wessel tomó como referencia una línea recta y allí marcó dos puntos, el origen 0 y otro E . Luego, definió la multiplicación de los segmentos dirigidos $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$ como el segmento dirigido $\vec{OC}$ el cual tenía longitud el producto de las magnitudes de los segmentos dirigidos $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$ y, dirección la suma de las direcciones de los segmentos dirigidos $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$, es decir, el segmento dirigido $\vec{OC}$ debía tener longitud $|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}|$ ¹³ y sentido $m(\angle COE) = m(\angle AOE) + m(\angle BOE)$ ¹⁴ (véase Figura 6-b).



a. Regla del paralelogramo. b. Multiplicación de vectores.

Figura 6: Operaciones con vectores.

¿Cómo descubrió Wessel la multiplicación de números complejos? Lo hizo desde las siguientes observaciones descritas en el Cuadro 1.

¿Cómo asoció Wessel a cada imaginario $a + \sqrt{-1}b$ un segmento dirigido? Primero tomó el plano euclidiano, trazó dos líneas rectas que se intersectan en un punto 0 -el origen- y formando cuatro ángulos rectos (los ejes real e imaginario)¹⁵. Luego, ubicó sobre dichas rectas los puntos 1, -1 , $\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$ (véase Figura 7), entonces al número imaginario $a + \sqrt{-1}b$ le asoció el segmento dirigido $\vec{OA}$ (véase Figura

7) con longitud $r := \sqrt{a^2 + b^2}$ y dirección

$$\phi = \begin{cases} \operatorname{arccot} \left(\frac{y}{x} \right) - \pi; & \text{si } y < 0, x < 0; \\ -\frac{\pi}{2}; & \text{si } y < 0, x = 0; \\ \operatorname{arccot} \left(\frac{y}{x} \right); & \text{si } x > 0; \\ \frac{\pi}{2}; & \text{si } y > 0, x = 0; \\ \operatorname{arccot} \left(\frac{y}{x} \right) + \pi; & \text{si } y \geq 0, x < 0. \end{cases}$$

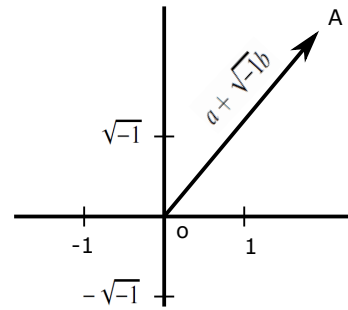


Figura 7: Ilustración de la construcción de $\sqrt{-1}$ de Wessel.

Así, Wessel escribió $a = r \cos(\phi)$, $b = r \sin(\phi)$ y $a + \sqrt{-1}b = r(\cos(\phi) + \sqrt{-1} \sin(\phi))$. Luego, demostró que si $c + \sqrt{-1}d = r'(\cos(\alpha) + \sqrt{-1} \sin(\alpha))$, entonces la multiplicación de números imaginarios estaba dada mediante la expresión

$$\begin{aligned} (a + \sqrt{-1}b) \cdot (c + \sqrt{-1}d) &= rr'(\cos(\phi + \alpha) \\ &\quad + \sqrt{-1} \sin(\phi + \alpha)), \\ &= (ac - bd + \sqrt{-1}(ad + bc)). \end{aligned}$$

Y la suma de números imaginarios estaba dada mediante la expresión

$$\begin{aligned} (a + \sqrt{-1}b) + (c + \sqrt{-1}d) &= r \cos(\phi) + r' \cos(\alpha) \\ &\quad + \sqrt{-1}(r \sin \phi + r' \sin(\alpha)), \\ &= a + c + \sqrt{-1}(b + d). \end{aligned}$$

¿Quién fue Jean Robert Argand? Era un contador parisino (1768-1822). Esencialmente, sabemos poco de la vida de

¹³El símbolo $||$ denota longitud.

¹⁴El símbolo m denota la medida del ángulo.

¹⁵Los historiadores generalmente atribuyen a Wessel ser el primero en asociar un eje perpendicular -eje de los imaginarios- al eje real (véase [Nah98, p. 53]).

Multiplicación	Representación geométrica (un segmento dirigido)
$(1) \cdot (1) = 1$	Con longitud 1 y dirección 0° .
$(1) \cdot (-1) = -1$	Con longitud 1 y dirección 180°
$(-1) \cdot (-1) = 1$	Con longitud 1 y dirección 0° .
$(1) \cdot (\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}$	Con longitud 1 y dirección 90° .
$(1) \cdot (-\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}$	Con longitud 1 y dirección $0^\circ + 270^\circ = 270^\circ$.
$(-1) \cdot (\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}$	Con longitud 1 y dirección $180^\circ + 90^\circ = 270^\circ$.
$(-1) \cdot (-\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}$	Con longitud 1 y dirección $180^\circ + 270^\circ = 360^\circ + 90^\circ = 90^\circ$.
$(\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{-1}) = -1$	Con longitud 1 y dirección $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.
$(\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1}) = 1$	Con longitud 1 y dirección $90^\circ + 270^\circ = 360^\circ = 0^\circ$.
$(-\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{-1}) = 1$	Con longitud 1 y dirección $270^\circ + 90^\circ = 360^\circ = 0^\circ$.
$(-\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1}) = -1$	Con longitud 1 y dirección $270^\circ + 270^\circ = 360^\circ + 180^\circ = 180^\circ$.

Cuadro 1: Observaciones de Wessel.

este hombre. Desconocemos si contaba con educación matemática. Sin embargo, sabemos que Argand produjo un folleto en 1806, titulado *Essai sur une manière de présenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*¹⁶ [Arg71], en el cual no incluyó el nombre del autor. Este panfleto cayó en manos de *Adrien-Marie Legendre* (1752-1833), quien a su vez se lo mencionó a través de una carta a *Francois Francais* (1768-1810), un profesor de matemáticas con un amplio bagaje militar. Cuando murió Francais, su hermano *Jaques* (1775-1833) heredó sus documentos. Jaques también tenía amplios conocimientos militares y matemáticos, él era profesor en *Ecole Impériale d' Application du Génie et de l' Artillerie* in Metz. Efectivamente, Jaques encontró la carta de Legendre dirigida a su hermano en la cual le describió los resultados matemáticos de Argand. En esta misiva Legendre no mencionó a Argand. Motivado por estas ideas, Jaques publicó un artículo en 1813 en la revista *Annales de Mathématiques*, en el cual introdujo las ideas básicas de la geometría compleja. En el último párrafo del documento, Jaques reconoció la carta de Legendre a Francais y pidió al autor desconocido que se releva. Argand se enteró de la noticia y se lo comunicó a Francais. Entonces, en el siguiente número de la revista, Francais notificó que Argand era el primero que había desarrollado la geometría de los imaginarios (ninguno de los dos había oído hablar de Wessel [Nah98, p. 74]).

En su artículo, Argand da una interpretación de los números imaginarios $a + b\sqrt{-1}$ como un punto en el plano y describió las reglas geométricas de la multiplicación y adición de los números imaginarios. Argand también interpretó $\sqrt{-1}$ como una rotación de 180° .

El príncipe de las matemáticas *Karl Friedrich Gauss* (1777-1855) también dio valiosos aportes a los conocidos, de momento, como los números imaginarios, pues en abril de 1831, Gauss los renombró como los números *complejos* (véase [Gau73, p. 102]). En el año de 1799 presentó su tesis doctoral titulada *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in fac-*

*tores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*¹⁷ (véase [Gau99]), en ella introdujo la primera de cuatro demostraciones, que publicó durante toda su vida, del teorema Fundamental del Álgebra. ¿Qué nos dice este teorema?

Teorema Fundamental del Álgebra. *Consideremos la colección $\{a_0, \dots, a_n\}$ de $n+1$ números complejos tales que $n \geq 1$ y $a_0 \neq 0$. Tomemos el polinomio $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$, entonces existe un número complejo $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$.*

En 1816, Gauss introdujo dos nuevas pruebas para este teorema en su escrito titulado *Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*. Comm. Recentiores (Gottingae), 3:107-142, 1816. In Werke III, 31-56. Marsden, J. E. en el libro *Basic Complex Analysis* p. 151 presentó la prueba del Teorema Fundamental de Álgebra usando esencialmente las ideas dadas por Gauss en esta publicación. Básicamente, la estrategia consistió en demostrar esta afirmación procediendo por contradicción. Supuso que el polinomio $p(z)$ no tenía raíces y construyó la nueva función $f(z) = \frac{1}{p(z)}$, la cual resultaba ser entera y acotada. Luego, aplicó el Teorema de Liouville y dedujo que la función f debía ser constante *ergo*, el polinomio $p(z)$ también era una constante. Este hecho era una contradicción, pues el polinomio $p(z)$ no era constante. Este razonamiento lo llevó a concluir que debía existir un elemento $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$.

En abril de 1831, Gauss presentó (véase [Gau73, p. 102]) sus ideas geométricas de los complejos en la Real Sociedad de Gotinga, las cuales coincidían con las de Argand. Tal parece, que Gauss ya había desarrollado estas nociones desde 1796 (¡mucho antes de Wessel!), sin embargo, como muchos otros de sus trabajos, no los publicó hasta que sus ideas estuviesen maduras [Nah98, p. 82].

Con el matemático francés *Augustin Louis Cauchy* (1789-1857) se dio inicio al estudio de la funciones de variables que son complejo valuadas, es decir, funciones con regla de

¹⁶Del francés al castellano *Ensayo sobre una forma de representar las cantidades imaginarias mediante construcciones geométricas*.

¹⁷Del latín al castellano *Nuevas pruebas del teorema donde cada función integral algebraica de una variable puede resolverse en factores reales de primer o segundo grado*.

correspondencia $f(x + iy)$. En el año de 1814 presentó a la *Academia de Ciencias Francesa* el escrito *Mémoire sur les intégrales définies* que contenía sus aportes al desarrollo de la teoría de funciones complejas [Ett22]. En sus memorias, Cauchy probó que si una función compleja f es analítica en una región G “con ciertas características”, entonces la integral de f a lo largo de la frontera de cualquier rectángulo que está contenido en G es cero. Cauchy también estudió las funciones complejas que son discontinuas en puntos aislados y obtuvo una fórmula, la cual es la esencia del cálculo de los residuos. ¿Quién introdujo la definición de números complejos que usualmente aprendemos en un curso elemental de variable compleja? El concepto apareció en 1837, fue introducido por el irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865) cuando publicó *Theory of Conjugate Functions or Algebraic Couples: with a Preliminary Essay on Algebra as a Science of Pure Time* [Ham37]. Allí definió una pareja ordenada (a, b) de números reales a y b , la suma y multiplicación de parejas ordenadas como

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &:= (a + c, b + d); \\ (a, b) \cdot (c, d) &:= (ac - bd, bc + ad).\end{aligned}$$

Además, Hamilton definió la raíz cuadrada de una pareja ordenada. Luego, identificó el número real a con la pareja ordenada $(a, 0)$ y calculó

$$\sqrt{-1} = \sqrt{(-1, 0)} = (0, 1).$$

De esta última igualdad, él escribió

“...be concisely denoted as follows, $\sqrt{-1} = (0, 1)$. In the theory of single numbers, the symbol $\sqrt{-1}$ is absurd, and denotes an impossible extraction, or a merely imaginary number; but in the theory of couples, the same symbol $\sqrt{-1}$ is significant, and denotes a possible extraction, or a real couple, namely (as we have just now seen) the principal square-root of the couple $(-1, 0)$ ”.

¿Qué ha sucedido después de Hamilton? Aún son demasiadas las anécdotas fascinantes que faltan por relatar. Sin embargo, invitamos a los lectores a nutrir *Una breve historia imaginaria*.

Agradecimientos

El autor fue apoyado por la UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, SEDE MANIZALES. Él dedica este trabajo a su pequeña pero hermosa familia: Marbella y Emilio; en aprecio por su amor y apoyo.

Referencias

- [Arg71] R. Argand, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, Nouveau tirage de la 2e édition, précédée d’une pré face par J. Hoüel et augmentée d’une introduction de J. Itard, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1971 (French).
- [Bom72] Rafael Bombelli, *L’ Algebra*, Bologna, 1572.
- [Car93] Girolamo Cardano, *Ars magna or The rules of algebra*, Dover Publications, Inc., New York, 1993. Translated from the Latin and edited by T. Richard Witmer; With a foreword by Oystein Ore; Reprint of the 1968 edition.
- [Des54] René Descartes, *The Geometry*, Dover Publications, Inc. New York., 1954. Translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham.
- [Ett22] H. J. Ettlinger, *Cauchy’s paper of 1814 on definite integrals*, Ann. of Math. (2) **23** (1922), no. 3, 255–270.
- [Fla03] Dominique Flament, *Histoire des nombres complexes*, CNRS Histoire des Sciences. [History and Sciences of the CNRS], CNRS Éditions, Paris, 2003 (French). Entre algèbre et géométrie. [Between algebra and geometry].
- [Gau99] Karl Friedrich Gauß, *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*, PhD thesis, Universität Helmstedt. In Werkes III, 1-30, 1799.
- [Gau73] Carl Friedrich Gauß, *Werke. Band II*, Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1973 (German). Reprint of the 1863 original.
- [Gow83] Ronald Gowing, *Roger Cotes—natural philosopher*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [Gre76] D. R. Green, *The historical development of complex numbers*, Math. Gaz. **60** (1976), no. 412, 99–107.
- [Ham37] William Rowan Hamilton, *Theory of Conjugate Functions or Algebraic Couples: with a Preliminary Essay on Algebra as a Science of Pure Time*, Irish Acad. Trans. **XVII** (1837), 519–422.
- [Kli72] Morris Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York, 1972.
- [Nah98] Paul J. Nahin, *An imaginary tale: the story of $\sqrt{-1}$* , Princeton University Press, Princeton, New Jersey., 1998.
- [NRI] NRICH, *A Complex Mistake*, University of Cambridge, <https://nrich.maths.org/13402>.
- [Ras84] Roshdi Rashed, *Diophante, Les Arithmétiques*, Collection des universités de France Série grecque - Collection Budé, vol. Tome III: Livre IV; Tome IV: Livres V-VI-VII, Les Belles Lettres, Paris, 1984 (French).
- [Smi25] David E. Smith, *History of mathematics*, Vol. 2, Dover Publications, Inc. New York., 1925.
- [Smi13] David Eugene Smith, *Book Review: The Ganita-Sāra-Sangraha of Mahāvīrācārya*, Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1913), no. 6, 310–315.
- [Str23] Edwards Strachey, *Bija Ganita: or the Algebra of the Hindus*, East India Company’s Bengal Civil Service, W. Glendinning, London, 1923.
- [vdW85] B. L. van der Waerden, *A history of algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1985. From al-Khwārizmī to Emmy Noether.
- [Wal85] John Wallis, *A treatise of algebra, both historical and practical*, ETH-Bibliothek Zürich., 1685. Caswell John, Playford.
- [Wes99] Caspar Wessel, *On the analytical representation of direction. An attempt applied chiefly to solving plane and spherical polygons*, Mat. Medd. Danske Vid. Selsk. **46** (1999), no. 1, 103–143. Caspar Wessel: On the analytical representation of direction.

Acerca del autor: Camilo Ramírez Maluendas es doctor en matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México. Es investigador en las áreas de geometría diferencial, topología y combinatoria. Es un gran amante de los perros, hace cinco años tiene dos, llamadas Colombia y Morelia. Algún día espera ser un gran catador de café.

La música de los primeros tres minutos del universo

Ana Milena Cruz *

anamile0792@gmail.com

1. El Big Bang.

No es un secreto que como seres humanos nos caracterizamos por ser bastante curiosos con respecto a todo lo que nos rodea y la razón del por qué existimos. Debido a esto, se han concebido diversos mitos creacionales hasta llegar a elaboradas teorías que van más allá de nosotros y nuestro mundo. Algunas ellas buscan hipótesis menos filosóficas, cuya intención es responder cómo se originó el Universo. Entre estas se encuentra la Teoría del Big Bang, la cual adquirió popularidad hace menos de un siglo.

Un descubrimiento importante que le dio peso a esta teoría fue la observación que el astrónomo Edwin Hubble hizo en 1920 al ver que las galaxias a nuestro alrededor se alejaban [Wei00]. Esto lo logró utilizando el Efecto Doppler de la luz, el cual afirma que si una fuente que emite determinada onda luminosa se aleja de nosotros, cada vez recibiremos una onda de mayor longitud y su color tenderá al rojo. En contraposición, si esta se acerca, la longitud de onda parecerá menor y su color tenderá al azul [Wei00]. En este momento, comprendo que es difícil imaginarlo porque cuando miramos las estrellas en la noche percibimos un color similar entre todas. Por esto, debemos tener en cuenta que el ojo humano es capaz de ver solo un pequeño porcentaje de longitud de onda y este fenómeno es llamado el Espectro Visible por el Ojo Humano. Las longitudes de onda menores e imperceptibles para nosotros son cada vez más cortas y tienden al azul con respecto al espectro electromagnético. De igual forma, las longitudes más largas tienden al rojo.

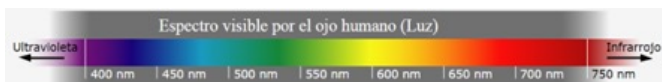


Figura 1: *Espectro electromagnético.*

Teniendo esto en cuenta, lo que Hubble descubrió fue que la mayoría de galaxias tenían un corrimiento al rojo. Esto no nos da un lugar especial en el Universo, pues según el principio cosmológico llamado así por el astrofísico Edward Arthur Milne, simplemente nosotros, al igual que las otras galaxias, observamos que nos alejamos unas de otras.

Otro descubrimiento del cual se debe hablar es la Radiación de Fondo de Microondas. En 1964, los astrónomos Penzias y Wilson encontraron un ruido parásito que no cesaba con el tiempo ni con la dirección en la que se dirigiera la antena

que lo percibía. Esto les llevó a pensar que aquel ruido provenía de un volumen bastante amplio del Universo. Mientras esto ocurría, el teórico P.J.E. Peebles exponía una hipótesis cuya idea sostenía que debía haber un fondo de ruido de radio remanente de lo que fue el universo primitivo ([Wei00], pág. 51). Esto, unido con el descubrimiento de Penzias y Wilson, permitió obtener más adelante lo que llamaremos la fotografía más antigua de nuestro Universo, con una tierna edad de 700.000 años, durante los cuales los fotones, antes imposibilitados para viajar más allá de lo que era aquel universo denso, pudieron hacerlo y lograron viajar dejando su rastro visible en aquella imagen.

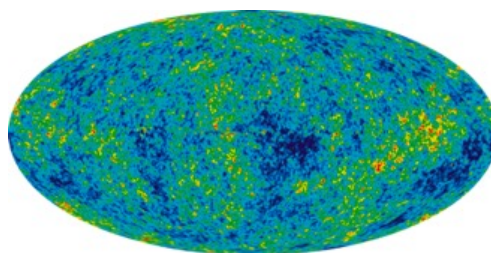


Figura 2: *Radiación de fondo de microondas (NASA, 2014).*

Ahora que se conoce esta información, se intentará detallar lo que posiblemente sucedió antes, durante y unos minutos después de la gran explosión.

2. Los Tres Primeros Minutos del Universo.

Hace eones hubo una gran explosión simultánea en todo lo que comprendía un espacio, que aún hoy en día es difícil clasificar como finito o infinito. En este momento la temperatura del Universo era de unos 100.000 millones de grados Kelvin y las partículas más abundantes eran los Electrones, Positrones, Neutrinos Fantasmales, Antineutrinos y Fotones, las cuales danzaban velozmente en aquella ardiente y densa sopa que contaba con un equilibrio entre materia y antimateria. Se cree que en algún punto hubo un desbalance y esto provocó una mayor cantidad de materia que de antimateria. Gracias a eso, es posible que usted como lector esté frente a este artículo, pues todo lo que conoce está formado de materia ([Wei00], pág. 77), de otra forma, quizá no existiría. Sin embargo, en aquel entonces las partículas que forman actualmente los núcleos atómicos que conocemos eran pocas. De hecho,

*Música Universidad Pedagógica Nacional.

había aproximadamente un protón y un neutrón por cada mil millones de aquellas otras partículas mencionadas anteriormente ([Wei05], pág. 17). Todas ellas producían reacciones al colisionar. Cuando un neutrino y un neutrón chocaban, daban como resultado un electrón y un protón; cuando un positrón y un electrón colisionaban, se formaban dos fotones, y cuando antineutrinos y protones chocaban daban, lugar a un positrón y un neutrón. Estas reacciones también ocurrían a la inversa. Pasados 0,11 segundos, la temperatura descendió a 30.000 millones de grados Kelvin. Esto debió provocar que las reacciones entre partículas aumentaran paulatinamente. 1.09 segundos después, la temperatura era de 10.000 millones de grados Kelvin. Electrones y positrones empezaron a aniquilarse mucho más rápido de lo que podían ser creados durante la colisión entre dos fotones.

A los 13,82 segundos, la temperatura disminuyó a 3.000 millones de grados Kelvin, la temperatura perfecta para que se empezaran a formar los primeros núcleos atómicos estables tales como el Helio 4, Tritio, Helio 3 y Deuterio. Sin embargo, sólo el Helio 4 era capaz de mantenerse a esta temperatura, a los demás les costaba y para el Deuterio era prácticamente imposible, de hecho, en cuanto se formaba, se deshacía nuevamente.

En cuanto pasaron tres minutos, la temperatura llegó a los 1.000 millones de grados Kelvin, lo que permitió una unión más duradera entre protones y neutrones. Por esta razón, el Tritio y el Helio 3 lograron mantenerse. No fue sino hasta los 9.000 millones de grados Kelvin, que finalmente el Deuterio lo consiguió.

Si nos detenemos un poco, nos daremos cuenta de que las ondas estuvieron presentes desde el principio del universo, de hecho podemos imaginar el Big Bang como una onda expansiva que generó una explosión y que sigue su camino aún hasta nuestros días, según lo que se ha podido observar. A continuación, hablaremos de la música que deriva del sonido y que finalmente se compone de ondas sonoras, las cuales necesitan un medio por el cual transportarse para llegar a un destino determinado. Por esto, empezaremos hablando de cómo se plasma la información que esta emite en un medio tangible.

3. El músico Pitágoras.

La escritura musical es fundamental en la mayoría de los casos a la hora de componer y es por eso que se hace necesario hablar de la gramática musical, explicando algunos elementos fundamentales para comprenderla. En cuanto a las notas musicales, se puede decir que existen muchas más de las que se utilizan usualmente, tales como Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, junto a sus respectivos sostenidos y bemoles; estas son los microtonos que serían las notas que podrían encontrarse entre Do y Reb, Reb y Re, y así sucesivamente. Sin duda frente a esto puede surgir la duda de por qué razón se utilizan casi siempre las mismas notas y la razón tiene que ver con la afinación pitagórica.

Pitágoras descubrió que si tomaba una cuerda y la partía por la mitad, generaba la misma nota que la cuerda completa, pero

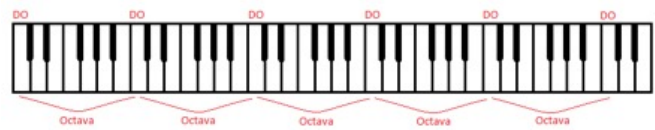


Figura 3: Ubicación de octavas en el piano, del Do al Do.

una octava más arriba, lo que significa que sonaba la misma nota aunque más aguda. Si doblaba el tamaño de la cuerda original, también producía la misma nota, esta vez, una octava abajo, lo que generaba el mismo sonido pero más grave. Esto implica que podía seguir doblando la cuerda infinitamente o cortandola infinitamente y cada vez sonaría la misma nota más aguda o más grave. Teniendo esto en cuenta, decidió dividirla de otra forma, así que tomó dos tercios de la misma y esto produjo la quinta del sonido original de la cuerda. Para entenderlo mejor, se puede pensar la cuerda, con un sonido original en Do, y cuando se toman dos tercios de la misma y se pulsa, el sonido que emite es un Sol. Si a partir del Sol se cuenta una quinta se formaría un Re, desde el Re un La y así sucesivamente hasta llegar nuevamente al Do. Las octavas y quintas partiendo de una nota en particular tienen el nombre de intervalos, los cuales son distancias específicas entre dos notas como es el caso entre Do y Sol. También existen los unísonos, las segundas, terceras, cuartas, sextas y séptimas. (ver esto en <https://youtu.be/P7iC-fbdKmQ>)

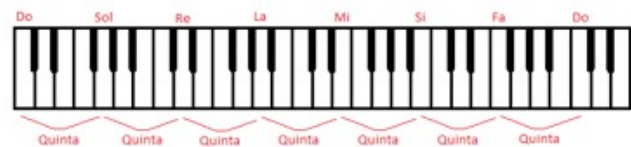


Figura 4: Ubicación de quintas en el piano, del Do en adelante.

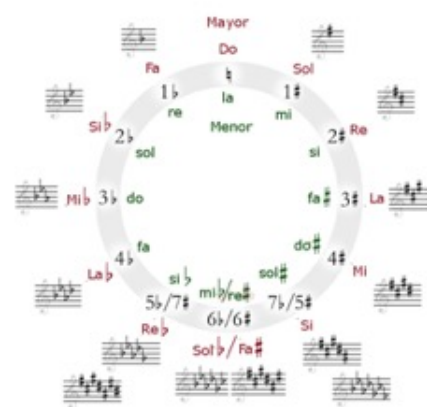


Figura 5: Círculo de quintas.

Cuando se organizan en orden las notas que provienen de las quintas partiendo del Do se forma la escala mayor. Si se em-

pieza desde una nota diferente siguiendo el mismo orden consecutivo, se obtienen modos que permiten diferentes sonoridades, dependiendo lo que se quiera transmitir musicalmente. Como ejemplo, se podría decir que el modo jónico o la escala de siete sonidos partiendo de Do transmite fuerza, alegría determinación y grandeza, en cambio, el modo eólico que sería la misma escala pero partiendo de la, transmite melancolía, oscuridad y tristeza. No es coincidencia que la música de cine utilice esto a su favor para componer la música de ciertas películas, bien sean de terror, suspenso, super heroes, etc. Un ejemplo es Star Wars, que relaciona sus personajes con los modos. Cada personaje tiene un tema musical particular y este emplea un modo u otro dependiendo de si está alegre, triste, en peligro, etc, de hecho, un ejemplo muy claro y significativo se puede ver cuando se utiliza el modo dórico, que está en el medio de los modos mayores y menores para simbolizar a La Fuerza, que se encuentra entre la luz y la oscuridad (ver esto en <https://youtu.be/VEVIAF`2tUM>).

Volviendo a la cuerda, si de esta se toman tres cuartos, se genera una cuarta o un Fa, pensando que la cuerda completa emite un Do. Es así que se obtuvieron los tres grados básicos utilizados ampliamente en la música, los cuales son el primer grado o tónica (Do), el cuarto grado o subdominante (Fa) y el quinto grado o dominante (Sol). La música tonal que en su mayoría es la que nos rodea todos los días, gira en torno a estos grados con algunas variaciones, siempre pasando por la subdominante y dominante para generarnos una tensión que luego requiere una resolución llegando a la tónica.

La distancia que hay entre las notas que componen la escala mayor se dividen en tonos y semitonos. De un modo más sencillo, se pueden entender los tonos observando un piano. En la Figura 3, se muestra una sección del teclado compuesto por teclas blancas y negras. A la distancia que hay de una tecla blanca a otra tecla blanca siempre y cuando haya una tecla negra en la mitad, se le conoce como tono. Si en medio de las dos teclas blancas no hay una tecla negra, la distancia entre ambas compone un semitono. Lo mismo ocurre entre dos teclas negras que comparten una tecla en la mitad (tono), o cuando se cuenta la distancia entre una tecla blanca y una negra (semitono). Gracias a esto, los intervalos pueden adquirir un valor mayor, menor, disminuido o aumentado respectivamente, sumándoles o restándoles semitonos. Por ejemplo, de Do a Re se forma una segunda, que al no tener ninguna alteración, toma el nombre de segunda mayor. Si desde el Re se resta medio tono, este se convierte en Re bemol (Reb) y se construye una segunda menor. La tercera mayor se compone de dos tonos de distancia, si en vez de esto, la distancia es de un tono y medio, esta sería una tercera menor. Si la tercera se compone de un tono, será una tercera disminuida y si está formada por dos tonos y un semitono, se llamará tercera aumentada. Esto mismo se puede efectuar con los demás intervalos, con la excepción de las cuartas y quintas que sólo llevan el nombre de justas, aumentadas o disminuidas, siendo justas cuando no tienen ninguna alteración en cuanto a los tonos y semitonos que las conforman.

Ahora que se conoce un poco acerca de intervalos y semito-



Figura 6: Exposición de algunos intervalos en el piano.

nos, será más fácil acceder al tema de los acordes, que son tres o más notas escritas generalmente de forma vertical y que suenan simultáneamente, existiendo algunas excepciones en las que su sonido no es simultáneo pero sí siguen un patrón vertical. Los acordes hacen parte de la armonía de la música y establecen giros, bien sea por la tónica, subdominante, dominante y demás grados, para generar unas bases sobre las cuales la melodía se moverá. Los acordes se forman a partir de la unión de terceras. La primera tercera parte de cualquier nota y a esta le sigue otra, a la cual se le pueden incluir algunas más. Un acorde básico se forma de dos terceras. Si la primera tercera es mayor y la segunda es menor, será un acorde mayor, por otro lado, si la primera es menor y la segunda es mayor, será un acorde menor. Es así que también se pueden formar acordes aumentados y disminuidos.

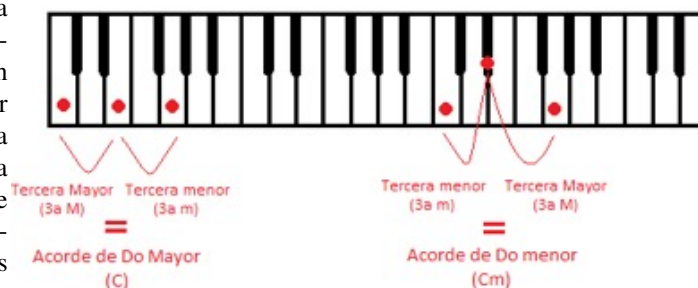


Figura 7: Acorde de Do Mayor y acorde de Do menor.

Las notas, intervalos y acordes se escriben sobre cinco líneas y cuatro espacios que llevan el nombre de pentagrama. Las notas se escriben sobre cualquiera de las dos opciones, siempre dependiendo de una clave inicial que predispone el nombre que va llevar cada línea o espacio.

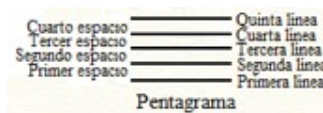


Figura 8: Pentagrama

Existen tres claves básicas que indican en qué lugar del pentagrama se escriben notas musicales específicas, dependiendo a su vez del instrumento al que se dirijan. Estas son la Clave de

Sol (Indica Sol para la segunda línea), Clave de Fa (Indica Fa para la cuarta línea) y Clave de Do. Esta última es movable, sin embargo, solo hablaremos de Do en tercera, debido a que es la más conocida y no se usó para la composición final (Do en tercera indica Do para la tercera línea). Las claves de Sol y Fa fueron altamente utilizadas ya que son esenciales para la escritura del piano.



Figura 9: Claves .

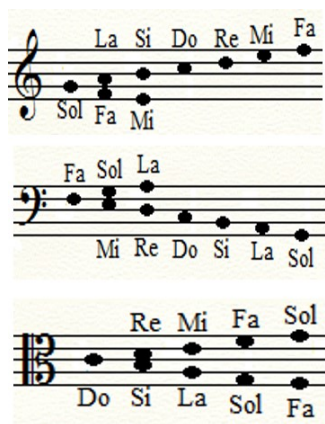


Figura 10: Asignación de notas de acuerdo a las claves .

En algunas ocasiones, las líneas y espacios del pentagrama no son suficientes para escribir todas las notas que se necesitan. Por esta razón, se añaden líneas adicionales sobre las cuales (o usando los espacios entre ellas) se escriben notas



Figura 11: Líneas adicionales.

A medida que el discurso musical va tomando forma, las notas se ubican sobre el pentagrama que está dividido en secciones llamadas compases. Estos, por lo regular, son anteceditos por una métrica que establece cuántas figuras debe haber por compás.

4. Música para el universo.

Después de esta breve introducción a la teoría musical, llegamos al momento en que el Big Bang se hizo música. La com-



Figura 12: Algunas notas sobre las líneas adicionales.

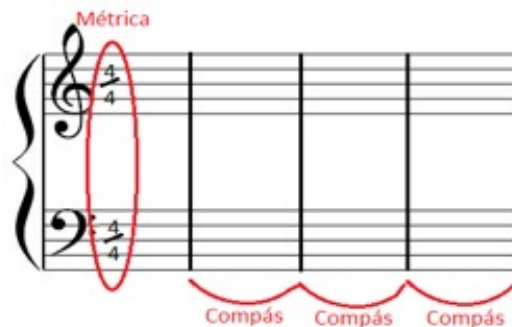


Figura 13: Métrica y compases .

posición que quiso acercarse a este majestuoso acontecimiento lleva el nombre del libro que la inspiró, Los Tres Primeros Minutos del Universo [Wei00]. En cuanto al Big Bang, Weinberg describe segundo a segundo lo que posiblemente ocurrió antes, durante y después del primer centésimo de segundo, o antes, durante y después de aquel momento en el que el tiempo empezó a correr en nuestro Universo. Este punto es crucial porque fue entonces cuando se establecieron los ingredientes principales que darían forma al Cosmos.

Así se decidió que la composición final abarcaría el momento antes del primer centésimo de segundo, cuando había fuertes interacciones entre partículas elementales; el primer centésimo de segundo o la gran explosión, momento en que toda partícula se aleja de toda otra partícula; los 0,11 segundos después de la gran explosión, cuando materia y antimateria colisionan para concebir otras partículas; los 1,09 segundos, durante los cuales hay un exceso de choques entre positrones y electrones en relación a la reacción que podría crear a los mismos como lo es el choque entre fotones; y de los 13,83 segundos a los 3 primeros minutos, momento en el cual se empiezan a formar los primeros núcleos atómicos. Sin duda, vale la pena mencionar que al momento de realizar la parte de la composición que hablaría de los últimos tres minutos, hubo gran expectativa porque se pensaba en los primeros núcleos que luego harían parte de átomos y serían cruciales para que millones de años después los seres humanos pudieran existir y se preguntaran sobre el Universo. Mientras esta cadena de acontecimientos ocurría, se podría decir que las partículas elementales eran las actrices principales, por esta razón, fueron relevantes durante la composición. Más adelante, se detalla cómo a partir de esto, se determinaron elementos musicales que darían lugar a la composición final.

Además, es importante recalcar que se utilizó como inspiración al autor David Walters para encontrar las notas que repre-



Figura 14: *Webern, op. 3, no. 1, mm. 4-6. Pitch intervals (Walters, 2001).*

sentan a las partículas elementales, en referencia al momento en el que él explica cómo se analizan obras relacionadas con la teoría de conjuntos (en música), escribiendo números positivos o negativos en los intervalos escritos en dichas partituras. Por ejemplo, en la Figura 14, se destacan dos intervalos de un semitono. A uno se le agrega un símbolo negativo (recuadro verde) y al otro uno positivo (recuadro rojo), de acuerdo a la dirección en que se dirige el intervalo, bien sea negativo para el intervalo descendente o positivo para el intervalo ascendente.

Volviendo al tema de los primeros minutos del Universo, 0,11 segundos después de la gran explosión las partículas elementales tales como antineutrinos ($\bar{\nu}$), positrones (e^+), fotones (γ), electrones (e^-), neutrones (n) y las que serían importantes en la elaboración de los primeros núcleos atómicos, como los protones (p) y neutrinos (ν), empiezan a aniquilarse para producir otras partículas del mismo tipo. En lugar de desaparecer, su energía da lugar a otras partículas o antipartículas. Teniendo en cuenta este fenómeno, se tomó la decisión de asignar números positivos o negativos a cada una, contemplando su naturaleza de antimateria (-) o materia (+). La única partícula diferente es el fotón por su naturaleza neutral (Es tanto materia como antimateria), por esto se le asigna el número 0 ([Wei00], pág. 77, [Wei05], pág. 13).

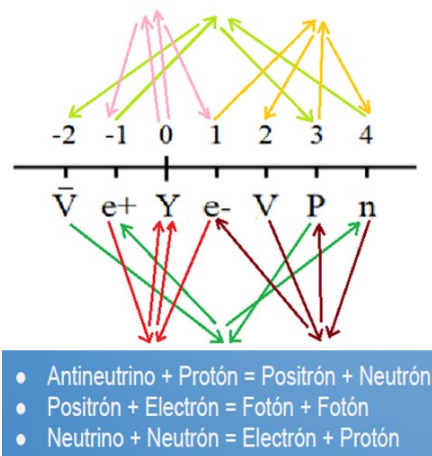


Figura 15: *Reacciones entre partículas elementales.*

Lo que se muestra en la Figura 15, son las principales reacciones después de los 0,11 segundos, consecuencia de la colisión entre las partículas elementales. Cuando las flechas se encuentran, simbolizan la colisión, cuando estas se dirigen a dos partículas en concreto, simbolizan el resultado. Debido

a que las reacciones pueden suceder al contrario, en la parte superior de la recta se observan flechas con un color más claro y flechas que señalan en direcciones contrarias a lo que se escribió en la parte inferior de la misma.

Recordando el valor que se le da a los intervalos ascendentes o descendentes en la teoría de conjuntos según Walters, se asignó un lugar en el pentagrama a las notas que simbolizarían las partículas elementales de la siguiente forma:

Del choque entre dos fotones (γ) surge un positrón (e^+) y un electrón (e^-). Al fotón se le da el lugar de Do central, debido a que es la mitad entre los dos pentagramas que se usan para la escritura del piano. Como es una partícula neutra, se ubica en el centro, las demás se acomodan sobre esta o debajo de esta, según su naturaleza de materia o antimateria respectivamente. Partiendo del fotón, se escribe un intervalo de +1 desde este para dar lugar al electrón (Re bemol) y un intervalo de -1 desde el mismo para simbolizar al positrón (Si).

Siguiendo la secuencia en la cual de la partícula inferior a la superior, existía una distancia de dos semitonos, se asignó un intervalo de +2 desde el electrón (Re bemol) para dar lugar al protón (P). En cuanto al antineutrino ($\bar{\nu}$), este siguió la secuencia de un semitono entre el fotón y el positrón, partiendo de este con un -1 para tomar el lugar de Si bemol. Debido a que en la siguiente reacción estaba presente el neutrón (n), se le asignó un lugar en la partitura posteriormente.

Finalmente, el neutrino (ν) tomó lugar en el intervalo faltante que había entre el electrón (Re bemol) y el protón (Mi bemol), con un +1 desde del electrón para llevar el nombre de Re. El neutrón partió desde el protón con un +1, completando las distancias de semitono entre notas, para convertirse en un Mi.

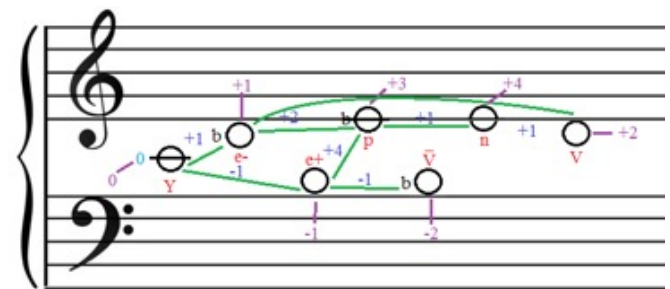


Figura 16: *Partículas y notas.*

Pensando en la gran explosión y en el momento que toda partícula se aleja de toda otra partícula ([Wei05], pág. 16), el resultado sonoro debía dar una sensación menos predecible y más aleatoria. Por esta razón, en un primer momento se le asignó un valor de duración determinado a cada nota fundamental (de menor a mayor), tomando como referente el Serialismo Integral y lo que se investigó acerca de este en [Mor99]. Es así como la siguiente figura apareció en el camino, dándole una duración característica a cada nota fundamental. Se determinó que entre más aguda fuera la nota, mayor sería su duración:

El segundo movimiento de la composición busca hacer alusión a los choques entre partículas, pasados 0,11 segundos.

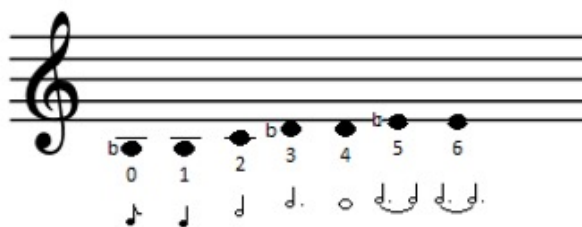


Figura 17: *Duración asignada a notas elementales*, [Cru19].

Por esto, se pensó en la posibilidad de expresar tales colisiones por medio de intervalos. Teniendo en cuenta que cada partícula contaba con una nota representativa, se formaron intervalos con las mismas, de acuerdo a los choques y reacciones expuestos en la Figura 15. En la tabla de la Figura 18, se muestra el choque entre partículas con sus notas características y el resultado de las mismas después del signo (=). Algunos de estos intervalos se utilizaron para realizar tercer movimiento (recordemos que cada reacción puede suceder a la inversa ([Wei05], pág. 75).

$\bar{V}=Bb$ $P=Eb$	↪	5a Just	↪	4a Just	=	4a Just	↪	5a Just	↪	$B=e+$ $E=n$
$V=D$ $n=E$	↪	7a m	↪	2a M	=	2a M	↪	7a m	↪	$Db=e-$ $Eb=P$
$e-=Db$ $e+=B$	↪	3a dim	↪	6a Aum	=	Oct	↪	Unison	↪	$C=Y$ $C=Y$

Figura 18: *Colisiones e intervalos*, [Cru19].

Debido a que del choque entre antineutrino y protón se producen los mismos intervalos que en su reacción, se asignó a este choque la 5ª justa y a su resultado la 4ª justa. Lo mismo se llevó a cabo con el choque entre neutrino y neutrón:

$\bar{V}=Bb$ $P=Eb$	↪	5a Just	=	4a Just	↪	$B=e+$ $E=n$
$V=D$ $n=E$	↪	7a m	=	2a M	↪	$Db=e-$ $Eb=P$

Figura 19: *Colisiones e intervalos*, [Cru19].

El cuarto y último movimiento de la composición intenta recrear el momento en el que se empiezan a formar los primeros núcleos atómicos a los 13, 82 segundos después de la gran explosión. Estos fueron Helio 4 (4He), Tritio (3H), Helio 3 (3He) y Deuterio (2H) ([Wei05], págs. 96 y 97). Teniendo en cuenta que cada uno estaba formado por una cantidad determinada de protones y neutrones, se hizo una relación intervalica nuevamente. Dado que del fotón (Do) al protón (Mi bemol) hay una tercera menor, a esta se le asignó el nombre de protón; del fotón (Do) al neutrón (Mi) hay una tercera mayor, la cual tomo el nombre de neutrón. De acuerdo a la can-

tidad de protones y neutrones que componían a cada núcleo, se formaron terceras menores, mayores, acordes disminuidos, aumentados y menores.

$^4He = 2P + 2n \longrightarrow 2 \text{ Terceras menores} + 2 \text{ Terceras mayores} = X^o + X^+$
$^3H = P + 2n \longrightarrow 1 \text{ Tercera menor} + 2 \text{ Terceras mayores} = \text{Tercera menor} + X^+$
$^3He = 2P + n \longrightarrow 2 \text{ Terceras menores} + 1 \text{ Tercera mayor} = X^o + \text{Tercera mayor}$
$^2H = P + n \longrightarrow 1 \text{ Tercera menor} + 1 \text{ Tercera mayor} = X \text{ menor}$

Figura 20: *Núcleos y acordes característicos*.

Núcleos	Acordes y Terceras
4He	$G^o + Gb^+, Ab^o + G^+, A^o + Ab^+, Bb^o + A^+, B^o + Bb^+, C^o + B^+, Db^o + C^+$
3H	$Gm \text{ (Tercera)} + Gb^+, Abm \text{ (Tercera)} + G^+, Am \text{ (Tercera)} + Ab^+, Bbm \text{ (Tercera)} + A^+, Bm \text{ (Tercera)} + Bb^+, Cm \text{ (Tercera)} + B^+, Dbm \text{ (Tercera)} + C^+$
3He	$G^o + Gb \text{ (Tercera)}, Ab^o + G \text{ (Tercera)}, A^o + Ab \text{ (Tercera)}, Bb^o + A \text{ (Tercera)}, B^o + Bb \text{ (Tercera)}, C^o + B \text{ (Tercera)}, Db^o + C$
2H	$Gm, Abm, Am, Bbm, Bm, Cm, Dbm$

Figura 21: *Al final solo se utilizaron algunos de estos acordes, por decisión de la compositora..*

Del proceso surgió una composición de cuatro movimientos. Un movimiento es la parte de una obra que tiene un inicio y un final. Generalmente hay más de un movimiento para que pueda llevar este nombre. Para familiarizar aún más este término, se puede tomar como ejemplo una serie, que aunque cuenta una historia general, está compuesta por capítulos. A continuación, se hablará con más detalle de cada movimiento que conforma la Composición de Los Tres Primeros Minutos del Universo:

1. Partículas Elementales, es un movimiento lento formado por dos secciones que contrastan entre ellas. Representa lo que sucedió antes, durante y después del primer centésimo de segundo, a más de 100.000 millones de grados Kelvin.
 - Del compás 1 al 14, se presenta la sección A. Por medio de su volumen sonoro en constante aumento, junto con las disonancias de sus acordes, se expresan las interacciones fuertes entre partículas antes del primer centésimo de segundo, debido a que había una gran presión entre ellas que crecía y pedía a gritos un descanso, el cual sería la gran explosión o Big Bang. Además, cada dos compases se escribió una nota nueva, la cual muestra el valor musical asignado a cada partícula elemental.
 - Del compás 15 al 17, se introduce un episodio que sería la gran explosión en un compás de silencio, debido a que no había un medio por el cual podría transportarse el sonido. Su eco se puede escuchar un compás después.

- Del compás 18 al 36, se escribió la sección B, en la que se muestra el momento en que toda partícula se aleja de toda otra partícula, acomodando las notas de las partículas fundamentales en orden aleatorio y utilizando sus duraciones características para lograr un ambiente caótico.
 - Del compás 36 al 43, vuelven a presentarse las partículas elementales junto a sus alturas y duraciones específicas.
2. Colisiones, es un movimiento de dos secciones con bastantes matices rítmicos debido al aumento de colisiones con la disminución en la temperatura. Las alteraciones presentes en las notas que lo conforman se relacionan con la formación de intervalos vista en las figuras 5 y 6. Este movimiento expone los primeros choques entre partículas elementales y sus resultados a los 0,11 segundos después de la gran explosión a una temperatura de 30.000 millones de grados kelvin.
- Del compás 1 al 13, la sección A es de ciclo regular y muestra las colisiones entre partículas con intervalos simultáneos y en forte. Los resultados están dados en intervalos dispuestos sucesivamente de una nota a la otra y en piano.
 - Del compás 13 al 18, la velocidad de las notas aumenta cada vez más de acuerdo al aumento de colisiones con respecto a la disminución en la temperatura.
 - Del compás 19 al 22, la sección B muestra la formación de intervalos en figuras con duraciones menores.
 - Del compás 23 al 25, la sección B1 se basa en ideas de B y los compases del 26 al 31 exponen a B2 con ideas rítmicas de B y B1. Finalmente, del compás 32 al 39 se escriben una vez más, intervalos alusivos a colisiones y resultados entre partículas.
3. Aniquilación, es un movimiento rápido de dos secciones muy contrastantes entre ellas. Muestra el momento en que electrones y positrones empiezan a colisionar más rápido de lo que pueden ser creados.
- Del compás 1 al 3, se presenta el motivo principal con intervalos de terceras disminuidas y sextas aumentadas, que representan los choques entre electrones y positrones en la figura 5 y las duraciones características de las notas inferiores según la figura 4.
 - Del compás 1 al 20, la sección A es de textura homofónica y la disminución de duraciones rítmicas simboliza el aumento de colisiones entre electrones y positrones.
 - Del compás 21 al 26, las duraciones aumentan para dar paso a la siguiente sección.
- Del compás 27 al 38, la sección B representa los choques entre fotones poco frecuentes en ese momento, con intervalos de unísono y octava de acuerdo a la figura 5 y duraciones más largas entre las notas.
 - Del compás 39 al 44, contraatacan las terceras disminuidas y sextas aumentadas.
 - Del compás 45 al 54, se presenta A prima que sería A con algunas variaciones y el final se da del compás 55 al 58 con una extensión del 59 al 62.
4. Vida, es un movimiento lento y rápido en algunas de las partes que lo componen y se divide en cuatro secciones contrastantes entre sí. Representa el momento en el que se empiezan a formar los primeros núcleos atómicos, de los 13,82 segundos a los primeros tres primeros tres minutos del universo. Todas las secciones utilizan algunos acordes presentes en la Tabla 1 de acuerdo a los formados con respecto a cada núcleo.
- Del compás 1 al 18, se expone la sección A, representando al Helio 4. Debido a que este era estable después de los 13,82 segundos, la sección también lo es de principio a fin llevando una idea musical estable.
 - Del compás 19 al 38, se presenta la sección B, representando al Tritio en cuanto a su inestabilidad en este momento debido a que no lograba mantenerse a los 3000 millones de grados kelvin. Musicalmente tiene un aumento rítmico y lleva una idea musical que no se desarrolla y termina abruptamente.
 - Del compás 39 al 58, se presenta la sección C, representando al Helio 3. A causa de que también era inestable, musicalmente se buscó la sonoridad de un caminante cojo en el acompañamiento escrito en clave de fa, junto a una melodía que no llega a desarrollarse.
 - Del compás 59 al 79, se presenta la sección D, representando al Deuterio, el cual era un núcleo muy inestable en este momento, puesto que así como se formaba de rápido, se destruía. Por esta razón musicalmente la melodía no se desarrolla y cuando intenta retomar, desaparece. El acompañamiento termina solo e intenta continuar al final sin éxito, como se puede observar del compás 76 al 79.
5. La composición descrita hasta este punto, se puede consultar en YouTube en los siguientes sitios:
- Ana Milena Cruz - Partículas Elementales - Los Tres Primeros Minutos del Universo.
 - Ana Milena Cruz - Colisiones - Los Tres Primeros Minutos del Universo.
 - Ana Milena Cruz - Aniquilación - Los Tres Primeros Minutos del Universo.
 - Ana Milena Cruz - Vida - Los Tres Primeros Minutos del Universo.

Referencias

- [Cru19] Ana Cruz, *Los Tres Primeros Minutos del Universo* " Documentación de un proceso compositivo que parte de un impulso extramusical: El Big Bang, Universidad Pedagógica Nacional, 2019.
- [Mor99] Robert Morgan, *La Música del Siglo XX*, Madrid: Ediciones Akal, S.A., 1999.
- [Wal01] David Walters, *Brief Introduction to Pitch - Class Set Analysis* (2001).
- [Wei05] Steven Weinberg, *The quantum theory of fields. Vol. I*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [Wei00] ———, *Los Tres Primeros Minutos del Universo*, Madrid: Alianza Editorial, S.A., 2000.

Acerca del autora: Ana Milena Cruz nació en Bogotá Colombia en el año 1992 y ha vivido en el municipio de Soacha desde los 5 años. Terminó su bachillerato en 2009 y aprendió empíricamente a tocar piano desde los 15 años. Dio inicio a sus estudios musicales formalmente a la edad de 19 años en la Academia Luis A. Calvo, con énfasis instrumental en piano clásico, guiada por la maestra Vanessa Morales. A la edad de 21 años ingresó a la Universidad Pedagógica Nacional, en la cual continuó sus estudios enfocados en la enseñanza musical y el piano. Sus profesores de piano fueron los maestros Svetlana Solodovnikova y Karol Bermúdez. Durante la realización de su monografía, contó con la colaboración del compositor Victoriano Valencia Rincón como asesor, además de algunos acercamientos a la composición, arreglos durante el pregrado y una electiva de Astronomía General. Actualmente labora como profesora de piano en los cursos de extensión de la Universidad Pedagógica Nacional. Desea continuar sus estudios en pedagogía, sin dejar a un lado la composición y su enfoque como pianista clásica

Juegos y matemática

Diego Fernando Vivas *

diegof.vivasb@konradlorenz.edu.co

1. Introducción.

Un sinnúmero de juegos dieron inicio a ramas de las matemáticas. Como un ejemplo podemos citar que, en 1654, el jugador Antoine Gombaud, cuyo noble título era Chevalier de Méré, se acercó a su amigo Blas Pascal con algunas preguntas sobre los juegos de azar, incluido el problema del juego no terminado. Después de pensarlo un poco, Pascal encontró una solución posible, pero no estaba completamente seguro de que su razonamiento fuera correcto. En consecuencia, envió sus ideas a Pierre de Fermat para ver si su compatriota estaba de acuerdo con el argumento. El breve intercambio de cartas que se produjo, y una carta en particular, representó uno de los avances más profundos en la historia del pensamiento matemático.

Hoy usaríamos la palabra probabilidad para referirnos al enfoque de la discusión de Pascal y Fermat, pero ese término no se introdujo hasta casi un siglo después de la muerte de los matemáticos. En su lugar, hablaron de “peligros” o número de oportunidades. Gran parte de su dificultad era que aún no tenían la noción de probabilidad matemática, porque estaban en proceso de inventarla.

De hecho, la capacidad de calcular probabilidades transformó la práctica de las estadísticas, cambiándolas de la mera recopilación y tabulación de datos al uso de datos para extraer inferencias y tomar decisiones informadas.

Como en el caso de la teoría de las probabilidades, hay juegos que nos permiten introducir o desarrollar conceptos matemáticos. En este artículo hablaremos de uno de los temas más importantes de las matemáticas: las secuencias de números o sucesiones, el pilar fundamental del análisis matemático. Una sucesión $\{a_n\}$ es una colección ordenada de números definidos por una función f en un conjunto de enteros secuenciales. Los valores $a_n = f(n)$ se denominan términos de la secuencia, y n se llama índice. De manera informal, pensamos en una secuencia a_n como una lista de términos:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

La secuencia no tiene que comenzar en $n = 1$. Puede comenzar en $n = 0$, $n = 2$, o cualquier otro entero. Cuando a_n se da por una fórmula, nos referimos a a_n como el término general. Mostraremos tres juegos que nos permiten determinar el término general de una sucesión.

2. La torre de Hanoi.

Las Torres de Hanoi es un juego matemático inventado en 1883 por el matemático francés Édouard Lucas. Este juego de mesa, con un solo jugador, consiste en un número de discos de radio creciente que se apilan insertándose en una de las tres varillas de un tablero. El objetivo del juego es pasar la pila de la varilla de la izquierda a la varilla de la derecha, con ayuda de la varilla del medio, en el menor número posible de movimientos. La regla es que nunca un disco de mayor radio puede estar sobre un disco de menor radio.



Figura 1: Torre de Hanoi de feria matemática.

El problema es muy conocido en ciencias de la computación y aparece en muchos libros de texto como introducción a la teoría de algoritmos. Hallar el menor número de pasos para mover los 2 discos de la varilla de la izquierda a la varilla de la derecha.

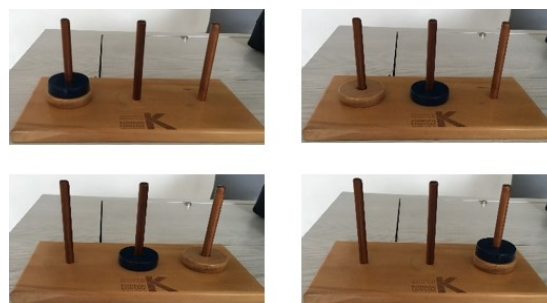


Figura 2: Movimientos de torre de Hanoi para dos discos.

*Docente Fundación Universitaria Konrad Lorenz.

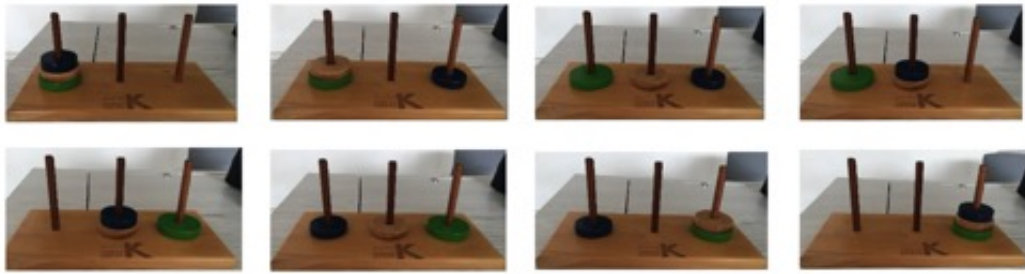


Figura 3: *Movimientos de torre de Hanoi para tres discos.*

Si se inicia con dos discos, observamos que el número de pasos es tres (Figura 2)

menor número de pasos es quince (Figura 4). Hallar el menor número de pasos para mover los cinco discos de la varilla de la izquierda a la varilla de la derecha

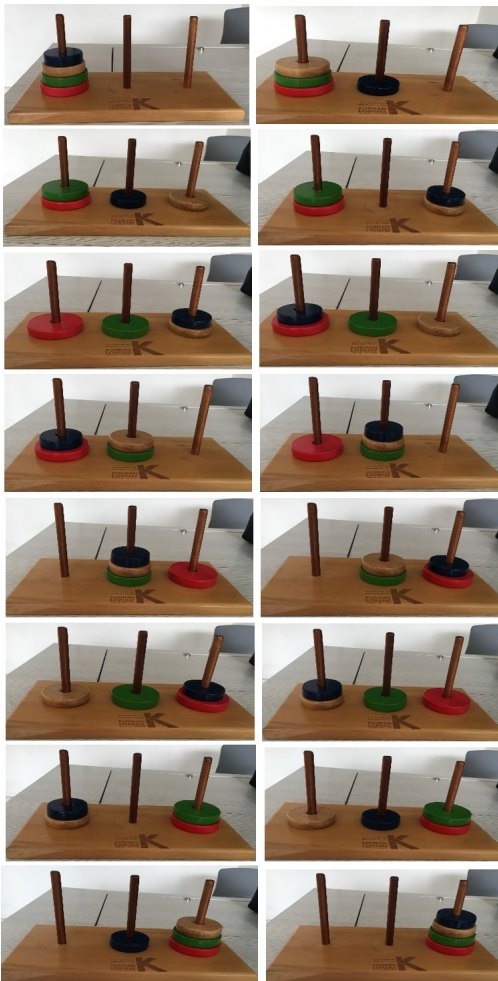


Figura 4: *Movimientos de torre de Hanoi para cuatro discos.*

Hallar el menor número de pasos para mover los tres discos de la varilla de la izquierda a la varilla de la derecha. Si se inicia con tres discos, observamos que el número de pasos es siete (Figura 3). Hallar el menor número de pasos para mover los cuatro discos de la varilla de la izquierda a la varilla de la derecha. Si se inicia con cuatro discos, observamos que el

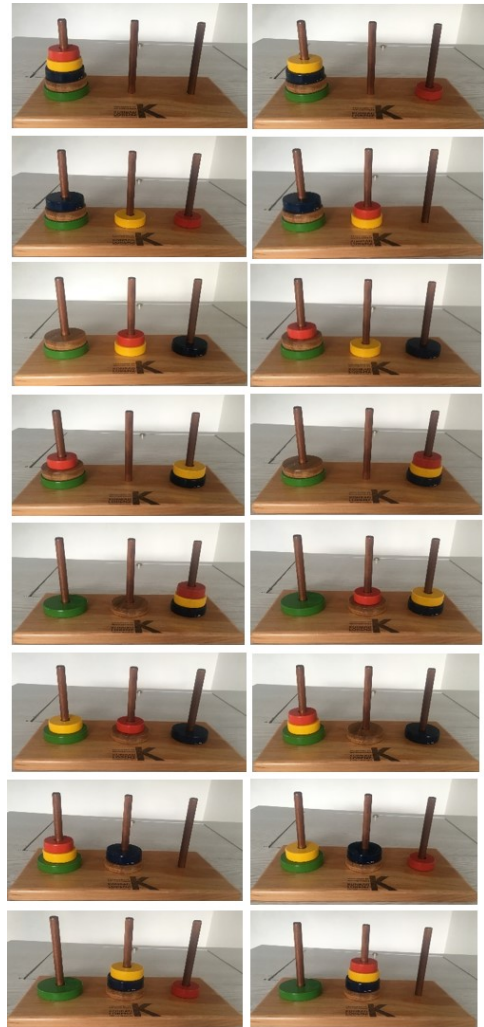


Figura 5: *Primeros 16 movimientos de torre de Hanoi para cinco discos.*

Si se inicia con cinco discos, observamos que el menor número de pasos es treinta y uno (Figuras 5 y 6).

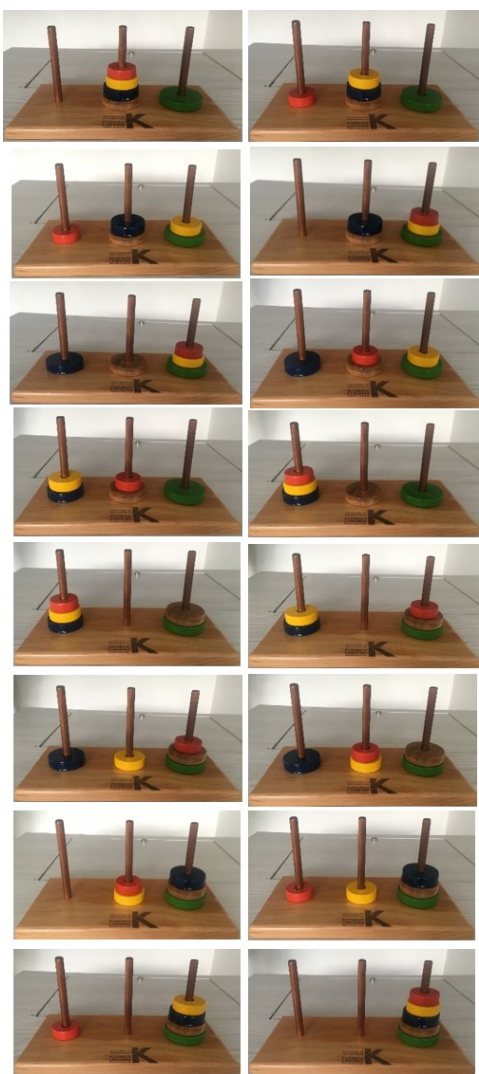


Figura 6: Siguietes 16 movimientos de torre de Hanoi para cinco discos.

Consignamos la información hasta ahora obtenida en la tabla de la Figura 7.

Número de discos	1	2	3	4	5	n
Número mínimo de pasos	1	3	7	15	31	?
Número mínimo de pasos	$1 = 2^1 - 1$	$3 = 2^2 - 1$	$7 = 2^3 - 1$	$15 = 2^4 - 1$	$31 = 2^5 - 1$	$2^n - 1$

Figura 7: Resultados generales de movimientos en la torre de Hanoi.

La fórmula para encontrar el número de movimientos necesarios para transferir n discos de la varilla de la izquierda a la varilla de la derecha es:

$$a_n = 2^n - 1. \quad (2)$$

Fórmula que se puede demostrar por inducción matemática.

3. Sapos y ranas.

En este juego, cada jugador puede persuadir a una de sus criaturas, ya sea para moverse a una casilla vacía o para saltar sobre una criatura opuesta, en una casilla vacía. Los sapos se mueven solo hacia el este, las ranas solo hacia el oeste. El juego se debe jugar de acuerdo con la regla de juego normal de que un jugador que no puede mover pierde.

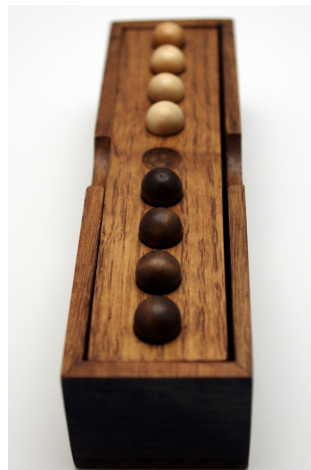


Figura 8: Juego clásico de sapos y ranas en feria matemática.

¿Cuántos movimientos mínimos son necesarios para intercambiar los sapos y las ranas si se cuenta con uno de cada especie?

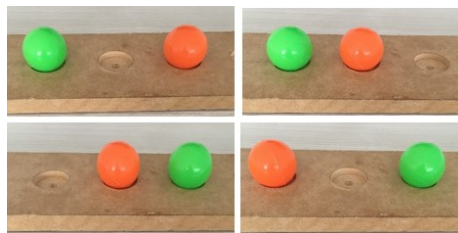


Figura 9: Movimientos de sapos y ranas con uno de cada especie.

Si se inicia con uno de cada especie, observamos que el menor número de movimientos es tres (Figura 9). ¿Cuántos movimientos mínimos son necesarios para intercambiar los sapos y las ranas si se cuenta con dos de cada especie?

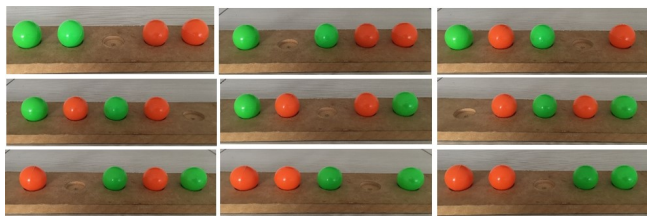


Figura 10: Movimientos de sapos y ranas con dos de cada especie.

Si se inicia con dos de cada especie, observamos que el menor número de movimientos es ocho (Figura 10). ¿Cuántos movimientos mínimos son necesarios para intercambiar los sapos y las ranas si se cuenta con tres de cada especie?

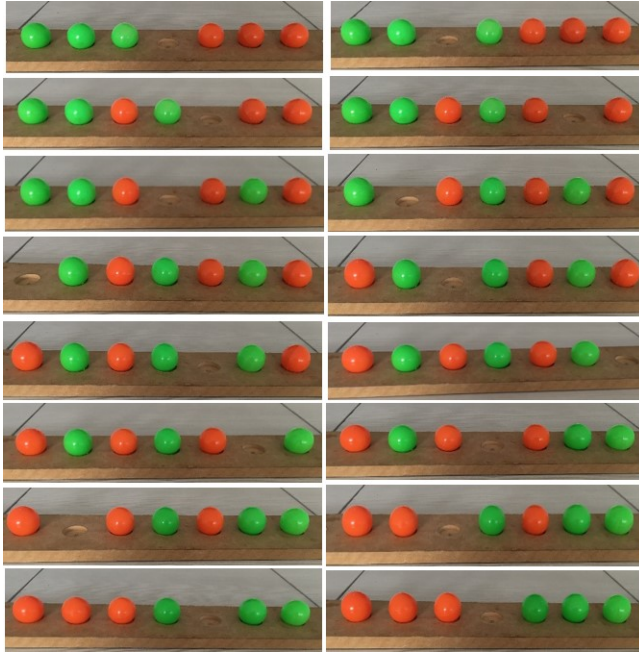


Figura 11: *Movimientos de sapos y ranas con tres de cada especie.*

Si se inicia con tres de cada especie, observamos que el menor número de movimientos es quince (Figura 11). ¿Cuántos movimientos mínimos son necesarios para intercambiar los sapos y las ranas si se cuenta con cuatro de cada especie? Si se inicia con cuatro de cada especie, observamos que el menor número de movimientos es veinticuatro (Figura 14).

Cantidad de cada especie	1	2	3	4	n
Número mínimo de movimientos	3	8	15	24	?
Número mínimo de movimientos	$4 - 1$	$9 - 1$	$16 - 1$	$25 - 1$	
Número mínimo de movimientos	$(2)^2 - 1$	$(3)^2 - 1$	$(4)^2 - 1$	$(5)^2 - 1$	
Número mínimo de movimientos	$(1 + 1)^2 - 1$	$(2 + 1)^2 - 1$	$(3 + 1)^2 - 1$	$(4 + 1)^2 - 1$	$(n + 1)^2 - 1$

Figura 12: *Recopilación de movimientos de sapos y ranas.*

¿Cuántos movimientos mínimos son necesarios para intercambiar los sapos y las ranas si se cuenta con n de cada especie? Para responder a la pregunta, consignamos la información hasta ahora obtenida en la tabla de la Figura 12. En conclusión, el número mínimo de movimientos que se deben

realizar cuando se tienen n animales de cada especie es

$$a_n = (n + 1)^2 - 1. \quad (3)$$

4. El triángulo asesino.

Se trata de que dos jugadores, alternadamente, unan dos puntos cualesquiera de un determinado arreglo de puntos. En algún momento, inminentemente, uno de ellos terminará formando un triángulo de su mismo color, cuyos vértices sean puntos de este arreglo. En el momento en que un jugador logre formar el triángulo, pierde. Esta aparente contradicción en las condiciones del juego, lo hace más atractivo para los jugadores. Esta situación puede aprovecharse para que, de manera informal, se planteen problemas como: ¿Cuántas líneas se pueden formar en total, sin importar el color? ¿Cuántas tiradas son posibles solo en el contorno? ¿Cuántas tiradas son posibles de manera que queden dentro del contorno? ¿Cuál sería el aspecto del arreglo con todas las tiradas posibles?

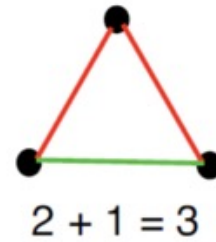


Figura 13: *Segmentos para un arreglo de tres puntos .*

El trabajo de matematización se puede iniciar con el siguiente planteamiento: ¿Cuántos segmentos es posible trazar en un arreglo de n puntos? Para ello, es conveniente recurrir a problemas más sencillos, como contar el número de segmentos que se pueden trazar a partir de un punto determinado y después los del punto adyacente, hasta terminar con todos los puntos. Si tenemos un arreglo de tres puntos, podemos contar el número total de segmentos que se pueden trazar con ayuda de la Figura 13. Si tenemos un arreglo de cuatro puntos, podemos contar el número total de segmentos que se pueden trazar con ayuda de la Figura 15.

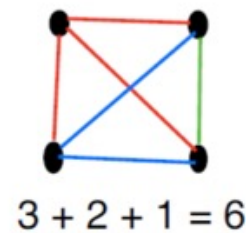


Figura 15: *Segmentos para un arreglo de cuatro puntos .*

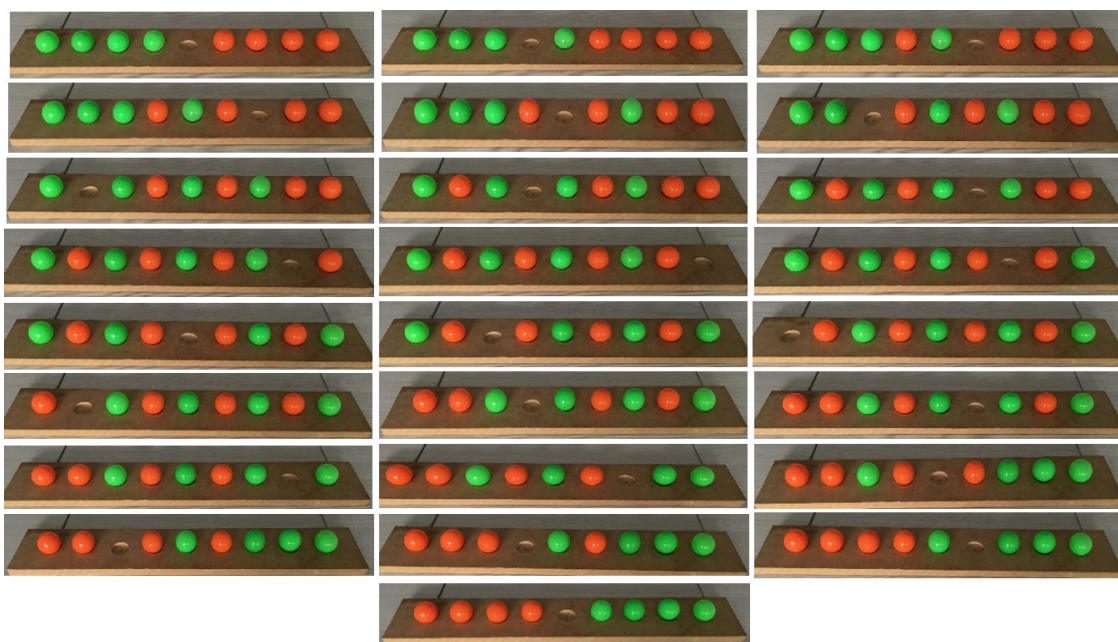


Figura 14: Movimientos de sapos y ranas con cuatro de cada especie.

El número de segmentos es 6. Si tenemos un arreglo de cinco puntos, podemos contar el número total de segmentos que se pueden trazar con ayuda de la Figura 16.

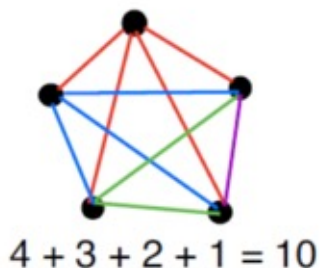


Figura 16: Segmentos para un arreglo de cinco puntos.

El número de segmentos es 10. Si tenemos un arreglo de seis puntos, podemos contar el número total de segmentos que se pueden trazar con ayuda de la Figura 17.

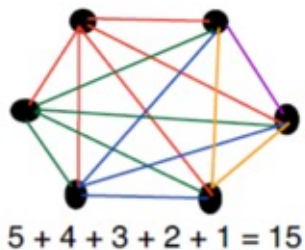


Figura 17: Segmentos para un arreglo de seis puntos.

El número de segmentos es 15. Si tenemos un arreglo de siete puntos, podemos contar el número total de segmentos que se pueden trazar con ayuda de la Figura 18.

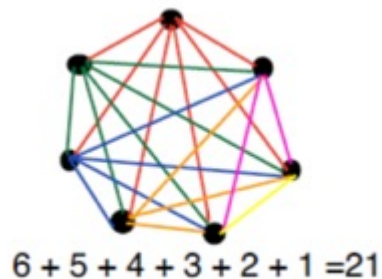


Figura 18: Segmentos para un arreglo de siete puntos.

El número de segmentos es 21. Consignamos la información hasta ahora obtenida en la tabla de la Figura 19. La serie que calcula la suma de los primeros números naturales se expresa en una fórmula que descubrió Carl Gauss:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (4)$$

De acuerdo con este problema, podemos expresar el número de segmentos en función del número de puntos del arreglo particular. En el caso del arreglo hexagonal, la secuencia de números que se suman es del 1 al 5, donde el máximo (5), es una unidad menor que el total de puntos del arreglo. En general, si tomamos un arreglo de n puntos, la secuencia de

Número de puntos	3	4	5	6	7	n
Número mínimo de segmentos	3	6	10	15	21	?
Número mínimo de segmentos	$1 + 2 = \frac{2(2 + 1)}{2}$	$1 + 2 + 3 = \frac{3(3 + 1)}{2}$	$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4(4 + 1)}{2}$	$\frac{5(5 + 1)}{2}$	$\frac{6(6 + 1)}{2}$	?

Figura 19: Recopilación de segmentos obtenidos, a partir de un número de puntos dado.

números que sumaremos es:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1). \quad (5)$$

Por lo que la serie de Gauss nos permite obtener una fórmula para conocer el número de segmentos sin tener que dibujarlos. Para un arreglo de n puntos, entonces, el número de segmentos es:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = \frac{(n - 1)((n - 1) + 1)}{2}, \quad (6)$$

simplificando obtenemos

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2}. \quad (7)$$

Así, el número de segmentos que podemos trazar en un arreglo de n puntos es

$$a_n = \frac{n(n - 1)}{2}. \quad (8)$$

Referencias

- [Aiz05] N Aizencang, *Jugar, aprender y enseñar*, Ed. Manantial. Buenos Aires, 2005.
- [Bro01] G. Brown, *¿Qué tal si jugamos...otra vez? Nuevas experiencias de los juegos cooperativos en la educación popular*, Ed. Humanitas. Bs. As. 1a. edición Caracas, 2001.
- [BCG01] Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, and Richard K. Guy, *Winning ways for your mathematical plays. Vol. 1*, 2nd ed., A K Peters, Ltd., Natick, MA, 2001.
- [Dev08] Keith Devlin, *The unfinished game*, Basic Books, New York, 2008. Pascal, Fermat, and the seventeenth-century letter that made the world modern.

Acerca del autor: Diego Fernando Vivas Berrio es licenciado en matemáticas de la universidad Santiago de Cali, adelantó estudios de maestría en matemáticas en la Universidad de Puerto Rico y es magister en Educación de la universidad San Buenaventura Cali. Es profesor de tiempo completo de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz, donde imparte cursos de estadística y cálculo. Le gusta mucho la cocina.

El sutil arte de la conjetura matemática

Carlos Alberto Díez *

carlosa.diezf@konradlorenz.edu.co

Esta es una traducción hecha por mí del texto escrito por Robbert Dijkgraaf en Quanta Magazine el 7 de mayo de 2019. <https://www.quantamagazine.org/the-subtle-art-of-the-mathematical-conjecture-20190507/>

Robbert Dijkgraaf es director del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, Nueva Jersey.

El alpinismo es una metáfora muy estimada para la investigación matemática. La comparación es casi inevitable: el mundo helado, el aire frío y la implacable dureza del montañismo reflejan el paisaje implacable de números, fórmulas y teoremas. Y así como un escalador enfrenta sus habilidades contra un objeto inflexible -en su caso, una pared de piedra- un matemático a menudo se encuentra involucrado en una batalla individual de la mente humana contra la lógica rígida.

En matemáticas, el papel de estos picos más altos lo juegan las grandes conjeturas -afirmaciones claramente formuladas que probablemente son verdaderas, pero para las cuales aún no se han encontrado pruebas concluyentes. Estas conjeturas tienen raíces profundas y amplias ramificaciones. La búsqueda de su solución guía una gran parte de las matemáticas. La fama eterna espera a los primeros que las conquisten.

Sorprendentemente, las matemáticas han elevado la formulación de una conjetura a un alto nivel de arte. La ciencia más rigurosa aprecia las formas más suaves. Una declaración bien escogida pero no probada puede hacer que su autor sea mundialmente famoso, a veces incluso más que la persona que proporciona la prueba definitiva. La conjetura de Poincaré sigue siendo la conjetura de Poincaré, incluso después de que Grigori Perelman demostrara que es verdad. Después de todo, Sir George Everest, el agrimensor general británico de la India a principios del siglo XIX, nunca escaló la montaña que hoy lleva su nombre.

Como toda forma de arte, una gran conjetura debe cumplir una serie de criterios estrictos. En primer lugar, debe ser "no trivial", es decir, no demasiado fácil de probar. Los matemáticos dirán cosas como "Un problema vale la pena abordarlo sólo cuando se defiende" "Si no es frustrante, probablemente estás trabajando en un problema que es demasiado fácil". Si una conjetura se prueba dentro de unos meses, entonces quizás su creador debería haberla meditado un poco más antes de anunciarla al mundo.

El primer esfuerzo para componer una colección completa de los mayores desafíos matemáticos fue realizado a finales del

siglo pasado por David Hilbert, quien ha sido caracterizado como el último matemático universal. Aunque su lista de 23 problemas ha sido muy influyente, en retrospectiva fue un poco confusa.

Incluía favoritos de todos los tiempos como la hipótesis de Riemann, considerada a menudo como la más grande de las grandes conjeturas, una que ha permanecido como el Everest de las matemáticas durante más de un siglo. Cuando se le preguntó a Hilbert qué sería lo primero que le gustaría saber después de despertar de un sueño de 500 años, inmediatamente escogió esta conjetura. Capta una intuición esencial sobre la distribución de los números primos -los átomos de la aritmética- y su establecimiento tendrá vastas consecuencias para muchas ramas de las matemáticas.

Pero Hilbert también enumeró objetivos mucho más vagos y abiertos como ".el tratamiento matemático de los axiomas de la física" ".el desarrollo ulterior del cálculo de las variaciones". Otra de sus conjeturas, la relativa a la relación de dos poliedros de igual volumen, fue resuelta en el mismo año que la anunció por su alumno Max Dehn. Mientras que Hilbert describió muchos picos altos, este resultó ser más bien una colina.

Las cumbres más altas no se conquistan en un solo esfuerzo. Las expediciones de escalada establecen cuidadosamente los campamentos base y fijan las cuerdas, y luego se dirigen lentamente hacia la cima. Del mismo modo, en matemáticas a menudo es necesario erigir estructuras elaboradas para atacar un problema importante. Un asalto directo es visto como tontería e ingenuidad. Estas construcciones matemáticas auxiliares pueden a veces tardar siglos en construirse y, al final, a menudo resultan ser más valiosas que el propio teorema conquistado. El andamio se convierte entonces en una adición permanente a la arquitectura de las matemáticas.

Un ejemplo maravilloso de este fenómeno es la prueba del Último Teorema de Fermat por Andrew Wiles en 1994. Fermat escribió su conjetura en el margen de la Aritmética de Diofantus en 1639. Su prueba requirió el desarrollo de más de tres siglos de herramientas matemáticas. En particular, los matemáticos tuvieron que construir una combinación muy avanzada de teoría de números y geometría. Este nuevo campo -la geometría aritmética- es ahora una de las teorías matemáticas más profundas y de mayor alcance. Va mucho más allá de la conjetura de Fermat y se ha utilizado para resolver muchas cuestiones pendientes.

Una gran conjetura también tiene que ser profunda y estar en el centro mismo de las matemáticas. De hecho, la metáfora de escalar una cumbre no capta adecuadamente el impacto to-

*Fundación Universitaria Konrad Lorenz.

tal de una prueba. Una vez probada la conjetura, no es tanto el punto final de un arduo viaje como el punto de partida de una aventura aún mayor. Una imagen mucho más precisa es la de un paso de montaña, el punto de silla de montar que permite atravesar de un valle a otro. De hecho, esto es lo que hace que la hipótesis de Riemann sea tan poderosa y amada. Desbloquea muchos otros teoremas e ideas, y sugiere amplias generalizaciones. Los matemáticos han estado ocupados explorando el exuberante valle al que da acceso, a pesar de que ese valle sigue siendo, estrictamente hablando, hipotético.

Además, debe haber pruebas sustanciales para una conjetura. Es famoso el hecho de que Niels Bohr definió una gran verdad por la propiedad de que su opuesto es también una

gran verdad. Pero este no es el caso para una gran conjetura. Ya que generalmente hay mucha evidencia circunstancial que apunta a su verdad, la negación es vista como muy improbable. Por ejemplo, los primeros 10 billones de casos de la hipótesis de Riemann han sido comprobados numéricamente utilizando ordenadores. ¿Quién, en este momento, puede dudar de su validez? Pero todo este material de apoyo no satisface a los matemáticos. Exigen certeza absoluta y quieren saber por qué la conjetura es cierta. Sólo una prueba concluyente puede dar esa respuesta. La experiencia demuestra que uno puede ser fácilmente engañado. Los contraejemplos pueden estar lejos de la orilla, como el que encontró Noam Elkies, un matemático de la Universidad de Harvard, refutando la conjetura de Euler, una variación de la conjetura de Fermat que afirma que una cuarta potencia nunca puede ser escrita como una suma de otras tres cuartas potencias. ¿Quién habría adivinado que el primer contraejemplo implicaba un número de 30 dígitos? ($20,615,6734 = 2,682,4404 + 15,365,6394 + 18,796,7604$).

Las mejores conjeturas suelen tener orígenes modestos, como la nota casual de Fermat en el margen, pero sus implicaciones y ramificaciones crecen con los años. También ayuda si el desafío se puede plantear de manera concisa, preferiblemente con una fórmula que contenga sólo unos pocos símbolos. Una buena conjetura debe caber en una camiseta. La conjetura de Goldbach, por ejemplo, dice: Cada entero mayor a 2 puede ser expresado como la suma de dos primos.^{Este problema, formulado en 1742, sigue sin resolverse. Se hizo famoso gracias a la novela El Tío Petros y la Conjetura de Goldbach (2000), del autor griego Apostolos Doxiadis, entre otras cosas porque el editor ofreció un millón de dólares como un truco publicitario a cualquiera que pudiera probarlo en los dos años siguientes a la publicación del libro. La concisión de una gran conjetura se suma a su belleza percibida. Incluso se podría definir la estética matemática como impacto por cada símbolo". Sin embargo, esta belleza elegante puede ser engañosa. Las declaraciones más cortas pueden requerir las pruebas más largas, como lo demuestra una vez más la observación engañosamente simple de Fermat.}

Quizás deberíamos añadir a esta lista de criterios la respuesta del famoso matemático John Conway a la pregunta de qué es lo que hace una gran conjetura: "Debería ser escandalosa. Una conjetura atractiva es también algo ridícula o fantástica, con

un alcance y consecuencias imprevistas. Idealmente, combina componentes de dominios lejanos que no se han conocido antes en una sola frase, como los sorprendentes ingredientes de un plato de autor.

Finalmente, es bueno darse cuenta de que la aventura no siempre termina con éxito. Así como un montañista puede enfrentarse a una grieta insuperable, los matemáticos también pueden fracasar. Y si fracasan, fracasan absolutamente. No existe tal cosa como una prueba al 99 por ciento. Durante dos milenios, se intentó demostrar que el quinto postulado de Euclides -el notorio "postulado de las paralelas" que afirma aproximadamente que dos líneas paralelas no pueden cruzarse- puede derivarse de los otros cuatro axiomas de la geometría planar. Luego, a principios del siglo XIX, los matemáticos construyeron ejemplos explícitos de geometría no euclidiana, refutando la conjetura.

Sin embargo, este no fue el fin de la geometría. De manera perversa, la refutación de una gran conjetura puede ser incluso mejor noticia que su éxito, ya que el fracaso deja claro que nuestro imaginario mapa del mundo matemático está seriamente equivocado. La derrota puede ser productiva, al revés de una victoria pírrica. La geometría no euclídea demostró ser un precursor importante del espacio-tiempo curvo de Einstein, que desempeña un papel muy importante en la comprensión moderna de la gravedad y el cosmos.

Del mismo modo, cuando Kurt Gödel publicó su famoso teorema de incompletitud en 1931, mostrando que en cualquier sistema matemático razonable hay afirmaciones verdaderas que no pueden ser probadas, esencialmente respondió negativamente los problemas de Hilbert sobre la consistencia de la aritmética. Pero el teorema de incompletitud -a menudo visto como el mayor logro lógico desde Aristóteles- no anunció el fin de la lógica matemática. En su lugar, indujo un florecimiento que incluso condujo al desarrollo de ordenadores modernos.

Así que, al final, la búsqueda de soluciones a las grandes conjeturas tiene algo más en común con las expediciones de escalada a los picos más altos. Sólo cuando todo el mundo está a salvo en casa, tanto si se alcanza el objetivo como si no, queda claro el alcance total de la aventura. En ese momento, es hora de que se cuenten las historias heroicas de la ascensión.

Política Editorial

El Paskín Matemático es una producción del Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Está abierto a todos y todas. Si tienes interés en escribir un artículo con cualquier tipo de contenido matemático, reseñar a un personaje, comentar un problema o tienes comentarios sobre nuestra publicación, envía un mensaje a paskin@konradlorenz.edu.co

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1$$

El Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz fue creado en 1998. Conoce más acerca de nuestro programa en nuestra página institucional

<http://www.konradlorenz.edu.co/es/aspirantes/carreras-universitarias/carrera-de-matematicas/presentacion.html>

Bogotá, Colombia. 2019

MATEMÁTICO

PASKÍN MATEMÁTICO

Volumen 1, No. 2, 2019

Contenido

- Camilo Ramírez Maluendas
Una breve historia imaginaria.....1
- Ana Milena Cruz
La música de los primeros tres minutos del universo.....10
- Diego Fernando Vivas
Juegos y matemática.....18
- Carlos Díez (traducción)
El sutil arte de la conjetura matemática.....24

*Las matemáticas consisten en demostrar lo
más obvio de la manera menos obvia.*

George Polya