

REVISTA MATEMÁTICA

$$\oint_{\partial \tau} A \cdot dS = \int_{\tau} \nabla \cdot A d\tau$$
$$X_{(1-t)} = kr_t(1-t)$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$
$$\sum_{i=1}^n a_i \approx L, \quad \lim_{L \rightarrow \infty} S_L$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$
$$\frac{\partial u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial u}{\partial x^2}$$



$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot [\text{Adj}(A)]^t$$
$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$$
$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$
$$n! = \prod_{k=1}^n k$$
$$\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$
$$(\nabla \times F) \cdot u = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_F F \cdot dr$$
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$
$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \nabla \cdot T + f$$
$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{(2n+1)}$$

ISSN
2665-2471

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

**KONRAD
LORENZ**
FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

Vol. 1
No. 1

PASKÍN MATEMÁTICO

<https://editorial.konradlorenz.edu.co/2019/02/paskin-matematico.html>

e-mail: paskin@konradlorenz.edu.co

EDITORES

John A. Arredondo

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co

Carlos Alberto Díez

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
carlosa.diez@konradlorenz.edu.co

Esta publicación puede ser difundida y reproducida con fines académicos y científicos por todos aquellos que tengan a bien hacer un correcto uso de su contenido.

ISSN 2665-2471

Fundación Universitaria Konrad Lorenz: Tel: (+57 1) 347 23 11, Carrera 9 Bis No. 62 – 43 Bogotá – Colombia, eMail: info@konradlorenz.edu.

Carácter académico: Institución Universitaria. Personería Jurídica por Resolución 18537 del 4 de noviembre de 1981 del Ministerio de Educación Nacional. Institución de Educación Superior sujeta a inspección y vigilancia por el Ministerio de Educación Nacional (Art. 2.5.3.2.10.2, Decreto 1075 de 2015).

Sobre el mayor espectáculo del mundo

John A. Arredondo *

alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co

1. Introducción.

En el pasado mes de agosto en Río de Janeiro, se celebró el evento más importante de las matemáticas, el Congreso Internacional de Matemáticos, un evento con más de cien años de tradición, donde además de demarcar y enrutar el estado actual de las matemáticas, se entrega el premio más prestigioso de esta disciplina, la Medalla Fields. En este artículo discutiremos algunos de los acontecimientos más importantes que han sucedido en la historia de este evento.

2. Así en el fútbol como en las matemáticas.

Cada cuatro años, cada vez con mayor resonancia, el planeta, o por lo menos una gran parte de este, por convicción o por daño colateral, se paraliza ante el acontecimiento más importante en el mundo del fútbol, la Copa Mundial de la FIFA. Desde 1950, y salvo en 1982, unos días después de la final de la copa del mundo, una parte un poco más pequeña del planeta, se paraliza ante el acontecimiento más importante en el mundo de las matemáticas, el Congreso Internacional de Matemáticos, organizado por la Unión Matemática Internacional.



Figura 1: Estampilla conmemorativa del primer mundial de fútbol de la historia.

Uruguay como sede y como campeón de un evento que albergó a 13 países. Que la primera versión de semejante evento se realizará en suelo suramericano no tiene nada que ver con el talento que para este deporte hemos demostrado los latinos, fue puramente debido a los ideales de un francés, don **Jules Rimet**, presidente de la FIFA de esa época [5]. Para ese entonces, el Congreso Internacional de Matemáticos ya se había celebrado en ocho ocasiones, su nacimiento se dio en 1897, en la ciudad de Zúrich, básicamente por el ideal de dos de los más grandes matemáticos del siglo XIX, **Félix Klein** y **George Cantor**, el primero de ellos uno de los organizadores del evento. Como tenía que ser, allí se reunieron casi todos los grandes matemáticos de la época, e hicieron lo que se hace en este tipo de eventos, mostraron los resultados más recientes y sobresalientes en matemáticas, discutieron ideas, acordaron lazos de unión, pero sobre todo, la finalidad del congreso, era trazar el rumbo que debían seguir los matemáticos, conocer aquellos problemas que debían ser abordados y solucionados, algo así como anticipar quién será el Mbappé del próximo mundial. Para hacernos una idea, en aquel 1897, **Adolf Hurwitz** instó a la comunidad matemática a responder las siguientes preguntas:

- ¿Qué es una curva?
- ¿Qué es una curva simple cerrada?
- ¿Qué es una curva en general?

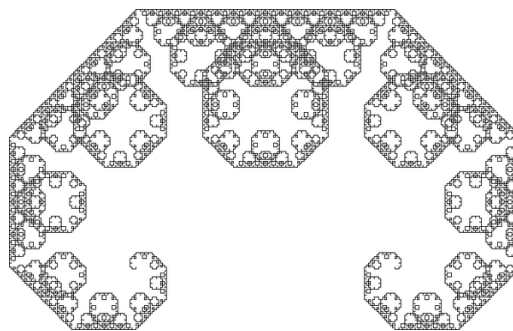


Figura 2: La curva de Lévy es un ejemplo de un fractal, un objeto estrechamente relacionado con el problema de la definición de curva en general.

La historia de los mundiales de fútbol, comienza en 1930 con

*Profesor Asociado Fundación Universitaria Konrad Lorenz.

Parece increíble, pero a pesar de que las curvas se han estudiado desde los tiempos de la Grecia antigua, para comienzos

del siglo XX su definición precisa seguía siendo un misterio [12]. En muchas ocasiones las matemáticas pueden llegar a ser tremendamente difíciles.

Si tuviéramos que elegir cuál ha sido la mejor Copa Mundial de fútbol, con seguridad, y al margen de los fanatismos, diríamos que fue México 70. ¿La razón?, el mejor equipo de todos los tiempos de los mundiales, Brasil, el único equipo que ha puesto a cinco números diez en el campo al mismo tiempo, jugando en un 4-3-3. **Pelé, Jairzinho, Rivelinho, Gerson, y Tostao**. Si, **Pelé**, fue su coronación definitiva y su despedida de los mundiales. El evento tuvo la mejor atajada de la historia, un cabezazo contra el suelo de **Pelé**, que inmortalizó a **Gordon Banks**. Fue en este mundial que por primera vez se transmitieron imágenes a color para el resto del planeta, los satélites habían llegado para quedarse. Y una final en la que se enfrentaban el bien y el mal, el jogo bonito contra el catenaccio, y como en las historias felices, ganó el bien [8].



Figura 3: *Brasil 70, el mejor equipo en la historia de los mundiales.*

Si tuviéramos que elegir cuál ha sido la mejor edición del Congreso Internacional de Matemáticos, con seguridad, y al margen de los fanatismos, diríamos que fue el segundo, París 1900. Por sobre todas las cosas, porque en aquella ocasión el comité organizador del evento, encargó a uno de los matemáticos más prominentes del momento, **David Hilbert**, para que redactara una lista de problemas que señalaran el camino que los matemáticos debían recorrer en el siglo que recién veía la luz. Fue de tal trascendencia aquella lista, que al poco tiempo de la conferencia en la que Hilbert la presentó, ya se denominaban los 23 problemas de Hilbert [13], la solución de algunos de ellos llevó a la invención de nuevas ramas de la matemática, requirió el esfuerzo de algunas de las mentes más brillantes del siglo XX, llevó las matemáticas a campos de aplicación insospechados, y lo más increíble, 118 años después, algunos siguen sin solución [9].

3. El santo grial.

El éxtasis en una copa del mundo llega unos minutos después de la gran final, cuando el capitán de la selección ganadora levanta el trofeo más codiciado del planeta. Desde Uruguay

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Figura 4: *La hipótesis de Riemann es el problema sin resolver más famoso en las matemáticas. En la lista de problemas de Hilbert era el número 8. El problema consiste en demostrar que la parte real de cualquier cero no trivial de la función zeta de Riemann es 1/2.*

1930 hasta México 1970, se entregaba el trofeo Jules Rimet, pero en aquel año, en el cual Brasil se convirtió en el primer tricampeón, el trofeo se le entregó a perpetuidad, y la FIFA diseñó un nuevo trofeo, conocido como Copa Mundial de la FIFA, el cual se sigue entregando hasta nuestros días. En las primeras ediciones del Congreso Internacional de Matemáticos no se hacían distinciones particulares, el solo hecho de ser parte del evento era y es un honor. Pero en la séptima edición de 1924 realizada en Toronto, un matemático francés llamado **John Charles Fields**, quien a la vez era el anfitrión principal, al ver que los recursos destinados para la organización del evento no habían sido gastados en su totalidad, sugirió que dicho dinero fuera utilizado para la creación de un premio en reconocimiento a la labor de un matemático. Fields murió en 1932, justo en el año en el que se celebraría el noveno Congreso Internacional, pero en un último esfuerzo por impulsar su idea, decretó en su testamento que se legara su herencia para financiar este premio. Fue así que en ese año en Zurich, al final del ICM, se nombró un comité presidido por **Costantin Caratheodory** para establecer de una vez por todas el premio, que se llamaría Medalla Fields en honor de quien más insistió en su creación. En el décimo Congreso Internacional de Matemáticos de 1936 en Oslo, se otorgó a dos matemáticos, por primera vez la Medalla Fields, ellos fueron el estadounidense **Jesse Douglas**, quien resolvió un famoso problema, que entre otras cosas, describe cómo se forman las pompas de jabón, y el gran matemático finlandés **Lars Ahlfors**, el no necesita presentación.

La siguiente entrega tuvo que esperar catorce años, al igual que la copa del mundo, los dos eventos se vieron interrumpidos por el terrible impacto de la Segunda Guerra Mundial. Brasil 50 para la Copa Mundial, Cambridge USA 50 para el Congreso Internacional de Matemáticos, y desde entonces cada cuatro años hay una cita para estos dos eventos. Brasil 50 tiene nombre propio, Maracanazo, y Cambridge 50, bueno, las matemáticas son un poco menos pasionales. Hasta la fecha la Medalla Fields se ha entregado en 60 oportunidades y la copa del mundo se ha levantado en 21 ocasiones.

4. Más que un club.

El fútbol es un juego de equipo, pero es inevitable que dentro de cada equipo alguien sobresalga más que los demás, y

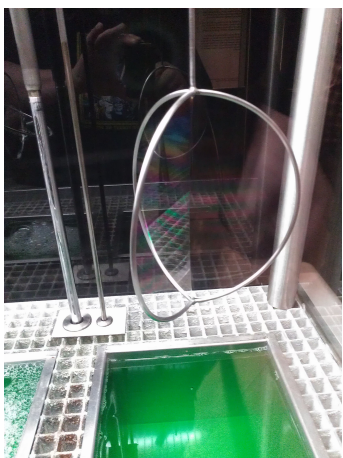


Figura 5: Jesse Douglas fue galardonado con la Medalla Fields por su trabajo sobre el problema de Plateau, el cual consiste en que dada una curva cerrada en el espacio, se debe hallar la superficie que contiene esta curva y tal que el área abarcada por la curva sea mínima.

así, usualmente, cada equipo tiene una figura prominente. En la historia de los mundiales, en cada edición sobresale un jugador en particular, no necesariamente del equipo campeón, aunque hay que decir que en este caso, de hecho, hay un jugador de todos los mundiales, Pelé. Es el único jugador que ha ganado tres copas del mundo, la primera cuando sólo tenía 17 años, siendo el jugador más joven que ha sido campeón del mundo, gracias al título de Brasil en Suecia 58, el cual retuvieron en Chile 62, que llevó a Pelé a ser el más joven bicampeón del mundo de la historia, y curiosamente, es el único que ha ganado la copa del mundo bajo el apelativo de veterano, esto fue en México 70 a los 30 años, justo un año antes de retirarse de la selección de Brasil. La lista la podemos continuar con **Maradona** en México 86, **Lothar Matthaus** en Italia 90, **Xavi e Iniesta** en Sudafrica 2010, **Paolo Rossi** en España 82, **Beckenbauer** en Alemania 74, **Zidane** en Francia 98, **Garrincha** en Chile 62 y un largo etcétera.



Figura 6: Edson Arantes do Nascimento, más conocido como Pelé, ha sido el mejor jugador en la historia de los mundiales.

Las matemáticas son un juego individual, por lo menos, en cuanto a los grandes resultados que la componen, desde tiempos antiquísimos, estos han sido producto del ingenio de una mente singular, cuya influencia posteriormente permea a todos los demás. En la historia de los Congresos Internacionales de Matemáticos, en cuanto a galardonados con la Medalla Fields, podemos hablar de algunos que han sobresalido más que otros: el primer galardonado de nacionalidad japonesa **Kunihiko Kodaira**, en Ámsterdam 1954, dentro de sus muchos logros se destacó el ser responsable de la resurrección de la geometría con un nuevo lenguaje y nutrirla de técnicas de análisis, de su ingenio se desprenden el famoso «teorema de anulación de Kodaira» para variedades complejas compactas y el «teorema de inmersión de Kodaira» para variedades kählerianas compactas de clase entera (ver [11]).

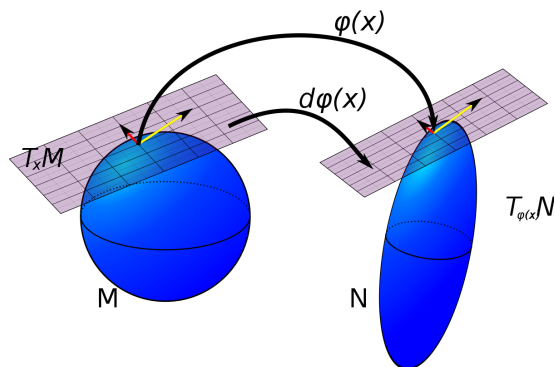


Figura 7: En matemáticas variedad es un término para caracterizar objetos como curvas, superficies y sus similares en dimensiones mayores. En palabras simples una variedad es un objeto que localmente posee las mismas propiedades que el espacio Euclidiano n dimensional.

René Thom, galardonado en Edinburgo 1958, se destacó por tratar de explicar matemáticamente las catástrofes y establecer las bases de la teoría del caos, también por introducir el concepto de cobordismo en topología, en un evento de matemáticos uno de sus colegas dijo, «gracias a René por todas las puertas que abrió, pero sobre todo, gracias por todas las que dejó medio abiertas» [4]. **John Milnor**, galardonado en Estocolmo 62, principalmente por estudiar una propiedad diferenciable de esferas en dimensión siete, pero en general, todo lo que lleve su nombre se caracteriza por elementos de sorpresa y belleza suprema. En la literatura científica se encuentran esferas exóticas de Milnor, fibraciones de Milnor, número de Milnor, teoría kneading de Milnor-Thurston y además existe una Conjetura de Milnor en teoría de nudos, en teoría K, en teoría combinatoria de grupos y en dinámica holomorfa. Además de sus resultados, los libros que ha escrito son de culto y obligatoria consulta. Alguien escribió sobre él «su prosa matemática es simple, sobria y sumamente bella. Su estilo en prosa es para las matemáticas lo que Hemingway es para el inglés o Simenon para el francés.» [2]. **Alexander Grothendieck**, galardonado en Moscú 1966, es princi-

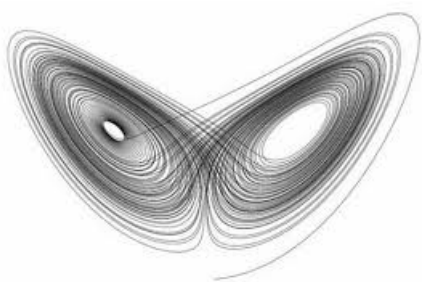


Figura 8: El dibujo más representativo del caos, las trayectorias del atractor de Lorenz, asemejan las alas de una mariposa. De ahí la frase acuñada «el aleteo de una mariposa en Japón, puede producir un huracán en Hawái».



Figura 9: El modelo más conocido de la geometría hiperbólica, es el disco de Poincaré. El infinito se encuentra en el borde del disco. Aquí en una famosa representación del artista Escher.

palmente conocido por sus «nadie sabe exactamente cuántos aportes a la matemática teórica», lo que sí es seguro, es que fue el matemático más brillante del siglo XX, y un día, cuando todo lo que escribió sea entendido, estará en el olimpo de las matemáticas. Además de sus aportes científicos, se destacó por su férrea personalidad contra el statu quo cuando la Real Academia de Ciencias Sueca lo galardonó con el premio Crafoor, lo rechazó diciendo «dado el declive en la ética científica, participar en el juego de los premios significa aprobar un espíritu que me parece insano». **William P. Thurston**, galardonado en Varsovia 1983, es el geómetra más importante e influyente de los últimos 50 años, sus aportes a la teoría de variedades y fibraciones son trascendentales, pero sobre todo, fue él quien mostró que la geometría hiperbólica prevalece en el mundo. Cuando su libro *Three-dimensional geometry and topology* fue premiado por la AMS, se hizo bajo la cita «La de este texto es una matemática emocionante y vital. El libro de Thurston es casi único en la comprensión intuitiva de las ideas geométricas sutiles que proporciona. Ha sido enormemente influyente, tanto para estudiantes de posgrado como para investigadores experimentados. Ciertamente, el ejército de personas que están trabajando en el programa de geometrización consideran este libro como la inspiración inicial para su trabajo. Un libro que ha desempeñado un papel tan importante y dinámico en las matemáticas modernas es eminentemente merecedor del Premio del Libro AMS» [6, 7]. **Edward Witten**, galardonado en Kioto 1990, es el único físico que ha ganado la Medalla Fields, y esto en reconocimiento a sus trabajos con un alto contenido de elementos de geometría y simetrías en teoría cuántica de campos que han llevado al desarrollo de sofisticadas ideas para explicar nuestro universo, como la teoría de cuerdas. **Terence Tao**, galardonado en Madrid 2006, es simplemente un genio, es el participante más joven de la historia de la Olimpiada Internacional de Matemática, fue por primera vez en 1986 con 10 años y ganó una medalla de bronce, en los dos años siguientes también fue el más joven y ganó medalla de plata y oro. Obtuvo el grado de doctor en matemáticas a los 20 años en Princeton. Se dice que es un solucionador de problemas, cuyo espectacular trabajo ha teni-

do un impacto en áreas tan diversas de las matemáticas como Análisis de Fourier de orden superior, la conjetura de Dirac-Motzkin, la ecuación de Navier-Stokes, brechas en números primos y el problema de discrepancia de Erdős que resolvió en 2015. No hay otro matemático contemporáneo con contribuciones tan impresionantes en áreas tan dispares. Su blog en Internet *What's new*, es una delicia.



Figura 10: Terence Tao a la edad de 10 años, discutiendo un problema matemático con Paul Erdős, uno de los matemáticos más singulares del siglo XX.

Cédric Villani, galardonado en Hyderabad 2010, por sus trabajos en el campo de las ecuaciones diferenciales parciales, en particular por sus aportes en amortiguamiento de Landau y la ecuación de Boltzmann. En la actualidad es uno de los mayores divulgadores de las matemáticas a todo nivel, y probablemente, el matemático más conocido del planeta debido a sus numerosos e influyentes videos en YouTube. **Artur Avila**, galardonado en Seúl 2014, es el primer latinoamericano en obtener la medalla Fields, de hecho toda su carrera hasta obtener el doctorado por parte del Instituto de Matemática Pura y Aplicada IMPA, la realizó en Brasil, hoy en día es el director de dicho instituto. Su trabajo más celebrado ha sido en siste-

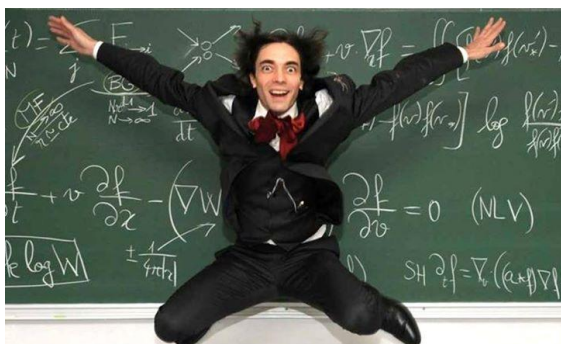


Figura 11: *Simplemente, Cédric Villani.*

mas dinámicos, también se le conoce por resolver un famoso problema cuyo premio eran 10 martinis. **Maryam Mirzakhani**, galardonada en Seúl 2014, es la primera mujer en la historia en recibir esta distinción. Ganó dos veces la medalla de oro de la Olimpiada Internacional de Matemática, en 1995 lo hizo alcanzando un puntaje perfecto. Su carrera se destacó por poner la geometría al servicio de los sistemas dinámicos y viceversa, realizando contribuciones fabulosas en el estudio de superficies hiperbólicas, a su vez, aplicadas al estudio de los billares. Murió de cáncer en 2017 a la edad de 40 años [1].

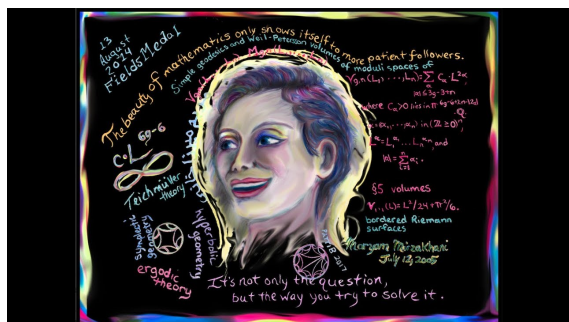


Figura 12: *La belleza de las matemáticas sólo se revela a sus seguidores más pacientes... Maryam Mirzakhani.*

5. Reyes sin corona.

En el fútbol no siempre gana el mejor. **Johan Cruyff** fue el capitán de la selección holandesa en Alemania 74, el archifamoso equipo conocido como la naranja mecánica. Johan fue tres veces ganador del Balón de Oro de la FIFA, el mejor futbolista de sus tiempos y para muchos, el hombre más influyente en la historia de este deporte. En aquel mundial, a pesar de llegar a la final, no pudieron derrotar al equipo alemán. **Michel Platini** es el segundo mejor jugador de la historia de Francia, el primero es Zidane, aunque ganó tres veces el Balón de Oro y fue campeón de Europa con la selección francesa en 1984, nunca logró alzar el trofeo de campeón del mundo a pesar de

asistir a tres mundiales. **Paolo Maldini** es considerado el mejor defensor de todos los tiempos, pese a sus 7 títulos de Serie A y sus 5 trofeos de la Liga de Campeones con el Milán, equipo que retiró la camiseta número 3 que siempre utilizó, nunca pudo hacer historia con Italia en los Mundiales.



Figura 13: *Messi, la copa se escapa una vez más.*

Lionel Messi, simplemente el mejor jugador de la historia del fútbol, en tres mundiales consecutivos se ha quedado sin el título de campeón para su país Argentina. En matemáticas, no siempre gana el mejor. Posiblemente uno de los problemas más importantes en la historia de las matemáticas es el último teorema de Fermat, un resultado de teoría de números que dice: *Si n es un número entero mayor que 2, entonces no existen números enteros positivos x, y y z , tales que se cumple la igualdad*

$$x^n + y^n = z^n$$

El teorema, que en realidad fue una conjetura desde 1637, cuando **Pierre de Fermat** lo dio a conocer sin demostración alguna, fue completamente demostrado hasta 1995 por el matemático inglés **Andrew Wiles**, nada más 358 años después. La primera vez que Wiles anunció su demostración, lo hizo en una serie de conferencias en el Insituto Isaac Newton en la Universidad de Cambridge, justo en el límite de edad estipulado para recibir una Medalla Fields, que como se establecio desde 1966 debía ser de 40 años, sí todo estaba bien, sería sin lugar a dudas galardonado en el Congreso Internacional de Matemáticos de Zúrich de 1994. Sin embargo, en una primera revisión se encontró un error en la prueba de Wiles, para cuando logró subsanarlo y la comunidad matemática aceptó la demostración, ya era 1995, tenía 42 años, nunca recibió la medalla Fields. Sin embargo es considerado uno de los más grandes matemáticos contemporáneos [9]. **André Weil** fue uno de los más grandes matemáticos del siglo XX, ni más ni menos fundador del grupo **Bourbaki**, aportó en numerosas áreas, principalmente en geometría algebraica, suyos son el teorema de Mordell-Weil, la cohomología de Galois, la prueba del teorema de Riemann-Roch, la prueba de la hipótesis de Riemann para funciones zeta locales, los espacios uniformes y la conjetura que lleva su nombre llevó a resultados impresionantes a varios matemáticos destacados. Todo apunta a que por disputas regionalistas dentro de los directivos de la Unión Matemática Internacional no fue galardonado [3]. **Vladímir**

Arnold, simplemente un Messi de las matemáticas, de hecho, si quieres ser matemático, empieza leyendo cualquier cosa de Arnold. ¿Por qué nunca fue medallista Fields?, sólo podemos decir, que las matemáticas son hechas por seres humanos, a pesar de que estas son exactas, aquellos no lo son tanto.

6. La anécdota.

El primer trofeo de la Copa Mundial de la FIFA, y que se entregó a los campeones de este torneo hasta 1970, es conocido como Copa Jules Rimet, cuyo diseño es la imagen alegórica de Niké, la diosa griega de la victoria. A pesar de las usuales medidas de seguridad que se toman al exhibir objetos tan codiciados, fue robado dos veces. La primera un 20 de marzo de 1966 en Londres, sin embargo, el 27 del mismo mes una mascota de nombre Pickles, lo encontró mientras su dueño le daba un paseo en un parque. Nunca se supo nada acerca de los autores del robo, ni por qué fue abandonado posteriormente. Como Brasil ganó por tercera vez el mundial en 1970, obtuvo la posesión definitiva del trofeo Jules Rimet, y un 20 de diciembre de 1983 fue robado de la sede de la Confederación Brasileña de Fútbol y pocos días después cuatro argentinos fueron detenidos por el robo y confesaron haberlo fundido para obtener el oro del que estaba hecho. Sin embargo años después uno de ellos cambió su declaración, indicando que el trofeo había sido robado por encargo y que no sabía nada de su paradero. Hasta el día de hoy no se sabe realmente que ocurrió con el trofeo.



Figura 14: La Copa Mundial de la FIFA y la Copa Jules Rimet.

El premio que otorga el Comité Internacional de Matemáticas cada cuatro años en el congreso Internacional de Matemáticos es la medalla Fields, la cual fue diseñada por **Robert T. McKenzie** en 1933. Es una medalla enchapada en oro, en una cara tiene la cabeza del matemático griego **Arquímedes** y la inscripción «Transire suum pectus mundoque potiri», que traduce: Ir más allá de uno mismo y dominar el mundo. En la otra cara tiene la figura de una esfera inscrita en un cilindro y

la inscripción «Congregati ex toto orbe mathematici ob scripta insignia tribuere», que traduce: los matemáticos de todo el mundo se reunieron para dar esta medalla por escritos excelentes.



Figura 15: El mensaje en la Medalla Fields. Escribir correctamente en matemáticas, la demostración suprema del entendimiento.

Aunque la medalla esta avaluada en unos 5000 dolares, aparentemente es sólo del interés de la comunidad matemática, y en una exhibición o entrega las medidas de seguridad en torno a ella no deberían ser muy excesivas, esto dejo de ser así desde el último Congreso Internacional de Matemáticos, en Río de Janeiro 2018. Increíblemente a uno de los galardonados, **Caucher Birkar**, le fue robada la medalla, mientras se tomaba algunas fotos con colegas y fanáticos. A pesar de que los aparentes culpables del robo quedaron registrados en las cámaras de seguridad, la medalla no fue recuperada y el comité organizador, en el quinto día del evento, realizó una ceremonia de reposición de la medalla, lo cual convierte a Birkar, en el único matemático en haber recibido la Medalla Fields dos veces.

7. El epílogo.

Hoy en día la FIFA es la corporación deportiva más poderosa e influyente del planeta, y a pesar de que constantemente está rodeada por un manto de oscuridad y corrupción, ha convertido a su torneo insignia, la Copa Mundial, en el evento deportivo más importante en el planeta. En contraste, la Unión Matemática Internacional es una corporación científica más, de hecho, desconocida para muchos de los matemáticos del mundo. Su evento insignia, el Congreso Internacional de Matemáticos, en los últimos años no trasciende más allá del morbo por saber quién ganará la Medalla Fields, la cual, fuera del círculo matemático, es usualmente acuñada como el Nobel de los matemáticos, como si este reconocimiento por sí mismo no fuera suficientemente trascendental para la humanidad. En contraste, las matemáticas por si mismas permean cada vez más a todos los estamentos del pensamiento, ya no son sólo una curiosidad de tablero (*de hecho nunca lo han sido*), están presentes en todas las actividades científicas y quienes la ejercen ya no son bichos raros, ahora están a la vanguardia en el

mundo laboral. La Unión Matemática Internacional y, en general, los matemáticos del mundo, estamos en deuda con las matemáticas, debemos pensar cómo evangelizar matemáticamente a todo el mundo... Después de todo, eso, pensar, es el mayor espectáculo del mundo.

Referencias

- [1] Agarwal, N., Shah, R., and Venkataraman, G., *Maryam Mirzakhani, The Master Artist of Curved Surfaces*, Resonance Journal of Science Education, Vol. 23, Núm. 3, 253-262, 2018.
- [2] Artal, E., Cogolludo, J., y Melle, A., *John Willard Milnor, Medalla Fields 1962*, La Gaceta de la RSME, Vol. 15, Núm. 3, 575-587, 2012.
- [3] Barany, M., *The Fields Medal Should Return to Its Toots*, Nature 553, 271-273, 2018.
- [4] Espinoza, M., *La Reducción de lo Posible. René Thom y el Determinismo Causal*, Theoria 59, 233-251, 2007.
- [5] Granville, B., *Historia de los Mundiales de Futbol*, T and B Editores, 2009.
- [6] Lozano, M., *William Thurston, Medalla Fields*, La Gaceta de la RSME, Vol. 3, Núm. 3. 549-555, 2000.
- [7] O'Connor, J. and Robertson, E., <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Thurston.html>
- [8] Pineda, D., *La Historia de los Mundiales*, Bilineata Publishing, 2014.
- [9] Singh, S., *El último teorema de Fermat*, Record, 2006.
- [10] Smale, S., *Mathematical problems for the next century, in Mathematics: Frontiers and Perspectives*, ed. V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, and B. Mazur, American Math. Soc., 271-294, 2000.
- [11] Sol Licia I., *La Obra de Kunihiko Kodaira*, La Gaceta de la RSME, Vol. 16, Núm. 1. 169-183, 2013.
- [12] Tarrés, J., *Sobre la Historia del Concepto Topológico de Curva*, La Gaceta de la RSME, Vol. 1, Núm. 1. 59-77, 1998.
- [13] Yandell, B., *The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers*, ed. Taylor and Francis, 2001.
- [16] Figura 5: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/57/Minimal_surfaces_Plateau_%27s_problem%27.jpg
- [17] Figura 6: <https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSMFa2q48Xt1H5bXampY5ZAQteF9YkNkWUZKhsLkU4AYdSbsnNqQ>
- [18] Figura 7: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/06/Two_coordinate_charts_on_a_manifold.svg/250px-Two_coordinate_charts_on_a_manifold.svg.png
- [19] Figura 9: <https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSd3TiQDhF9kDBeeHdkBNMnKqyuANG5JBUSRZaDD706omlxR>
- [20] Figura 10: <https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcRngOkYzlSMm3rTYHXBX3W0RIGYNDhESnYqqCH-CwggwJYuZOiJUJg>
- [21] Figura 11: https://elementy.ru/images/eltpub/sedrik_villani_2_600.jpg
- [22] Figura 12: <https://i.ytimg.com/vi/HazEZaBuIvg/maxresdefault.jpg>
- [23] Figura 13: <https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQ75K7vco2IZ2LxSPTnJwM'u0Xqix8QpXJtznOBFjT0XgSDqOBp>
- [24] Figura 14: http://clickeaprenda.uol.com.br/clickideiamedio/medio/disc/not/preview/NOT1005241201_01_p.jpg
- [25] Figura 15: <https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQi7NZ2SxKFdUug89MBJ1hMn6YRrAIW7-TUXl6oC98Msw8VVIm>

Créditos de las imágenes.

- [14] Figura 1: <https://losmundialesdefutbol.files.wordpress.com/2016/01/uruguay-30.png?w=380>
- [15] Figura 3: <http://www.aguantenche.com.uy/wp-content/uploads/brasil-1970-580x340.jpg>

Acerca del autor: John Alexander Arredondo es doctor en matemáticas de la Universidad Autónoma Metropolitana de México. Es investigador en las áreas de mecánica celeste, geometría diferencial y algo de combinatoria. El Barcelona de España es el equipo de sus amores y Lionel Messi su más grande ídolo. Es un gran amante de hacer deporte y conducir autos. Algún día espera aprender a tocar guitarra.

Armonía en las Matemáticas

Julián Jiménez-Cárdenas*

juliano.jimenezc@konradlorenz.edu.co

1. Introducción

Sumar es una de las operaciones fundamentales en la matemática. Dados cualesquiera dos números reales (o complejos), se puede obtener un tercero, igual a la adición entre los dos. Si se dota a $\mathbb{R}$ (los reales, el conjunto que contiene a todos los números) con la suma y el producto, se obtiene el cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, con todas las propiedades naturales de la suma y el producto de números, con las que el lector estará familiarizado.

A pesar de la simplicidad de esta operación, se pueden definir objetos muy interesantes con ella. Sin embargo, antes de ver uno de estos, primero se debe conocer qué es una sucesión, y algunas de sus propiedades.

1.1. Sucesiones

Definición 1.1 (Sucesión infinita). *Una sucesión infinita es un conjunto de números indexados mediante números naturales $(0, 1, 2, 3, \dots)$, y se denota como*

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

con a_n siendo el elemento n -ésimo de la sucesión.

Se suele definir la sucesión como una función cuyo dominio es $\mathbb{N}[1]$, es decir, es una asignación de elementos desde los naturales hasta un conjunto de números; vale la pena observar que ambas definiciones son equivalentes, puesto que indexar elementos en un conjunto es construir una función que le asigna a cada número natural un elemento del conjunto. Algunos ejemplos de sucesiones son:

Ejemplo 1.1. *La sucesión de los números naturales, definida como*

$$a_n = n.$$

Es decir, el elemento n -ésimo de la sucesión es el natural n . Los elementos de esta sucesión son:

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Ejemplo 1.2. *La sucesión*

$$a_n = \frac{1}{n+1}.$$

Explícitamente, los elementos de esta son:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Trabajar con estos elementos infinitos puede parecer engorroso, pero si se define adecuadamente sus propiedades, se puede llegar a resultados elegantes. La primera definición natural proveniente de las sucesiones es la idea de convergencia. Intuitivamente, podemos decir que la sucesión del ejemplo 1.2 tiende a cero cuando n es cada vez más grande. Una manera alternativa de decir la proposición anterior es:

Para cualquier número mayor que cero ε se puede encontrar un natural de modo que $a_n = \frac{1}{n+1}$ sea menor que ε .

Recomiendo que se tome un tiempo para ver que ambas proposiciones significan lo mismo. Formalmente, esta proposición se sustenta gracias a la propiedad arquimediana, enunciada a continuación

Proposición 1.1 (Propiedad arquimediana [2]). *Si $a, b \in \mathbb{R}$ son números reales con $a > 0$ (a mayor que cero), entonces existe un número natural n tal que*

$$na > b.$$

Con esta idea intuitiva de convergencia, se procede a definirla en términos estrictos.

Definición 1.2 (Convergencia de una sucesión). *Una sucesión converge hacia r si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n' > n$*

$$|a_{n'} - r| < \varepsilon.$$

Con esta definición, se pueden llegar a resultados que corresponden al análisis matemático, como las sucesiones de Cauchy y la completez de un conjunto. Para los objetivos del texto basta con saber qué significa que una sucesión converja a algo, para definir una serie.

1.2. Series

La idea de sumas infinitas nace con las paradojas de Zenón, cuando se empieza a inquirir acerca del espacio o tiempo infinitamente divisibles. Un ejemplo de esto es la suma de los inversos de las potencias de 2,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots,$$

que geoméricamente debería converger a la unidad, porque dicha suma se puede ver como la suma de fracciones del área de un cuadrado, como indica la figura 1.

¿Pero cómo saber si una serie (suma infinita) converge? Observe que una serie puede definirse como una sucesión de sumas parciales, como se expone a continuación

*Estudiante de matemáticas, Fundación Universitaria Konrad Lorenz.

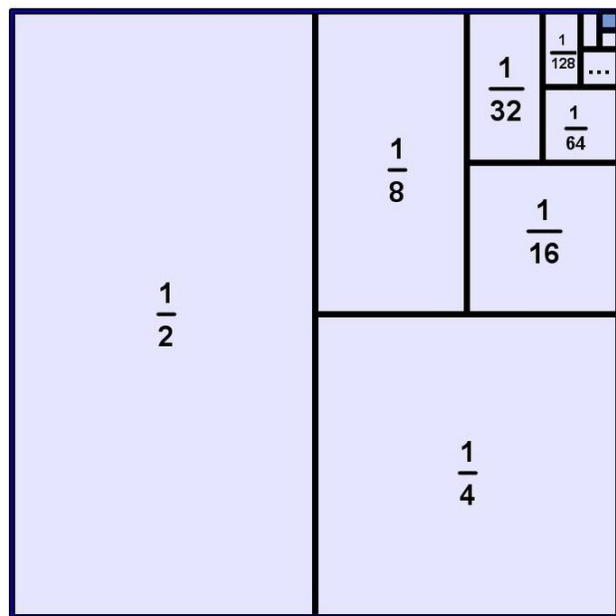


Figura 1: Suma geométrica[3].

Definición 1.3 (Serie). Considere la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Decimos que la serie asociada a esta sucesión es la sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde

$$b_n = \sum_{i=0}^n a_i.$$

La serie de esta sucesión se denotará como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Nota: El símbolo $\sum_{i=0}^n$ representa la suma desde $i = 0$, pasando por $i = 1, 2, \dots, n$ de lo que esté adentro de él. Por ejemplo,

$$\sum_{i=0}^n a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Y dado que se definió una serie como una sucesión de sumas parciales, la convergencia de sucesiones se extiende para la convergencia de series, es decir:

Una serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ converge a r si para todo $\varepsilon > 0$, existe un número $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n' > n$ ocurre que

$$\left| \sum_{i=0}^{n'} a_i - r \right| < \varepsilon.$$

La serie con la que empezamos la discusión,

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

resulta converger a uno, como se espera de la representación geométrica de la misma. Dedíquese a confirmar que la definición de serie coincide con la suma explícita de los inversos de las potencias de dos. Para verificar que la serie efectivamente converge, se usa un truco matemático conocido como suma telescópica. Defínase

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i},$$

y mediante operaciones básicas se obtiene que

$$S_n \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right),$$

de modo que

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Observe que la sucesión $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 1, como es de esperarse. Con estas herramientas y después de haber practicado con ellas con la serie geométrica, se puede ir de lleno al tema central de este texto, la serie armónica.

2. Serie Armónica

Debe su nombre al concepto de sobretonos, o armónicos en la escala musical: la longitud de onda de los sobretonos de una cuerda vibrante son $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, etc., de la longitud de onda fundamental de la cuerda. Matemáticamente se define como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Observe que es la serie asociada a la sucesión del ejemplo 1.2.

2.1. Divergencia de la serie armónica

La serie armónica crece tan lentamente que uno puede llegar a pensar que converge, si uno suma el primer millón de términos de la serie no obtiene más de 15. Sin embargo se probará que no es así.

Para ello, se supondrá que converge y se llegará a una contradicción. Este método es bastante usado en la matemática contemporánea, y se fundamenta en suponer que lo que se quiere probar no ocurre, llegando a una imposibilidad lógica, con lo que se concluye que lo que uno quiere probar debe ocurrir para evitar absurdos.

Suponga entonces que la serie armónica converge a un valor, digamos A , de modo que

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \\ &= \frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{6} + \frac{2}{8} + \dots \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &< \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &= A, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, porque ningún número puede ser mayor que él mismo. Así, la serie armónica diverge[5].

2.2. Series sub-armónicas

Dada la divergencia de la serie armónica, cabe preguntarse si se pueden tomar elementos de la sucesión con la que se construye la serie armónica para que su subserie converja. Es claro que si se toman los inversos de los pares sigue divergiendo, puesto que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Es decir, se retorna a la serie armónica. Lo mismo sucede con la subserie armónica conformada por los inversos de los números impares. El lector atento habrá observado que la serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

es también una subserie de la serie armónica. Como se probó antes, esta sí converge. En general, cualquier serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

converge si $|x| < 1$ ¹. Otra subserie realmente interesante es la de los inversos de los números primos. La densidad de los números primos es cada vez más pequeña mientras se avanza hacia adelante en los naturales, pero esto no impide que

$$\sum_{p \text{ es primo}} \frac{1}{p}$$

diverja. Euler y Erdős tienen las pruebas más geniales de este hecho, pero el nivel de estas escapa del propósito divulgativo del presente texto. Basta con que el lector sepa que

$$\sum_{\substack{p < n \\ p \text{ es primo}}} \frac{1}{p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln(\ln(n))$$

Es decir, la suma de los inversos de los primos menores que un número n tiende más a ser el logaritmo del logaritmo de n [5], cada vez que n se hace más grande. En el límite cuando $n \rightarrow \infty$, $\ln(\ln(n))$ diverge. El logaritmo es una de las funciones crecientes usuales de más lento crecimiento, por lo que el logaritmo del logaritmo es muchísimo más lenta en crecer. Así, la subserie de los inversos de los números primos diverge, pero muy lentamente.

Otro resultado que vale la pena mencionar, pero que no se probará, es que si se considera la subserie conformada por los inversos de los números que no contengan un dígito (conocidas como **series de Kempner**), digamos el 7, dicha subserie sí converge.

¹El valor absoluto de un número x es $-x$ si x es negativo, y él mismo si no lo es.

Y por último, si se considera la serie armónica oscilante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

se puede demostrar que converge mostrando que el logaritmo de $x+1$ se puede escribir como

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},$$

y que esta serie converge para $x = 1$, de modo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$$

2.3. Constante de Euler-Mascheroni

Es imposible hablar de la serie armónica sin mencionar la Constante de Euler-Mascheroni. Para introducirla, considere la sucesión

$$\{S_n - \ln(n)\}_{n \in \mathbb{N} - \{0\}},$$

donde $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$. Esta sucesión es decreciente y está acotada por debajo por 0. Es decir, para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$,

$$S_n - \ln(n) > 0.$$

Algo que no se comentó, pero que es fácil de demostrar e intuitivo es que toda sucesión creciente (decreciente) y acotada superiormente (inferiormente) converge. Así, $\{S_n - \ln(n)\}_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$ converge a un valor que se denotará como γ , y se escribirá de la siguiente manera

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \ln(n)$$

γ es aproximadamente 0,577. El interés particular de este número es que su naturaleza se desconoce. No se sabe si es racional o irracional, la característica más relevante de cualquier número real.

3. Una generalización: Las p-series

Si se cree que se tuvo suficiente con la serie armónica y sus derivados, uno se puede preguntar acerca de la naturaleza de las series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k},$$

donde k es un número natural mayor que 1. Es claro que con $k = 1$ se obtiene la serie armónica. Como primera aproximación al problema, se analizará el caso en el que $k = 2$. Primero, observe que esta serie converge, porque

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &< 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= 1 + 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= 2. \end{aligned}$$

La primera línea encuentra justificación debido al hecho natural de que si se tiene un número natural mayor que dos n , ocurre que $n^2 > n(n-1)$ (recomiendo que haga ejemplos para convencerse de este resultado). Con esto se deduce que

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}.$$

De la segunda a la tercera línea se usó de nuevo el truco de las sumas telescópicas, verifique por qué.

Así, como se mencionó cuando se habló de la Constante de Euler-Mascheroni, dado que la sucesión de sumas parciales es creciente y se encuentra acotada (en este caso por 2), la serie debe converger. Cronológicamente, la familia Bernoulli (la familia más prolífica de matemáticos) demostró que la serie converge, pero no a dónde. Este problema adquirió fama, conociéndose como el problema de Basilea, una ciudad suiza. Euler, mediante las funciones trigonométricas y su expansión en series de potencias, concluyó que la serie debe converger a

$$\frac{\pi^2}{6}.$$

Sería un buen ejercicio que el lector intentase entender el esquema de la prueba, puesto que solamente requiere trigonometría y series de Taylor, pero con esta introducción al concepto de series, el lector dominará velozmente las series de Taylor.

La idea de Euler era genial, pero no contaba con la suficiente rigurosidad matemática cuando fue publicada, por lo que existen otros métodos más formales como los asociados a las series de Fourier, que sí requieren de matemática universitaria.

Volviendo al tema central de esta disertación, se observa que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

converge para $k = 2$. Pero como

$$\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^k},$$

con $k > 3$, esta serie debe converger siempre que $k \geq 2$. La pregunta natural sigue siendo adónde. Aquí se encuentra uno de los grandes misterios de la matemática. Euler demostró que en el caso de que la potencia sea par, digamos, $k = 2m$, con $m \leq 1$, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = (-1)^{m-1} \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m},$$

donde B_{2m} es el número de Bernoulli $2m$ -ésimo. Aconsejo que el lector se familiarice con estos números y con la operación factorial. En contraste, si la potencia es impar, se desconoce adónde converge la serie de manera explícita. Se sabe que para $k = 3$ es un número irracional, nada más. Este es ciertamente uno de los problemas abiertos más interesantes referentes a las series.

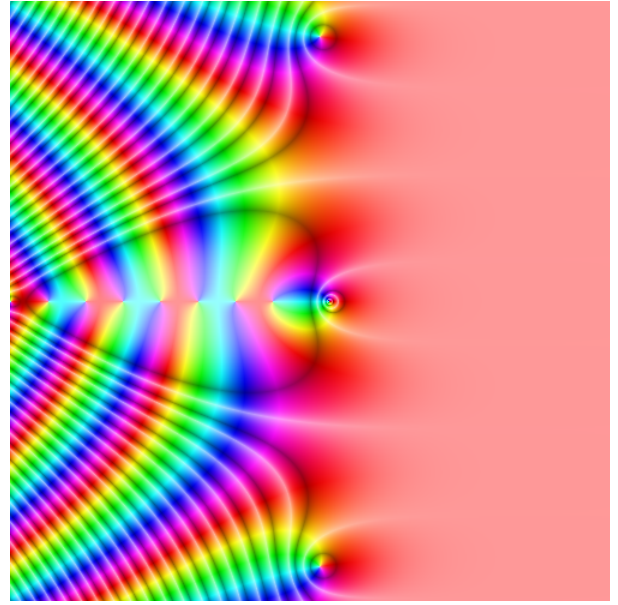


Figura 2: Función Zeta de Riemann graficada en el plano complejo cerca al origen usando la técnica de dominio coloreado[7].

4. Más allá: La función Zeta de Riemann

Si no está satisfecho con el nivel de complejidad de las p -series, cambie la potencia natural de ellas por un número complejo arbitrario, y definirá la función zeta de Riemann:

Definición 4.1 (Función Zeta de Riemann). *La función zeta de Riemann o función zeta de Euler-Riemann $\zeta(s)$, se define sobre los complejos como sigue*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Es decir, s es un número complejo.

Observe que

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

por lo que la Función Zeta de Riemann es una generalización de la serie armónica. Varias de las propiedades de esta función requieren herramientas matemáticas sofisticadas; de hecho, en ella reposan las inquietudes más grandes de la matemática, como la Hipótesis de Riemann, que supone que los ceros de esta función (no triviales) se encuentran en una región bien determinada del plano complejo.

Puede parecer un problema abstracto, pero detrás de este meollo se podrían encontrar pistas de la distribución de los números primos en los naturales, y como se sabe los números primos tienen un sinnúmero de aplicaciones.

Afortunadamente, a este nivel se puede demostrar una de las múltiples conexiones de la Función Zeta de Riemann con los

números primos; para ello, considere los primeros términos de la serie

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{9^s} + \dots \quad (1)$$

Si se multiplica la anterior expresión por $\frac{1}{2^s}$, se obtienen todos los términos pares de la serie,

$$\frac{1}{2^s} \zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots \quad (2)$$

Restar las ecuaciones (1) y (2) resulta en

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \dots \quad (3)$$

Y si a esta se le resta $\zeta(s) \frac{1}{3^s}$, todos los múltiplos de 3 se irán, de modo que el resultado dará

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) - \zeta(s) \frac{1}{3^s} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \zeta(s) \quad (4)$$

Realizando de manera iterativa este procedimiento con todos los números primos se obtiene la siguiente expresión:

$$\zeta(s) \prod_{p \text{ es primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = 1$$

$$\boxed{\zeta(s) = \prod_{p \text{ es primo}} \frac{1}{1 - 1/p^s}}$$

que relaciona a la Función Zeta de Riemann con los números primos.

Nota: El símbolo $\prod$ denota producto de todo lo que esté dentro, con el índice que corresponda. Itera del mismo modo que $\sum$, pero en vez de sumar multiplica.

Después de toda esta discusión, se puede concluir que la serie armónica es el cimiento de conceptos matemáticos mucho más elaborados e interesantes, como lo son la Constante de Euler-Mascheroni y la Función Zeta de Riemann. Sin embargo, no por esto deja de ser relevante y enriquecedor estudiarla, puesto que posee propiedades atractivas, y seguramente es el campo de juego ideal para las personas que apenas se introducen en las sumas infinitas.

Referencias

[1] Spivak, M. *Calculus*. Editorial Reverté.

[2] Propiedad arquimediana: <https://calculoinfinitesimal.wordpress.com/2009/10/20/la-propiedad-arquimediana/>

[3] Suma geométrica: <https://i.pinimg.com/736x/20/a3/1f/20a31fcdb810301e7be47a02dcb57b19--gre-math-math-fractions.jpg>

[4] IEV 1994, sound: <http://www.electropedia.org/iev/iev.nsf/display?openform&ievref=801-21-01>

[5] Havil, J. *Gamma: Exploring Euler's constant*. Princeton University Press.

[6] Gelbart, S. and Miller, D. *Riemann's zeta function and beyond*. Bulletin (New Series) of the american mathematical society.

[7] Gráfica Zeta de Riemann: <http://www.meta-numerics.net/documentation/html/ddc9ec1d-c33c-da2f-a4d4-8eb0054a83d6.htm>

Acerca del autor: Julián Jiménez Cárdenas es estudiante del Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz y estudiante del Programa de Física de la Universidad Nacional. Es miembro del semillero de Mecánica Celeste del Programa de Matemáticas, en donde ha realizado algunos avances investigativos que ha presentado en varios eventos nacionales e internacionales. Es un gran programador, en especial en Python, de cuyo programa da cursos y dirige un sitio en Internet. Es un gran nadador y le gustaría aprender a cocinar.

Política Editorial

El Paskín Matemático es una producción del Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Está abierto a todos y todas. Si tienes interés en escribir un artículo con cualquier tipo de contenido matemático, reseñar a un personaje, comentar un problema o tienes comentarios sobre nuestra publicación, envía un mensaje a paskin@konradlorenz.edu.co

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

El Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz fue creado en 1998. Conoce más acerca de nuestro programa en nuestra página institucional

<http://www.konradlorenz.edu.co/es/aspirantes/carreras-universitarias/carrera-de-matematicas/presentacion.html>

Bogotá, Colombia. 2018

MATEMÁTICO

PASKÍN MATEMÁTICO

Volumen 1, No. 1, 2018

Contenido

- John A. Arredondo
Sobre el mayor espectáculo del mundo.....1
- Julián Jiménez Cardenas
Armonía en las matemáticas.....8

*La creatividad en matemáticas es esa fuerza
de concentración que nos permite escuchar
lo que un objeto nos quiere decir.*

Alexander Grothendieck