



$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b y$
 y^3
 $\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$
 $\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\tan \alpha}$
 $\sqrt{x^2 - x} - x^2$
 $n! = \prod_{k=1}^n k$

e-ISSN
2665-2471

PAS XIN MATEMÁTICO

$\frac{x_A + x_C}{2}$

$m \cdot S/2$

$(x) = \frac{d}{3}$

$f(x) \sim \frac{\alpha \pi}{2}$

$\frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}\right) - (n-1)x}{1 + (n-1)2x^2}$

$\Delta x \rightarrow 0$

$(x) = d$

$\sum_{n=1}$

$\sqrt[3]{a^4}$

$m=S$

$V + E + F = 2$

 **KONRAD LORENZ**
FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$
Vol. 7
No. 1

$\sin \frac{3}{4}$

$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

PASKÍN MATEMÁTICO

<https://editorial.konradlorenz.edu.co/paskin-matematico.html>

e-mail: paskin@konradlorenz.edu.co

Editor

John A. Arredondo

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co

Comité Editorial

Ruth Alejandra Torres

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
rutha.torresr@konradlorenz.edu.co

Julián Jiménez Cárdenas

Universidad de los Andes
jo.jimenezc1@uniandes.edu.co

Camilo Ramírez Maluendas

Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales
camramirezma@unal.edu.co

Andrés Mauricio Rivera

Pontificia Universidad Javeriana
Sede Cali
amrivera@javerianacali.edu.co

Leidy Catherine Sánchez

ScotiaGBS del grupo Scotiabank
leidy.sanchez@scotiabank.com

Jesús Muciño

Centro de Ciencias Matemáticas UNAM-Morelia
muciray@matmor.unam.mx

Esta publicación puede ser difundida y reproducida con fines académicos y científicos por todos aquellos que tengan a bien hacer un correcto uso de su contenido.

ISSN 2665-2471

Fundación Universitaria Konrad Lorenz: Tel: (57 1) 347 23 11, Carrera 9 Bis No. 62- 43 Bogotá – Colombia, email: info@konradlorenz.edu. **Carácter académico:** Institución Universitaria. Personería Jurídica por Resolución 18537 del 4 de noviembre de 1981 del Ministerio de Educación Nacional. Institución de Educación Superior sujeta a inspección y vigilancia por el Ministerio de Educación Nacional (Art. 2.5.3.2.10.2, Decreto 1075 de 2015).

MATEMÁTICO

EN ESTE NÚMERO

*

- Carta del editor
- Mario Andrés Medina Barrera
 - Números primos de la forma $x^2 + ny^2$ y casos particulares - pág. 1
- Alejandra T. Manotas
 - ¿Qué son las cónicas?. - pág. 9
- Mariam Pinto Heydler y César Augusto Lara Santana
 - Estimación de un modelo de ecuaciones estructurales para informalidad laboral - pág. 14
- Astrid Liliana Contreras Mendoza
 - Multiestacionaridad e Inyectividad: Un enfoque desde la geometría algebraica - pág. 23
- Leidy Catherinne Sánchez
 - MateKuento - pág. 32

*

Me despido de la dirección de este proyecto, que siempre recordaré como una apasionante aventura matemática y, como casi todo en matemáticas, esta fue una aventura de amigos, de aquellos que siempre creyeron y apoyaron el Paskín. Agradezco a todos los autores que contribuyeron con sus artículos y a todos aquellos que los leyeron; sin ustedes, el Paskín no habría tenido sentido.

Pero, por sobre todo, agradezco a Catherine, Julián, Camilo, Dayron, Andrés y Jesús, amigos personales, creyentes, defensores y promotores del Paskin.

Nos vemos en la próxima aventura matemática.

John A. Arredondo

NÚMEROS PRIMOS DE LA FORMA $x^2 + ny^2$ Y CASOS PARTICULARES

Mario Andrés Medina Barrera^{*}
marioa.medinab@konradlorenz.edu.co

1. Resumen

En este artículo se presentarán los resultados principales de los números primos de la forma $x^2 + ny^2$, algunos ejemplos de éstos y qué clases de números primos famosos tienen esta forma usando el software PARI/GP.

2. Introducción

Los números primos han sido materia de estudio por los matemáticos por siglos, de donde han surgido resultados y problemas que hoy en día se siguen estudiando, tales como la conjetura de Collatz, la conjetura de Goldbach, o el problema de los primos gemelos. Una clase importante de primos son los primos de la forma $x^2 + ny^2$, con $n \in \mathbb{N}$ y $x, y \in \mathbb{Z}$ coprimos. Estos primos han sido objeto de una extensa y profunda teoría.

El origen del estudio de esta clase de primos se origina de los carteos que tuvieron Pierre de Fermat y Marin Mersenne en el siglo XVII, tratando los casos específicos para $n = 1, 2, 3$, o sea primos de la forma $x^2 + y^2$, $x^2 + 2y^2$, $x^2 + 3y^2$. Fermat y Mersenne estaban particularmente interesados en encontrar una fórmula general para determinar cuándo un número de la forma $p = x^2 + ny^2$ es primo con un $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Este trabajo fue un importante punto de partida para el desarrollo de lo que más tarde sería conocido como la teoría de las formas cuadráticas.

Posteriormente fue Leonard Euler el que demostró las hipótesis que había dado Fermat para los casos $n = 1, 2, 3$, proporcionando demostraciones rigurosas de sus afirmaciones. Estas hipótesis serán detalladas más adelante en el texto.

Más tarde, Joseph-Louis Lagrange y Carl Friedrich Gauss sistematizaron el estudio de estos primos a través de la teoría de las formas cuadráticas binarias. Gauss, en particular, en su obra *Disquisitiones Arithmeticae*, clasificó los números primos que pueden ser de la forma $x^2 + ny^2$ para diferentes valores de n , conectando estas representaciones con propiedades aritméticas y cuerpos cuadráticos.

3. Conceptos preliminares

Para comprender la teoría de los números primos de la forma $p = x^2 + ny^2$ en primer lugar debemos aprender algunos

conceptos claves.

Definición 3.1 (Divisibilidad): Sean $d, b \in \mathbb{Z}$, se dice que b es divisible por d y se denota por $d \mid b$ si y sólo si existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = d \cdot k, \quad (1)$$

y se dice que d es un divisor de b .

Definición 3.2 (Máximo común divisor): Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, y sea d un divisor común de a y b , se dice que d es al máximo común divisor de a y b si y sólo si

1. $d \mid a$ y $d \mid b$,
2. Si m es cualquier otro divisor de a y b , entonces $m \leq d$.

A lo largo de este artículo se usará la notación

$$(a, b), \quad (2)$$

para indicar el máximo común divisor de $a, b \in \mathbb{Z}$.

Definición 3.3 (Números coprimos): Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, se dice que a y b son números coprimos o primos relativos si y sólo si $(a, b) = 1$.

Definición 3.4 (Congruencias [Ire90]): Sean $a, b, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$, se dice que a es congruente con b módulo n y se denota por

$$a \equiv b \pmod{n}, \quad (3)$$

si y sólo si $n \mid a - b$.

Definición 3.5 (Residuo cuadrático [Ire90]): Sean $b, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$, se dice que b es un residuo cuadrático módulo n si y sólo si existe un $x \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x^2 \equiv b \pmod{n}. \quad (4)$$

Definición 3.6 (Relación): Una relación R de un conjunto A a un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, es decir, $R \subseteq A \times B$, y se dice que $a \in A$ está relacionado con $b \in B$ si $(a, b) \in R$.

Definición 3.7 (Relación de equivalencia): Una relación $\sim$ en un conjunto A , se dice que es una relación de equivalencia si cumple que

1. Para todo $a \in A$, entonces $a \sim a$.
2. Para todo $a, b \in A$, si $a \sim b$, entonces $b \sim a$.
3. Para todo $a, b, c \in A$, si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \sim c$.

^{*}Estudiante de Matemáticas, Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Bogotá-Colombia

Ejemplo 3.1: Probaremos que la relación equivalencia módulo $n \in \mathbb{Z}$ ($\equiv$) definida anteriormente es una relación de equivalencia, para ello probaremos las tres condiciones de definición.

1. Dado que $n \mid 0$, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ y tomando $0 = a - a$ para un $a \in \mathbb{Z}$ arbitrario, entonces

$$n \mid a - a \text{ si y sólo si } a \equiv a \pmod{n}.$$

2. Si $a \equiv b \pmod{n}$ para $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces

$$n \mid b - a \implies b - a = n \cdot k_1 \text{ para } k_1 \in \mathbb{Z},$$

de este modo

$$a - b = n \cdot (-k_1) \implies n \mid a - b \implies a \equiv b \pmod{n}.$$

3. Si $a \equiv b \pmod{n}$, $b \equiv c \pmod{n}$ para $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces

$$n \mid b - a \text{ y } n \mid c - b,$$

ahora aplicando la definición de divisibilidad, tenemos

$$b - a = n \cdot k_1, \quad c - b = n \cdot k_2$$

para $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Sumando ambas expresiones, se tiene que

$$c - a = (k_1 + k_2) \cdot n \implies n \mid c - a \implies c \equiv a \pmod{n}.$$

Definición 3.8 (Clase de equivalencia): Dada una relación de equivalencia $\sim$ en A , definimos la clase de equivalencia para un $a \in A$ como

$$[a] = \{x \in A \mid x \sim a\}, \quad (5)$$

advierta que si $b \in [a]$, entonces

$$[a] = [b].$$

Definición 3.9 (Los enteros módulo n): Dado que la relación congruencia módulo n definida anteriormente es una relación de equivalencia, podemos definir la clase de equivalencia para un $a \in \mathbb{Z}$ como

$$[a] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{n}\}, \quad (6)$$

y de esta manera definimos los enteros módulo n como

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[a] \mid a \in \mathbb{Z}\}, \quad (7)$$

de manera explícita se define como

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], [1], \dots, [n-2], [n-1]\}. \quad (8)$$

Definición 3.10 (Conjunto de unidades módulo n [Dum04]): Se define el conjunto de unidades módulo n , que se denota $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, como

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{[a] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid (a, n) = 1\}. \quad (9)$$

Definición 3.11 (Símbolo de Legendre [Ire90]): Sean $a, p \in \mathbb{Z}$ siendo p un número primo impar. Se define el símbolo de Legendre como

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } p \mid a, \\ 1, & \text{si } p \nmid a \text{ y } a \text{ es residuo cuadrático módulo } p, \\ -1, & \text{si } p \nmid a \text{ y } a \text{ no es residuo cuadrático módulo } p. \end{cases} \quad (10)$$

Note que el símbolo de Legendre no se define para $p = 2$. Esto se debe a que cualquier $a \in \mathbb{Z}$ es residuo cuadrático módulo 2, ya que $a \equiv 0 \pmod{2}$ ó $a \equiv 1 \pmod{2}$, y en cualquier caso, existen $x \in \mathbb{Z}$ pares tal que $x^2 \equiv a \pmod{2}$ en el primer caso, y $x \in \mathbb{Z}$ impares tal que $x^2 \equiv a \pmod{2}$ en el segundo caso. Naturalmente, uno podría preguntarse sobre el caso en que p sea un número compuesto en vez de un primo. Para ello, definiremos a continuación el símbolo de Jacobi, que se definirá a partir del símbolo de Legendre.

Definición 3.12 (Símbolo de Jacobi [Cox89]): Sean $m, M \in \mathbb{Z}$ donde $(m, M) = 1$ y $m > 0$ es impar. Se define el símbolo de Jacobi como

$$\left(\frac{M}{m}\right) = \prod_{i=1}^r \left(\frac{M}{p_i}\right), \quad (11)$$

donde $m = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{r-1} \cdot p_r$.

Definición 3.13 (Números primos de la forma $p = x^2 + ny^2$): Se dice que un número primo p tiene la forma $x^2 + ny^2$ para un $n \in \mathbb{N}$ si existen $x, y \in \mathbb{Z}$ que sean coprimos, o sea $(x, y) = 1$, tal que $p = x^2 + ny^2$.

4. Primos de la forma $x^2 + ny^2$

Las hipótesis que presentó Fermat y más tarde demostró Euler en los casos puntuales para $n = 1, 2, 3$, fueron las siguientes:

Teorema 4.1 ([Cox89]): Sea p un primo y sean $x, y \in \mathbb{Z}$ tal que $(x, y) = 1$, entonces

1. $p = x^2 + y^2$ si y sólo si $p = 2$, $p \equiv 1 \pmod{4}$,
2. $p = x^2 + 2y^2$ si y sólo si $p \equiv 1, 3 \pmod{8}$,
3. $p = x^2 + 3y^2$, $(x, y) = 1$ si y sólo si $p = 3$, $p \equiv 1 \pmod{3}$.

Para estudiar el caso general debemos abordar el teorema de la reciprocidad cuadrática al igual que hacer uso de teoría de grupos. Para ello, haremos un breve repaso a los conceptos importantes de los que se hará uso en este texto.

4.1. Fundamentos de teoría de grupos

Definición 4.1 (Operación binaria [Dum04]): Una operación binaria $\star$ en un conjunto G es una función $\star : G \times G \longrightarrow G$.

Ejemplo 4.1: La operación estándar producto $\cdot$ definida en $\mathbb{Q}$ es una operación binaria, ya que para todo $a, b \in \mathbb{Q}$, se tiene que $a \cdot b \in \mathbb{Q}$ (cerradura del producto en los racionales).

Definición 4.2 (Grupo [Dum04]): Un grupo es un par ordenado $(G, \cdot)$ donde G es un conjunto y $\cdot$ es una operación binaria en G , tal que satisface

1. Para todo $a, b, c \in G$ se tiene que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
2. Existe un elemento $e \in G$, llamado identidad de G , tal que para todo $a \in G$ se tiene que $a \cdot e = e \cdot a = a$.
3. Para todo $a \in G$ hay un elemento $a^{-1} \in G$, llamado inverso de a , tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Ejemplo 4.2: El grupo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ bajo la operación producto estándar $\cdot$ forma un grupo, con $e = [1]$ y para un $[a] \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, tenemos que su inverso multiplicativo se halla por medio del algoritmo extendido de Euclides que permite hallar la solución $x, y \in \mathbb{Z}$, tal que

$$ax + ny = (a, n) \implies ax + ny = 1 \implies ax = 1 - ny,$$

es decir $ax \equiv 1 \pmod n$, donde $[x] \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ es el elemento inverso de $[a]$.

Definición 4.3 (Subgrupo [Dum04]): Sea $(G, \cdot)$ un grupo. El subconjunto H de G se dice que es un subgrupo y se denota como $H \leq G$, si es no vacío y si para todo $x, y \in H$, entonces $x^{-1} \in H$ y $x \cdot y \in H$, en otras palabras, $(H, \cdot)$ es también un grupo.

Ejemplo 4.3: El grupo $(\mathbb{Q}, +)$ tiene como subgrupo al conjunto $\mathbb{Z}$ bajo la operación suma estándar $+$, es decir $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +)$.

Definición 4.4 (Acción de grupo [Dum04]): Una acción de grupo de un grupo $(G, \cdot)$ en un conjunto A es una función de $\phi : G \times A \longrightarrow A$, tal que satisface

1. $\phi(e, a) = a$ para todo $a \in A$.
2. $\phi(g_1 \cdot g_2, a) = \phi(g_1, \phi(g_2, a))$ para todo $a \in A$ y $g_1, g_2 \in G$.

Ejemplo 4.4: Sea el grupo simétrico $G = (S_n, \circ)$ (el conjunto S_n contiene todas las permutaciones del conjunto $X = \{1, 2, \dots, n\}$ y la operación $\circ$ es la composición de permutaciones) y el conjunto $X = \{1, 2, \dots, n\}$. La función $\phi : G \times X \longrightarrow X$ definida como

$$\phi(\sigma, a) = \sigma(a), \text{ para todo } \sigma \in S_n \text{ y } a \in X,$$

es una acción de grupo.

Definición 4.5 (Clase lateral izquierda): Sean $(H, \cdot)$ y $(G, \cdot)$ grupos y $H \leq G$, entonces una clase lateral izquierda xH en G se define como $xH = \{x \cdot h : h \in H\}$, para un $x \in G$.

Ejemplo 4.5: Sea el grupo $G = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$, tomemos un subgrupo de G , $H = (\{[0], [2]\}, +)$. Una clase lateral izquierda H en G , tomando $x = [3] \in G$, es

$$[3]H = \{[3] + [0], [3] + [2]\} = \{[3], [5]\} = \{[3], [1]\}.$$

Definición 4.6 (Homomorfismo de grupos): Sean $(G, \cdot_G)$, $(H, \cdot_H)$ grupos. Una función $\phi : G \longrightarrow H$ que satisface

$$\phi(x \cdot_G y) = \phi(x) \cdot_H \phi(y), \text{ para todo } x, y \in G, \quad (12)$$

se dice que es un homomorfismo de grupos.

Ejemplo 4.6: Sean los grupos $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$, la función $\phi : G \longrightarrow H$ definida como

$$\phi(a) = [a], \text{ para todo } a \in \mathbb{Z},$$

es un homomorfismo de grupos.

Definición 4.7 (Kernel de un homomorfismo de grupos [Dum04]): Sea $\phi : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos, se define el kernel del homomorfismo como

$$\ker(\phi) = \{g \in G \mid \phi(g) = e_H\}, \quad (13)$$

donde e_H es el elemento identidad del grupo H .

Ejemplo 4.7: Usando el homomorfismo del ejemplo anterior, tenemos que

$$\ker(\phi) = \{a \in \mathbb{Z} \mid \phi(a) = [0]\},$$

esto es, a debe ser múltiplo entero de 3, así

$$\ker(\phi) = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = [0].$$

4.2. Teorema de la reciprocidad cuadrática y homomorfismo de grupos

Teorema 4.2 (Teorema de la reciprocidad cuadrática [Ire90]): Si p, q son primos impares distintos, entonces

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}, \quad (14)$$

además

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}, \quad (15)$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}. \quad (16)$$

Lema 4.1 ([Cox89]): Si $D \equiv 0, 1 \pmod 4$ es un entero distinto de cero, entonces hay un único homomorfismo de grupos $\mathcal{X} : (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^* \longrightarrow \{\pm 1\}$, tal que para todo primo impar p con $p \nmid D$, $\mathcal{X}([p]) = (D/p)$, además

$$\mathcal{X}([-1]) = \begin{cases} 1 & D > 0 \\ -1 & D < 0 \end{cases}. \quad (17)$$

A continuación veremos cómo se conectan estos dos conceptos una vez hayamos definido formas cuadráticas y un poco de teoría elemental de género. Con esos dos ingredientes podemos generalizar el teorema de Fermat.

4.3. Formas cuadráticas

Introduciremos la teoría de las formas cuadráticas desarrollada por Legendre y Gauss.

Definición 4.8 (Formas cuadráticas): Se dice que una forma cuadrática $f(x, y)$ es una expresión algebraica dada por $ax^2 + bxy + cy^2$, con $a, b, c \in \mathbb{Z}$, la cual se dice además que es primitiva si $(a, b, c) = 1$ [Cox89].

Se dice que un entero m es representado por una forma $f(x, y)$, si la ecuación $m = f(x, y)$ tiene solución entera en x e y , adicionalmente se dice que m es propiamente representado si $(x, y) = 1$. Se dice que dos formas cuadráticas son equivalentes si representan los mismos números. Esto se puede formalizar usando las ideas de acción de grupo de la siguiente manera:

Definición 4.9 (Grupo lineal general de matrices enteras 2×2): El grupo lineal general de matrices enteras 2×2 se define como el par $(GL(\mathbb{Z}), \times)$, donde

$$GL(2, \mathbb{Z}) = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}) \mid \det(A) \neq 0\}, \quad (18)$$

en el que $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ es el conjunto de las matrices 2×2 con entradas enteras y $\times$ es la multiplicación estándar de matrices.

Definición 4.10 (Grupo lineal especial $SL(2, \mathbb{Z})$): El grupo lineal especial se define como el par $(SL(\mathbb{Z}), \times)$, el cual es subgrupo del grupo lineal general, es decir, $(SL(\mathbb{Z}), \times) \leq (GL(\mathbb{Z}), \times)$, donde

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}) \mid \det(A) = 1\}. \quad (19)$$

Definición 4.11 (Formas cuadráticas equivalentes): Decimos que dos formas $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son equivalentes si existe un $h \in GL(2, \mathbb{Z})$, tal que para la acción de grupos $\phi : GL(2, \mathbb{Z}) \times X \rightarrow X$ (X es el conjunto de formas cuadráticas primitivas) definida como

$$\phi \left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \times g(x, y) \right) = g(px + qy, rx + sy), \quad (20)$$

con

$$h = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}, \quad (21)$$

se cumple que

$$g(px + qy, rx + sy) = f(x, y). \quad (22)$$

Se dice además que dos formas son propiamente equivalentes si $h \in SL(2, \mathbb{Z})$ y se dice que son impropiamente equivalentes si $h \in GL(2, \mathbb{Z})/SL(2, \mathbb{Z})$ [Cox89], donde

$$GL(2, \mathbb{Z})/SL(2, \mathbb{Z}) = \{x \in GL(2, \mathbb{Z}) \mid x \notin SL(2, \mathbb{Z})\}. \quad (23)$$

Ahora podemos definir el determinante de una forma cuadrática, la cuál es una propiedad importante en el estudio de las formas cuadráticas.

Definición 4.12 (Discriminante[Cox89]): El discriminante D de una forma cuadrática $ax^2 + bxy + cy^2$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ se define como

$$D = b^2 - 4ac. \quad (24)$$

Ahora para una forma $f(x, y)$ con discriminante D , se tiene la siguiente identidad

$$4af(x, y) = (2ax + by)^2 - Dy^2, \quad (25)$$

donde si se cumple que $D > 0$, entonces $f(x, y)$ representa tanto a enteros negativos y positivos, mientras que si $D < 0$,

se tiene que $f(x, y)$ representa o solo enteros negativos o positivos dependiendo del signo de a . De esta manera definimos las formas definidas positivas o definidas negativas.

Note que hay infinitas formas cuadráticas con el mismo discriminante D , es por ello que debemos introducir el concepto de forma reducida positiva, la cuál será la representante en la clase de formas cuadráticas con un discriminante dado.

Definición 4.13 (Forma reducida positiva [Cox89]): Una forma cuadrática $ax^2 + bxy + cy^2$ se dice que es una forma reducida positiva si su respectivo discriminante $D < 0$ y además,

$$|b| \leq a \leq c, \text{ y } b \geq 0 \text{ si se cumple que } |b| = a \text{ o } a = c. \quad (26)$$

Nótese que por definición la forma cuadrática $x^2 + ny^2$ es una forma reducida positiva de discriminante $D = -4n$.

Ahora se siguen por la definición de discriminante y de forma reducida positiva los siguientes resultados:

$$-D = 4ac - b^2 \geq 4a^2 - a^2 = 3a^2 \implies a \leq \sqrt{(-D)/3}, \quad (27)$$

$$|b| \leq a, \quad (28)$$

$$b^2 - 4ac = D \implies c = \frac{(-D) + b^2}{4a}. \quad (29)$$

De esta manera se deduce que dado un discriminante $D < 0$ se tiene que hay finitas formas reducidas con discriminante D y por lo tanto, el número de clases propiamente equivalentes es también finito (entiéndase una clase propiamente equivalente como una clase de equivalencia de formas cuadráticas donde el representante es una forma reducida de discriminante D) y se dice que dos formas cuadráticas están en la misma clase si son propiamente equivalentes, de esta manera denotamos $h(D)$ como el número de clases de formas reducidas positivas de discriminante D .

Ahora enunciaremos el siguiente teorema que asegura que cada primo que pertenezca al kernel del homomorfismo del Lema 4.1 tiene una representación por alguna de las formas reducidas positivas. Este resultado es bastante poderoso, ya que nos asegura que solo debemos hallar las formas reducidas positivas con cierto discriminante y luego hallar el kernel de su respectivo homomorfismo, de esta manera tenemos los ingredientes para determinar cuando un primo p tiene la forma $x^2 + ny^2$, para un n dado.

Teorema 4.3 ([Cox89]): Sea $D \equiv 0, 1 \pmod{4}$ negativo y sea $\mathcal{X} : (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^* \rightarrow \{\pm 1\}$ el homomorfismo del lema 4.1, entonces para un primo impar p que no divide a D , $[p] \in \ker(\mathcal{X})$ si y sólo si p es representado por una de las $h(D)$ formas reducidas de discriminante D .

Cabe preguntarse si para un discriminante dado D hay infinitas formas reducidas positivas. El siguiente teorema afirma que para $D < 0$ siempre van a haber finitas formas reducidas positivas y además para finitos casos solo se cumple que $h(D) = 1$.

Teorema 4.4 ([Cox89]): Sea $D < 0$, entonces el número $h(D)$ de clases propiamente equivalentes es finito.

Teorema 4.5 ([Cox89]): Sea n un entero positivo, entonces

$$h(-4n) = 1 \text{ si y sólo si } n = 1, 2, 3, 4, 7. \quad (30)$$

4.4. Teoría elemental de género

Ahora que sabemos que $h(D) = 1$ se cumple para casos finitos, queremos saber cómo clasificar a los números primos representados por $x^2 + ny^2$ cuando $h(-4n) > 1$, o sea queremos saber cómo separar formas reducidas con mismo discriminante, para ello usaremos las ideas de Legendre. Se dice que dos formas cuadráticas están en el mismo género si representan a los mismos valores de $(\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^*$ sobre $(\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})$ (esto es, dada dos formas cuadráticas $f(x, y)$, $g(x, y)$ se dice que representan los mismos valores de $(\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^*$ sobre $(\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})$, si para algún $a \in (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^*$ si se tiene una solución $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $a = f(x_1, y_1)$, entonces deben haber $x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $a = g(x_2, y_2)$ y viceversa) entonces cada género consiste de finitas clases de formas reducidas, al ser estas propiamente equivalentes a las otras formas cuadráticas en el mismo género. El impacto de esta idealización se hace cuando se usa el teorema 4.2 y la definición de forma principal, la cual se define como

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{D}{4}y^2 & \quad \text{si } D \equiv 0 \pmod{4}, \\ x^2 + xy + \frac{1-D}{4}y^2 & \quad \text{si } D \equiv 1 \pmod{4}. \end{aligned} \quad (31)$$

donde $D < 0$ [Cox89]. Nótese que en el caso $D \equiv 0 \pmod{4}$, en la forma principal tenemos a $x^2 + ny^2$. Ahora definiremos la clase lateral, el cual es un concepto que se usará en los siguientes resultados.

Teorema 4.6 ([Cox89]): Dado un entero negativo $D \equiv 0, 1 \pmod{4}$, sea $\ker(\mathcal{X})$ como en el Teorema 4.2, y sea $f(x, y)$ una forma con discriminante D , entonces se tiene que

1. Los valores en $(\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^*$ representados por la forma principal de discriminante D forma un subgrupo $H \subset \ker(\mathcal{X})$.
2. Los valores en $(\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^*$ representados por una forma $f(x, y)$ forman una clase lateral izquierda de H en $\ker(\mathcal{X})$.

Teorema 4.7 ([Cox89]): Sea $D \equiv 0, 1 \pmod{4}$ negativo, y sea $H \subset \ker(\mathcal{X})$ como en la Proposición 4.1, si H' es una clase lateral izquierda de H en $\ker(\mathbb{Z})$ y p es un primo impar que no divide a D , entonces $[p] \in H'$ si y sólo si p es representado por una forma reducida de discriminante D en el género de H' .

Corolario 4.1 ([Cox89]): Sea n un entero positivo y p un primo impar que no divide a n . Entonces, p es representado por una forma de discriminante $-4n$ en el género principal si y sólo si para algún entero β se cumple que

$$p \equiv \beta^2, \beta^2 + n \pmod{4n}. \quad (32)$$

5. Ejemplos

- **Primos de la forma $x^2 + 6y^2$:**

En primer lugar hallaremos las formas reducidas con discriminante $D = -24$.

$$a \leq \sqrt{\frac{24}{3}} = \sqrt{8} \approx 2,$$

entonces tenemos las siguientes opciones

$$\begin{aligned} a = 2, \quad a = 2, \quad a = 2; \\ b = 0, \quad b = \pm 1, \quad b = 2; \\ c = \frac{24}{8} = 3, \quad c = \frac{25}{8}, \quad c = \frac{28}{8}. \\ \\ a = 1, \quad a = 1; \\ b = 0, \quad b = 1; \\ c = \frac{24}{4} = 6, \quad c = \frac{25}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay dos formas reducidas, las cuales son $2x^2 + 3y^2$ y $x^2 + 6y^2$.

Ahora debemos hallar el kernel de $\mathcal{X} : (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^* \longrightarrow \{\pm 1\}$, es decir

$$(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^* = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{17}, \bar{19}, \bar{23}\},$$

donde 1 es siempre residuo cuadrático de cualquier módulo, así tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{-24}{5}\right) &= \left(\frac{1}{5}\right) = 1, \\ \left(\frac{-24}{7}\right) &= \left(\frac{4}{7}\right) = 1, \\ \left(\frac{-24}{11}\right) &= \left(\frac{9}{11}\right) = 1, \\ \left(\frac{-24}{13}\right) &= \left(\frac{2}{13}\right) = -1, \\ \left(\frac{-24}{17}\right) &= \left(\frac{10}{17}\right) = -1, \\ \left(\frac{-24}{19}\right) &= \left(\frac{14}{19}\right) = -1, \\ \left(\frac{-24}{23}\right) &= \left(\frac{22}{23}\right) = -1. \end{aligned}$$

Estos cálculos se pueden realizar aplicando el teorema de la reciprocidad cuadrática. Ahora una vez hallamos el kernel de $\mathcal{X}$ por el Corolario 4.1 tenemos que de 1, 5, 7, 11 los que cumplen con las condiciones son 1, 7, ya que

$$\begin{aligned} p &\equiv 1^2 \pmod{24}, \\ p &\equiv 1^2 + 6 \pmod{24}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$p = x^2 + 6y^2 \text{ si y sólo si } p \equiv 1, 7 \pmod{24},$$

y usando el teorema 4.2 se tiene que las representaciones restantes van a la otra clase, esto es

$$p = 2x^2 + 3y^2 \text{ si y sólo si } p \equiv 5, 11 \pmod{24}.$$

■ Primos representados por formas reducidas con discriminante impar:

Tomemos el caso donde el discriminante sea $D = -15$. Ahora hallaremos las formas reducidas con discriminante $D = -15$.

$$a \leq \sqrt{\frac{15}{3}} = \sqrt{5} \approx 2,$$

entonces tenemos las siguientes opciones

$$\begin{array}{lll} a = 2, & a = 2, & a = 2; \\ b = 0, & b = \pm 1, & b = 2; \\ c = \frac{15}{8} = 3, & c = \frac{16}{8} = 2, & c = \frac{19}{8}. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a = 1, & a = 1; \\ b = 0, & b = 1; \\ c = \frac{15}{4} = 6, & c = \frac{16}{4} = 4. \end{array}$$

Por lo tanto, hay dos formas reducidas, las cuales son $2x^2 + xy + 2y^2$ y $x^2 + xy + 4y^2$.

Ahora debemos hallar el kernel de $\mathcal{R} : (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^* \rightarrow \{\pm 1\}$, es decir

$$(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\},$$

donde 1 es siempre residuo cuadrático de cualquier módulo, así tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{-15}{17}\right) &= \left(\frac{2}{17}\right) = 1, \\ \left(\frac{-15}{19}\right) &= \left(\frac{4}{19}\right) = 1, \\ \left(\frac{-15}{7}\right) &= \left(\frac{-1}{7}\right) = -1, \\ \left(\frac{-15}{23}\right) &= \left(\frac{8}{23}\right) = 1, \\ \left(\frac{-15}{11}\right) &= \left(\frac{7}{11}\right) = -1, \\ \left(\frac{-15}{13}\right) &= \left(\frac{11}{13}\right) = -1, \\ \left(\frac{-15}{29}\right) &= \left(\frac{14}{29}\right) = -1. \end{aligned}$$

Una vez hallamos el kernel de $\mathcal{R}$, vemos de manera inmediata que la forma principal $x^2 + xy + 4y^2$ representa al 4 y al 1, entonces

$$p = x^2 + xy + 4y^2 \text{ si y sólo si } p \equiv 1, 4 \pmod{15}.$$

Por otro lado, se tiene que $2x^2 + xy + 2y^2$ representa al 2 y al 8, así

$$p = 2x^2 + xy + 2y^2 \text{ si y sólo si } p \equiv 2, 8 \pmod{15}.$$

6. Primos de Fibonacci, Mersenne y Fermat

Las clases de números primos que tomaremos en consideración en este artículo y de los cuales veremos si algunos tienen la forma $p = x^2 + ny^2$ son clases de primos bastante conocidas, aunque eso sí, no se sabe si hay infinitos primos de cada clase.

Definición 6.1 (Sucesión de Fibonacci): La sucesión de Fibonacci se establece de manera recursiva como

$$F_0 = 0, F_1 = 1;$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ para } n \geq 2.$$

Por lo tanto, los primeros términos de la secuencia son

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

Definición 6.2 (Primos de Fibonacci): Un primo de Fibonacci es un número primo p que hace parte de la secuencia de Fibonacci, o sea, existe un índice $n \in \mathbb{N}$ tal que $F_n = p$, donde F_n es el n -ésimo término de la secuencia de Fibonacci.

Definición 6.3 (Primos de Mersenne): Un primo de Mersenne es un número primo de la forma $2^p - 1$ donde p es un número primo.

Definición 6.4 (Primos de Fermat): Un primo de Fermat es un número primo de la forma $2^{2^n} + 1$ con $n \in \mathbb{N}$.

Con algunos de los primos conocidos de cada clase de primos y por medio del software PARI/GP, veremos si algunos tienen la forma $p = x^2 + ny^2$, $n \in \mathbb{N}$, y para qué n .

7. Pruebas en PARI/GP

PARI/GP es un software matemático enfocado en la teoría de números y álgebra moderna. Para operaciones con números grandes involucrando álgebra moderna y teoría de números algebraica, proporciona un entorno de programación, para ver documentación de PARI/GP consúltase [Hea12]. Para abordar este problema se creará la función *forma_x2_ny2* que recibirá como parámetros el primo p del cual se quiere saber si tiene la forma $p = x^2 + ny^2$, así que el segundo parámetro será n . A continuación está el bloque de código de la función.

```
1 form_x2_ny2(p, n) = {
2   if (!isprime(p), return(0));
3   for (x = 0, sqrtint(p),
4     if ((p-x^2)%n==0,
5       y2 = (p - x^2)/n;
6       if (y2 >= 0 && issquare(y2),
7         y = sqrtint(y2);
8         if (gcd(x, y) == 1,
9           return([x, y])
10        )
11      );
12   );
13 }
```

```

14 return(0);
15 }

```

Cabe resaltar que hallaremos sólo las soluciones que estén dadas por enteros positivos, las demás soluciones enteras son análogas, sólo diferirán en algún signo. Nótese que la función anterior solo verifica un caso, o sea solo para un n específico. Es por ello que ahora vamos a crear la función *ciclo(p)*, el cual va a verificar por cada n , desde 1 hasta $p - 1$. No tomamos el caso trivial con $n = p$, ya que en dicho caso tiene la forma $x^2 + py^2$, con $x = 0$, $y = 1$, la cual es una solución que no nos interesa. De igual manera, no se toma el caso para $n > p$, ya que es evidente que en esos casos no hay solución alguna. La función está dada como

```

1 ciclo(p) = {
2   for (n = 1, p-1,
3     sol = form_x2_ny2(p, n);
4     if (sol,
5       print("El numero primo tiene la forma
6         x^2 + ", n, "y^2 con x, y = ", sol, " ");
7     );
8   );
9 }

```

Pruebas con primos de Fibonacci: Para $F_{13} = 233$ tenemos los siguientes resultados

El primo tiene la forma $x^2 + 1y^2$ con $x, y = [8, 13]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 2y^2$ con $x, y = [15, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 4y^2$ con $x, y = [13, 4]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 7y^2$ con $x, y = [11, 4]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 8y^2$ con $x, y = [15, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 13y^2$ con $x, y = [5, 4]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 14y^2$ con $x, y = [3, 4]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 16y^2$ con $x, y = [13, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 28y^2$ con $x, y = [11, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 37y^2$ con $x, y = [14, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 38y^2$ con $x, y = [9, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 46y^2$ con $x, y = [7, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 52y^2$ con $x, y = [5, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 56y^2$ con $x, y = [3, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 58y^2$ con $x, y = [1, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 64y^2$ con $x, y = [13, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 89y^2$ con $x, y = [12, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 112y^2$ con $x, y = [11, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 133y^2$ con $x, y = [10, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 152y^2$ con $x, y = [9, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 169y^2$ con $x, y = [8, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 184y^2$ con $x, y = [7, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 197y^2$ con $x, y = [6, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 208y^2$ con $x, y = [5, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 217y^2$ con $x, y = [4, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 224y^2$ con $x, y = [3, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 229y^2$ con $x, y = [2, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 232y^2$ con $x, y = [1, 1]$

Para $F_{11} = 89$ tenemos los siguientes resultados. Si se quiere consultar y hacer más pruebas con primos de Fibonacci, consúltase [Fib24].

El primo tiene la forma $x^2 + 1y^2$ con $x, y = [5, 8]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 2y^2$ con $x, y = [9, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 4y^2$ con $x, y = [5, 4]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 5y^2$ con $x, y = [3, 4]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 8y^2$ con $x, y = [9, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 10y^2$ con $x, y = [7, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 16y^2$ con $x, y = [5, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 20y^2$ con $x, y = [3, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 22y^2$ con $x, y = [1, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 25y^2$ con $x, y = [8, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 40y^2$ con $x, y = [7, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 53y^2$ con $x, y = [6, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 64y^2$ con $x, y = [5, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 73y^2$ con $x, y = [4, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 80y^2$ con $x, y = [3, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 85y^2$ con $x, y = [2, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 88y^2$ con $x, y = [1, 1]$

Pruebas con primos de Mersenne: Para $2^5 - 1 = 31$ tenemos los siguientes resultados

El primo tiene la forma $x^2 + 3y^2$ con $x, y = [2, 3]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 6y^2$ con $x, y = [5, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 15y^2$ con $x, y = [4, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 22y^2$ con $x, y = [3, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 27y^2$ con $x, y = [2, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 30y^2$ con $x, y = [1, 1]$

Para $2^7 - 1 = 127$ tenemos los siguientes resultados. Si se quiere consultar y hacer más pruebas con primos de Mersenne, consúltase [MR14].

El primo tiene la forma $x^2 + 3y^2$ con $x, y = [10, 3]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 6y^2$ con $x, y = [11, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 7y^2$ con $x, y = [8, 3]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 14y^2$ con $x, y = [1, 3]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 27y^2$ con $x, y = [10, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 46y^2$ con $x, y = [9, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 63y^2$ con $x, y = [8, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 78y^2$ con $x, y = [7, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 91y^2$ con $x, y = [6, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 102y^2$ con $x, y = [5, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 111y^2$ con $x, y = [4, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 118y^2$ con $x, y = [3, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 123y^2$ con $x, y = [2, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 126y^2$ con $x, y = [1, 1]$

Pruebas con primos de Fermat: Para $2^{2^2} + 1 = 17$ se tienen los resultados

El primo tiene la forma $x^2 + y^2$ con $x, y = [1, 4]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 2y^2$ con $x, y = [3, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 4y^2$ con $x, y = [1, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 8y^2$ con $x, y = [3, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 13y^2$ con $x, y = [2, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 16y^2$ con $x, y = [1, 1]$

Para $2^{2^3} + 1 = 257$ se tienen los resultados. Si se quiere consultar y hacer más pruebas con primos de Fermat, consúltase [Wei00].

El primo tiene la forma $x^2 + y^2$ con $x, y = [1, 16]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 2y^2$ con $x, y = [15, 4]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 4y^2$ con $x, y = [1, 8]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 8y^2$ con $x, y = [15, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 11y^2$ con $x, y = [9, 4]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 13y^2$ con $x, y = [7, 4]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 16y^2$ con $x, y = [1, 4]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 22y^2$ con $x, y = [13, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 32y^2$ con $x, y = [15, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 34y^2$ con $x, y = [11, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 44y^2$ con $x, y = [9, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 52y^2$ con $x, y = [7, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 58y^2$ con $x, y = [5, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 61y^2$ con $x, y = [14, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 62y^2$ con $x, y = [3, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 64y^2$ con $x, y = [1, 2]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 88y^2$ con $x, y = [13, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 113y^2$ con $x, y = [12, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 136y^2$ con $x, y = [11, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 157y^2$ con $x, y = [10, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 176y^2$ con $x, y = [9, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 193y^2$ con $x, y = [8, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 208y^2$ con $x, y = [7, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 221y^2$ con $x, y = [6, 1]$
 El primo tiene la forma $x^2 + 232y^2$ con $x, y = [5, 1]$

[MR14] Inc. Mersenne Research, *The great internet mersenne prime search* (GIMPS), 2014. Available at <https://www.mersenne.org/primes/>.

[Wei00] Eric W. Weisstein, *Fermat prime*, 2000. Available at <https://mathworld.wolfram.com/FermatPrime.html>.

8. Conclusiones

La teoría sobre los números primos de la forma $x^2 + ny^2$ con $n \in \mathbb{N}$ es una teoría profunda y bien cubierta. Vale la pena preguntarse qué puede pasar cuando se toma un $n \in \mathbb{Z}$, en este caso cómo afectaría las formas cuadráticas con determinante $D = -4n$ con $n < 0$, y si en este caso siguen habiendo finitas clases $h(D)$ de formas primitivas. Otra pregunta interesante es si para cualquier clase de primos, cualquier elemento $p > 3$ tendrá siempre la forma $x^2 + ny^2$ para algún n , exceptuando el caso trivial, el cual sucede con $n = p - 1$, donde $p = 1^2 + (p - 1) \cdot 1^2$.

La relevancia de estas preguntas reside en la relación estrecha entre los números primos y las formas cuadráticas, esenciales en la teoría de cuerpos cuadráticos. Abordar problemas relacionados con la representación de primos mediante formas $x^2 + ny^2$ podría ofrecer nuevas perspectivas a la criptografía y la teoría algebraica de números.

referencias-mario.

- [Cox89] David A. Cox, *Primes of the form $x^2 + ny^2$: Fermat, class field theory, and complex multiplication*, Third, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 1989. With contributions by Roger Lipsett.
- [Dum04] David S. Dummit, *Abstract algebra*, 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2004.
- [Hea12] PARI/GP Development Headquarters, *Pari/gp tutorials*, 2012. Available at <https://pari.math.u-bordeaux.fr/tutorials.html>.
- [Ire90] Kenneth Ireland, *A classical introduction to modern number theory*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 84, Springer-Verlag, New York, 1990.

Acerca del autor: Mario Andrés Medina Barrera es un estudiante de octavo semestre del programa de matemáticas en la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Le apasiona leer y ver películas del género drama, también le gusta escuchar música folk y metal en sus tiempos libres. Espera seguir sus estudios en matemática pura enfocado en teoría de números.

1. Resumen

Este escrito presenta las cónicas como curvas que pueden definirse de tres maneras equivalentes: mediante la intersección de un plano con un cono recto, como el conjunto de puntos cuya distancia a un foco y a una directriz mantiene una proporción constante (excentricidad) o como curvas algebraicas de grado dos. Se menciona que estas definiciones varían según el enfoque matemático y se introduce la relación de las cónicas con tres problemas clásicos: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo.

2. Introducción

Las cónicas se pueden definir como las curvas dadas por la intersección de un plano y un cono recto, o como el conjunto de puntos en el plano cuya distancia a un punto (foco) y a una recta fija (directriz) guardan una proporción (excentricidad), o como curvas algebraicas planas de grado dos. Todas estas definiciones son equivalentes y dependen del área de las matemáticas en la que se esté trabajando. A lo largo del texto se mostrará cómo ir de una definición a la otra, iniciando con los tres problemas clásicos a los que les debemos su origen. Los tres problemas clásicos son: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. En la siguiente sección (un poco de historia), exploraremos cómo las cónicas se relacionan con cada uno de estos problemas y su importancia en el desarrollo de la geometría y el álgebra.

Posteriormente, en cada sección se hablará de una definición de cónica, resaltando sus propiedades. La definición geométrica, basada en la intersección de un plano y un cono, proporciona una comprensión visual y tangible de su forma. La definición a través de la proporción entre las distancias al foco y la directriz introduce el concepto de excentricidad, esencial para clasificar las cónicas en elipses, parábolas e hipérbolas. Finalmente, la representación como curvas algebraicas de grado dos conecta a las cónicas con el álgebra, permitiendo su análisis mediante ecuaciones y su aplicación en diversos problemas matemáticos y físicos.

3. Un poco de historia

Las cónicas empezaron a ser estudiadas como herramienta en la búsqueda de la solución de algunos problemas en la antigüedad como: la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. Para la época que se formularon estos problemas, se buscaba una solución con regla y compás, por lo que debía ser una longitud, solución de alguna ecuación algebraica con coeficientes racionales.

El problema de la cuadratura del círculo, fue formulado por el matemático griego Anaxágoras (siglo V a.C.), quien intentó resolverlo mientras estaba en prisión. El problema consistía en encontrar un cuadrado con la misma área que un círculo dado. Este fue un desafío por más de dos mil años hasta que en 1882 Ferdinand von Lindemann demostró que el número π , que define la relación entre el perímetro de la circunferencia de radio unidad y su diámetro, es un número trascendente, es decir, no es solución de una ecuación algebraica. Por lo tanto, no es posible hallar dos números l (medida del lado del cuadrado) y r (radio de la circunferencia) tales que

$$\left(\frac{l}{r}\right)^2 = \pi.$$

El problema de la trisección del ángulo consistía en dividir un ángulo dado en tres partes iguales utilizando, únicamente, regla y compás. Pero en 1837, Pierre Wantzel demostró, usando la teoría de los números constructibles, que es imposible solucionarlo solo con regla y compás. Ya que involucra resolver una ecuación de grado 3, y requiere operaciones que no son constructibles¹.

Por último, pero no menos importante, el problema de la duplicación del cubo, consiste en dado un cubo con volumen inicial $V_1 = l^3$ (con l la longitud del lado del cubo), se debe construir un nuevo cubo con el doble del volumen $V_2 = 2l^3$, usando únicamente regla y compás. La leyenda indica que en Atenas, Grecia, aproximadamente en 430 a.C., cuando la peste angustiaba a la población, los atenienses con miedo a morir, visitaron el Oráculo de Apolo para pedir que la peste terminara. El Oráculo, a las súplicas de la población, respondió que era necesario duplicar el volumen del altar cúbico dedicado a Apolo con el propósito de brindarle ofrendas

¹Los números constructibles son aquellos que pueden obtenerse a partir de números racionales mediante una serie finita de operaciones con regla y compás (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracciones de raíces cuadradas).

*Universidad Nacional Autónoma de México.

mayores. En su momento, los atenienses no consiguieron resolver el problema, y la peste continuó.

Aunque al igual que en el caso de la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo, el problema de la duplicación del cubo es imposible de resolver utilizando solo una regla y un compás, ya que se debe resolver la siguiente ecuación en términos constructibles

$$l_1^3 = 2l_2^3 \iff \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3 = 2,$$

donde l_1 es la longitud del lado para el volumen V_1 , y l_2 es la longitud del lado para el volumen V_2 . Pero los hallazgos en el camino hacia la duplicación del cubo son los objetos matemáticos de importancia en este texto.

Casi cien años después de la leyenda sobre el Oráculo de Apolo, Menecmo (380-320 a.C) usó el cono recto de una hoja², con el objeto de solucionar el problema y obtuvo, al intersecarlo con un plano, la parábola, la elipse y la hipérbola, conocidas también como la tríada de Menecmo. También, Hipócrates de Quíos determinó que este problema es equivalente a encontrar dos segmentos de longitudes x y y que satisfacen la proporción:

$$\begin{aligned} \frac{l_1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2l_1} &\iff x^2 = l_1 y \iff y^2 = 2l_1 x \iff y^3 = 2x^3, \\ xy &= 2l_1^2 \end{aligned}$$

donde l_1 es un segmento de línea dado, y y es el lado de un cubo que tiene el doble del volumen del cubo de lado l_1 . En otras palabras, dado un segmento de longitud l_1 , al aumentar su tamaño en 2, el volumen V_2 del nuevo cubo, con lado y , aumenta en progresión geométrica ($V_2, 8V_2, 64V_2, \dots$), lo que nos lleva a buscar la media geométrica entre l_1 y $2l_1$. Este proceso se conoce como reducción de Hipócrates, y equivale a encontrar la intersección de dos parábolas y una hipérbola (ver Figura 1).

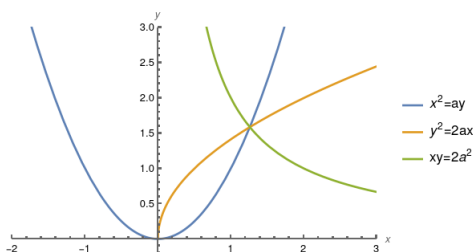


Figura 1: Solución de la duplicación del cubo.

²El cono recto de una hoja es un sólido de revolución que se genera al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. El círculo que se forma con el otro cateto se llama base, el eje de rotación se llama eje o altura, la unión de segmentos formados al rotar la hipotenusa se llaman generatrices, y el punto de intersección de todas las generatrices se llama vértice (Ver Figura 2).

Luego, Apolonio de Perga (260-190 a.C.) creó el cono que lleva su nombre, el cual facilitó la visión de las distintas secciones cónicas (ver Figura 2). Demostró que no se necesitan distintos conos, sino que cada cónica depende de la inclinación del plano que interseca. Les puso el nombre que actualmente conocemos, y estudió sus propiedades geométricas independientes del cono, definiéndolas como objetos geométricos.

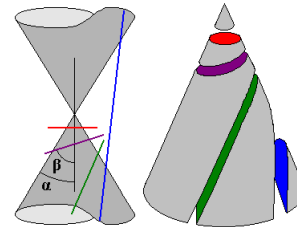


Figura 2: Cono de Apolonio.

4. Las cónicas como secciones de un cono

Las cónicas o secciones cónicas, son la familia de objetos que se obtienen al intersecar un cono recto de dos hojas con un plano. Este proceso depende de la inclinación del plano y su ubicación respecto al cono. Dichas familias son: las elipses, los círculos³, las parábolas, las hipérbolas, dos rectas secantes o una recta doble, y el punto⁴.

Iniciamos por las cuatro primeras familias, que conforman un conjunto denominado cónicas no degeneradas. Si el plano corta el cono de manera paralela a su base y está ubicado en alguna hoja, entonces se forma un círculo. Cuando el plano está ligeramente inclinado, pero no lo suficiente como para ser paralelo a las generatrices del cono, se obtiene una elipse. Si el plano es paralelo a una generatriz del cono, pero no pasa por el vértice del cono, entonces de la intersección resulta una parábola. Y, si el plano corta ambas hojas del cono sin pasar por su vértice, se forma una hipérbola (ver Figura 3 (a)-(c)).

Las últimas tres familias se conocen como cónicas degeneradas, debido a que presentan un caso límite o especial en el que una estructura matemática pierde algunas de sus propiedades o características esenciales. El punto se obtiene de la intersección del vértice del cono con un plano. El par de líneas que se cruzan se obtiene al intersecar el cono con un plano que corta a ambas hojas y pasa por su vértice. Finalmente, las líneas dobles son el resultado de intersecar al cono con un plano paralelo a dos generatrices y que pasa por el vértice.

³bajo otras definiciones de cónicas se verá que es un caso particular de las elipses, donde los focos son iguales, lo que implica que los semiejes también sean iguales (el radio), y se pide que sean distintos de cero.

⁴Caso en el que el radio es cero.

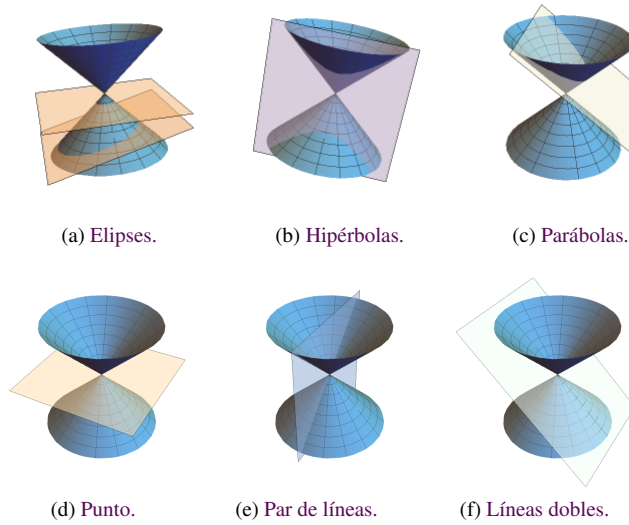


Figura 3: Secciones cónicas como la intersección de un plano y un cono circular de dos hojas. Las figuras (d) a (f) se conocen como cónicas degeneradas.

5. Las cónicas como un lugar geométrico

Las cónicas no degeneradas se definen también como el conjunto de puntos en el plano tal que la directriz $y = -\rho$ (con ρ constante), el foco O y la excentricidad e cumplen la relación

$$e = \frac{|Ox|}{|xQ|},$$

donde x es un punto en el plano, y Q es la intersección de la perpendicular que pasa por x a la directriz. Entonces, tenemos que:

- La parábola es el conjunto

$$\{(x, y) \mid x^2 = 2\rho y \wedge e = 1\} \cup \{(x, y) \mid y^2 = 2\rho x \wedge e = 1\}.$$

- La elipse es el conjunto

$$\{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \wedge e < 1\},$$

donde a y b dependen de e .

- La hipérbola es el conjunto

$$\{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \wedge e > 1\},$$

donde a y b dependen de e .

Para las cónicas degeneradas ρ tiende a infinito y a, b tienden a cero, obteniendo la recta, el punto y las rectas secantes, respectivamente.

6. Las cónicas como curvas algebraicas.

Dado el polinomio de segundo grado

$$P: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que

$$P(x, y) = ax^2 + bxy + c^2y + dx + ey + f,$$

con coeficientes reales. Una *curva algebraica* es el conjunto de puntos dados por $P(x, y) = k$, con k una constante.

Las cónicas se definen como el conjunto de curvas algebraicas dadas por

$$C = \{(x, y) \mid P(x, y) = 0 \wedge (a, b, c) \neq (0, 0, 0)\}. \quad (1)$$

Para estudiar los elementos en C se aplican ciertos cambios de coordenadas que permitan estudiarlos desde otro punto de vista, tal que al recibir un conjunto de puntos en C correspondientes a una curva algebraica se pueda decidir muy rápidamente cuál cónica es, de acuerdo a las definiciones presentadas en las secciones anteriores. Para ello, se definirán un conjunto de isometrías que simplifiquen a $P(x, y) = 0$ y representen las mismas curvas.

Iniciemos por definir la traslación

$$T: \mathbb{R}_{x,y}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{\bar{x},\bar{y}}^2$$

tal que $T(x, y) = (\bar{x} - h, \bar{y} - k)$ con $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, lo cual es equivalente a decir que $4ac - b^2 \neq 0$, haciendo $d = e = 0$.

Ahora, tenemos un nuevo conjunto

$$\bar{C} := \{\bar{a}x^2 + \bar{b}xy + \bar{c}y^2 + \bar{f} = 0\},$$

cuyos coeficientes vienen dados por a, b, c ; y a cada elemento es posible asociarle una forma bilineal

$$X^T A X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \frac{\bar{b}}{2} \\ \frac{\bar{b}}{2} & \bar{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Luego, definamos una rotación

$$R_\theta: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

tal que

$$X^T (R_\theta)^{-1} A R_\theta X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ambos no cero.

El resultado es el conjunto

$$\tilde{C} := \{\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \tilde{f} = 0\}.$$

Y podemos concluir que los tres conjuntos anteriores cumplen que

$$C = \bar{C} = \tilde{C}$$

y sus elementos se pueden expresar como secciones de un cono.

Observación: Como caso particular, para la parábola, en la transformación anterior se obtiene que $4ac - b^2 = 0$, luego no existen h y k . Para solucionar dicho inconveniente, proponemos una transformación en la que, o bien $d = 0$, o bien $e = 0$, y está dada como

$$\bar{T} : \mathbb{R}_{x,y}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{\bar{x},\bar{y}}^2$$

tal que $\bar{T}(x,y) = (\bar{x} - h, \bar{y})$ con $(h, 0) \in \mathbb{R}^2$.

7. Las cónicas como variedad diferencial.

En la sección anterior vimos que cada cónica esta determinada principalmente por los coeficientes λ_1 y λ_2 . Entonces, podemos tomar el polinomio con el cual iniciamos la sección anterior $P(x,y)$, y con sus coeficientes definir el conjunto

$$M = \{(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6 - (\{a=0\} \cap \{b=0\} \cap \{c=0\})\},$$

donde descartamos a los polinomios lineales

$$Pl(x,y) = dx + ey + f.$$

Proposición 1: El conjunto M es una *variedad diferenciable*.

Para poder demostrar esto, recordaremos que si M es variedad diferenciable debe cumplir lo siguiente:

- 1 Existe τ una topología de M tal que (τ, M) es un espacio topológico Hausdorff⁵.
- 2 Existe un conjunto de abiertos $\{U_i\}$ en τ numerable tal que su unión contiene a M .
- 3 Existe una colección de cartas (funciones de abiertos en M a abiertos de $\mathbb{R}^n$, para nuestro caso $n = 3$) tal que sus composiciones o cambios de coordenadas (funciones de abiertos de $\mathbb{R}^3$ a abiertos de $\mathbb{R}^3$) son diferenciables con inversa diferenciable (difeomorfismos).

Pero probar esto no siempre es una tarea sencilla, por esa razón partiremos del hecho de que

los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^m$, con $m \in \mathbb{Z}$, son variedades diferenciables,

⁵Un espacio topológico se dice que es Hausdorff si para cualesquiera dos puntos distintos en él, existen dos abiertos contenidos en el espacio topológico, que son disjuntos.

es decir, debemos probar que $M \subset \mathbb{R}^6$ es abierto.

Tomamos un punto $p_0 = (a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0) \in M$ arbitrario y un abierto $U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 : 0 < |\mathbf{x} - p_0| < r\}$, alrededor del punto donde $r = \sqrt{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2}$ corresponde a la distancia euclídea del punto p_0 al conjunto $\{\mathbf{x} = (0, 0, 0, d, e, f)\}$. Entonces, la manera en la que está propuesto r garantiza que, $U \subset M$. Por lo tanto, M es abierto, y en consecuencia, es una variedad diferenciable.

Proposición 2: Dado el conjunto

$$\tilde{C} := \{\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \tilde{f} = 0\},$$

son verdaderas las siguientes afirmaciones:

1. El subconjunto de $\tilde{C}$ tal que $\lambda_1 \lambda_2 > 0^6$ es abierto en M ,
2. el subconjunto de $\tilde{C}$ tal que $\lambda_1 \lambda_2 < 0^7$ es abierto en M ,
3. y el subconjunto de $\tilde{C}$ tal que $\lambda_1 \lambda_2 = 0^8$ no es abierto en M .

Para probar esto procederemos de manera análoga a lo hecho en la sección anterior. Definamos

$$\tilde{P} = P \circ R_\theta \circ T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que la topología de $\{\tilde{P}^{-1}(f)\}$ y $\tilde{C}$ coincidan. En otras palabras, el estudio de M se reduce al estudio de $\{\tilde{P}^{-1}(f)\}$ donde es posible determinar cinco topologías para $\tilde{C}$ dependiendo de $\tilde{f}$ para cada caso de $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.

Primero, consideremos $\lambda_1 \lambda_2 > 0$. La superficie S dada por la gráfica de $\tilde{P}$ corresponde con el paraboloide elíptico (ver Figura 4), donde:

- Si $\tilde{f} = 0$ entonces las cónicas estarán dadas por la intersección del plano xy con S en su mínimo, entonces $\tilde{C}_0 = \{(x_0, y_0, 0)\} \subset \tilde{C}$.
- Si $\tilde{f} > 0$ entonces las cónicas estarán dadas por la intersección del plano $\{x + y = kz \mid k < 0\}$ con S . Dicha intersección se llamará $\tilde{C}_1$ y es el conjunto vacío. Entonces, $\tilde{C}_1 \subset \tilde{C}$.
- Si $\tilde{f} < 0$ entonces las cónicas estarán dadas por la intersección del plano $\{x + y = kz \mid k > 0\}$ con S . Dicha intersección se llamará $\tilde{C}_2$ y es el conjunto de elipses. Entonces, $\tilde{C}_2 \subset \tilde{C}$.

Ahora, consideremos el abierto dado por $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. La superficie S dada por la gráfica de $\tilde{P}$ es el paraboloide hiperbólico (ver Figura 5), donde:

⁶Los elementos de este conjunto son: los elipses, los círculos, el punto y el vacío. Estos últimos, dependiendo del valor de $\tilde{f}$.

⁷Los elementos de este conjunto son: las hipérbolas y las rectas secantes. Estas últimas dependen del valor de $\tilde{f}$.

⁸Los elementos de este conjunto son: las parábolas.

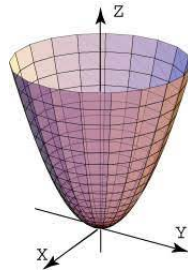


Figura 4: Paraboloide elíptico.

- Si $\tilde{f} = 0$ entonces las cónicas estarán dadas por la intersección del plano xy con S pasando por el punto silla. Dicha intersección se llamará $\tilde{C}_3$ y es el conjunto de rectas secantes. Entonces $\tilde{C}_3 \subset \tilde{C}$.
- Si $\tilde{f} \neq 0$ entonces las cónicas estarán dadas por la intersección del plano $\{x + y = kz\}$, con k constante, con S . Dicha intersección se llamará $\tilde{C}_4$ y es el conjunto de hipérbolas. Entonces $\tilde{C}_4 \subset \tilde{C}$.

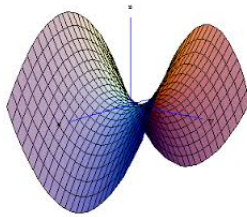


Figura 5: Paraboloide hiperbólico.

Finalmente, recordemos que para $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ el subconjunto no es abierto, pero hay dos familias de cónicas pertenecientes a este. Cuando λ_1 o λ_2 , alguna es cero, se tiene la familia de parábolas, y cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, se tiene la familia de rectas dobles. Esta última, junto con $\tilde{C}_0$ y $\tilde{C}_2$ corresponden a las denominadas cónicas degeneradas (ver Figura 3 (d–f)).

8. Conclusión

Las cónicas son objetos matemáticos que se pueden estudiar desde diversas perspectivas. Geométricamente, se definen como las curvas obtenidas al intersecar un plano con un cono recto. Este enfoque resalta su naturaleza visual y tangible, conectándolas con conceptos fundamentales de la geometría clásica. En el ámbito algebraico, las cónicas se describen como curvas de grado dos, definidas por ecuaciones polinomiales cuadráticas. Estas representaciones permiten un análisis más abstracto mediante transformaciones geométricas, facilitando su identificación y clasificación. Y conecta a las cónicas con el álgebra lineal y la teoría de matrices. Característica útil para solucionar problemas donde intervienen herramientas computacionales. Y al estudiar las cónicas mediante el conjunto de sus coeficientes, conecta a las cónicas

con estructuras matemáticas avanzadas, como la topología y la geometría diferencial, destacando su clasificación en función de las relaciones entre los coeficientes, características propias de un espacio topológico y las propiedades algebraicas de sus ecuaciones. Este análisis revela que las cónicas no solo son figuras geométricas, sino también objetos diferenciables clave en el estudio de propiedades intrínsecas de curvas y superficies.

Agradecimientos

Desearía expresar mi gratitud a mi asesor, el Dr. Jesús Muñiño, docente e investigador del Centro de Ciencias Matemáticas de la UNAM, quien me presentó el tema durante la clase de Topología Diferencial y, bajo su supervisión, lo estudié y aclaré cualquier duda que se planteó. Además, me brindó su opinión y sugerencias sobre el artículo.

Referencias.

- [ACdAT20] Manuel de León Agustín Carrillo de Albornoz Torres, *Cónicas: Historia de su independencia del cono*, Catarata, 2020.
- [LEMG02] Laura Elena Morales Guerrero, *La cuadratura del círculo y otros problemas de geometría*, Ciencias **Enero-Marzo** (2002), no. 65, ISSN (Versión impresa): 0187-6376.
- [Lov71] Anthony R. Lovaglia and Preston, *Modern analytic geometry*, New York, Harper & Row, 1971.
- [Sha11] A. R. Shastri, *Elements of differential topology*, CRC Press, 2011.
- [Spi99] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Perish, INC., 1999.

Acerca del autor: Matemática egresada de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Maestra en Matemática aplicada y física matemática, egresada de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí en México. Actualmente, estudiante del doctorado en ciencias matemáticas en el Centro de Ciencias Matemáticas en la UNAM. Alejandra disfruta de jugar tenis, montar bicicleta, leer libros y estar en casa. También, espera en el algún momento poder disfrutar de un lugar desconectado del mundo, rodeado de naturaleza, donde sea posible hacer todos sus hobbies de manera cotidiana.

ESTIMACIÓN DE UN MODELO DE ECUACIONES ESTRUCTURALES PARA INFORMALIDAD LABORAL

Mariam Pinto Heydler y César Augusto Lara Santana *

mariam.pintoh@konradlorenz.edu.co, cesara.laras@konradlorenz.edu.co

Resumen

La modelación de variables y fenómenos con un alto nivel de abstracción e inmaterialidad exige aplicar métodos matemáticos y estadísticos innovadores. Dentro de la Economía, el concepto de informalidad laboral es un ejemplo de variables que presentan dificultad para su medición adecuada, dado que corresponde a un concepto intangible que depende de múltiples opciones de medición y en consecuencia, su modelamiento se hace sensible a riesgos de sesgo por definición y recolección. Para subsanarlo, se propone el empleo de un Modelo de Ecuaciones Estructurales (MEE) (del inglés: Structural Equation Model) con el fin de identificar sus relaciones con otras variables de tipo social y económico, haciendo uso de microdatos recolectados mediante operaciones muestrales oficiales de Colombia.

1. Introducción

Este trabajo ilustra los resultados de la estimación mediante un modelo que permite comprender el comportamiento de la informalidad laboral bajo un enfoque multivariado haciendo uso de microdatos medidos a nivel de núcleo familiar. En primera instancia, se abordan tanto la conceptualización propia de los términos económicos a modelar como igualmente los objetos matemáticos necesarios para desarrollar la investigación.

En un segundo apartado, se profundizará en la metodología estadística de tratamiento de datos necesarios para este estudio, correspondiente a las tablas relacionadas con informalidad laboral establecidas en la Gran Encuesta Integrada de Hogares (GEIH) del Departamento Administrativo Nacional de Estadística de Colombia (DANE).

La parte central del documento corresponde a la estimación de un SEM que permita identificar el comportamiento de la

variable objetivo *Informalidad Laboral* en función de la interacción de múltiples variables exógenas, todas ellas medidas a un nivel de granularidad de unidad familiar.

El documento concluye con la comparación de las diferentes medidas estadísticas de bondad de ajuste con el fin de validar la consistencia de la estimación. Cabe anotar que el proceso de tratamiento de datos y modelación se realizan con los paquetes *TSA*, *lavaan*, *astsa* y *xts* del lenguaje R. El código de lenguaje se encontrará disponible en el repositorio de trabajo colaborativo <https://posit.cloud/content/6974116>

Es importante resaltar que para el entendimiento pleno del artículo, se sugiere tener dominio en los conceptos de Probabilidad, Estadística Matemática, Álgebra Lineal y Métodos de Regresión.

2. Antecedentes

El modelamiento de algunas variables tiene un atributo común entre diferentes áreas del conocimiento, la cual consiste en tener como objetos de estudio, variables que no pueden ser observadas de manera precisa. Por ejemplo, en las ciencias comportamentales, medir la *inteligencia humana* no puede hacerse de manera precisa pues no es un valor que se obtiene mediante un instrumento físico tangible. Por el contrario, se requiere un diseño metodológico incluso para medirlo (definir el método de medición, construir un indicador numérico, elaborar una herramienta de medición -encuesta-, controlar el estado de ánimo del encuestado, etc). Así, diferentes escuelas académicas podrán definir cuantas variables o indicadores de inteligencia, todas igualmente válidas a pesar que no existe medición física exacta para la inteligencia.

Para ello, en la estadística aplicada se hace referencia al concepto de **variable latente**, la cual no es directamente observable mediante medios físicos exactos del entorno de estudio[PS15] y por tanto su medición puede presentar múltiples elementos de imprecisión en su medición, dejando abierto el riesgo de usar valores con alto grado de imprecisión, heterogeneidad e incompatibilidad.

Esto difiere al concepto de **variable observada**, cuya medición puede obtenerse de forma exacta a través de la

*Doctora en Ciencias Economicas Universidad Nacional Colombia e Investigadora - Grupo de Análisis de Bienestar - Facultad de Ciencias Economicas, Universidad Nacional de Colombia.
Matemático - Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Economista - Universidad Nacional de Colombia.

observación y experimentación para obtener mediciones directas. Los valores obtenidos pueden tomar valores discretos o continuos [LAZ10] los cuales pueden ser modelados mediante una distribución de probabilidad. También es conocida en las disciplinas sociales como *constructo*.

Como ejemplo puntual se puede mencionar el concepto clínico de *presión arterial* en el marco de una prueba de poligrafía. Para obtener un valor exacto de este indicador, se emplea un instrumento médico llamado *tensiómetro*, cuya escala de medición es el “mmHg”¹. Es decir, la medición de una variable de carácter clínico, en su mayoría, es realizada con instrumentos universalmente aceptados, cuyo uso está parametrizado y controlado, de tal forma que la medición de la variable sea un valor que minimiza problemas de imprecisión o incluso, la ausencia de datos.

Definición 2.1 (Informalidad Laboral). Es una variable latente que busca medir la inmersión al mercado laboral dentro del marco regulatorio definido para la vinculación de personas en condición de trabajar. De acuerdo a las definiciones de [DANdE23a] y [OIpeT22], una persona ocupada (vinculada en alguna actividad económica) se considera en situación de informalidad laboral si se satisface al menos uno de los siguientes criterios: 1) no se encuentra vinculada al sistema de seguridad social en calidad de aportante (es subsidiado), 2) la unidad productiva donde trabaja no cuenta con registros contables formales o 3) la unidad productiva donde trabaja no cuenta con registro mercantil ante una cámara de comercio.

3. Objetos matemáticos

A continuación se definirán los principales conceptos matemáticos necesarios para abordar el modelamiento mediante MEE:

Definición 3.1 (Modelo de Ecuaciones Estructurales - MEE²). Es un conjunto compuesto por m ecuaciones y k variables, cuyo objetivo es identificar el grado de relación entre subconjuntos de estas variables dependiendo de su clasificación por tipo de medición (variables latentes vs. variables observadas) o por origen de la variable (exógena vs. endógena)³, dependiendo de la especificación funcional del modelo. [JMIL21].

Por ejemplo, para un modelo que predice *nivel de estrés* de una persona (variable latente endógena) se puede construir in

MEE usando múltiples mediciones bioquímicas y electrónicas (variables observadas exógenas). No obstante, la misma variable *nivel de estrés* puede ser usada en otro MEE atendiendo otro tipo de investigación como una variable latente exógena. Tal es el caso de los modelos utilizados en psicología que buscan medir el grado de riesgo psico-social en un entorno laboral.

Para efectos del presente artículo, las variables latentes consideradas en el modelo serán tratadas como endógenas y las variables observadas como exógenas.

Los siete componentes que brindan la especificación funcional de un MEE son los siguientes:

- $i = 1, 2, \dots, m$ ecuaciones.
- $j = 1, 2, \dots, k$ variables
- ξ_i, η_i : variable latente definida en la i -ésima ecuación.
- $x_i, y_i, \dots$: variable observable o variable indicadora definida en la i -ésima ecuación.
- β_{ij} : parámetro de la ecuación estructural que mide el cambio de la j -ésima variable latente sobre la variable endógena (latente u observable) en la i -ésima ecuación.
- δ_{ij} : parámetro de la ecuación estructural que mide el cambio de una variable exógena (observable) sobre una variable endógena (latente u observable) en la i -ésima ecuación.
- ζ_i : componente aleatorio de la ecuación.

Por ejemplo, al hacer una adaptación a la representación de [KB89], se puede plantear el siguiente MEE: Consideremos que nos interesa modelar el nivel de consolidación democrática (η_t) de un país en 1960 y 1965 $\{t_1 = 1960, t_2 = 1965\}$, la cual será la variable objetivo en función de la variable observable llamada *Producto Interno Bruto - PIB* (x_t). A su vez, nos interesa ver si otra variable latente (nivel de industrialización de una economía) definida como ξ_t tiene incidencia sobre el nivel de estabilidad democrática en t , es decir en η_1, η_2 .

Por lo anterior, el MEE con variables latentes para este ejemplo se podría modelar mediante las siguientes ecuaciones:

$$\eta_1 = \delta_{11}\xi_1 + \zeta_1, \quad (1)$$

$$\eta_2 = \delta_{21}\eta_1 + \beta_{22}x_2 + \zeta_2, \quad (2)$$

donde $\eta_1 :=$ nivel de estabilidad democrática en 1960, $\xi_1 :=$ nivel de industrialización en 1960, $\eta_2 :=$ nivel de estabilidad democrática en 1965, $\zeta_1, \zeta_2 :=$ efectos aleatorios de las ecuaciones (1) y (2), respectivamente. En otras palabras, este modelo busca validar si el nivel de estabilidad de la economía en 1965 depende no solo de sus condiciones de industrialización e ingreso ese mismo año, sino también el efecto intertemporal de la estabilidad democrática estimada en 1960.

Para facilitar la comprensión del modelo, se puede representar la interacción entre las variables mediante un diagrama de trayectorias como se ilustra en la figura 1:

¹(mmHg: milímetros de mercurio: es la unidad de medida correspondiente a los tensiómetros que significa la altura alcanzada por una muestra de mercurio contenida en un tubo presurizado luego de haberse impreso fuerza en un extremo. Es la medida aceptada a nivel mundial para medir la presión arterial)

²Este concepto podría encontrarse en la literatura estadística como Modelo o Sistema de Ecuaciones Estructurales. Como ejemplo, se recomienda ver [MTEPea16]

³(Exógeno: indica que es una variable (observable o latente) η_i que no está definida dentro del modelo, es decir, no tiene otras variables que expliquen su comportamiento. Análogamente, una variable endógena (observable o latente) ξ_i corresponde a una variable que tiene al menos una variable dentro del modelo que tiene una relación causal sobre ella, es decir puede expresarse de la forma $\xi_i = f(\eta_i, x_i)$.

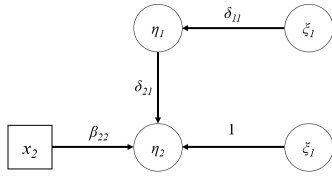


Figura 1: Ejemplo de Diagrama de Trayectoria

Definición 3.2 (Matriz de Covarianzas). Corresponde al conjunto finito de $(k \times k)$ varianzas y covarianzas de las variables consideradas en el modelo. Se denota como Σ a la matriz de varianzas de la población, S la matriz muestral y $\Sigma(\theta)$ a la matriz de covarianzas estimada en el modelo. La estimación de la matriz de varianzas depende de los parámetros θ , los cuales se obtienen mediante la inferencia estadística usando los estimadores muestrales $\{\beta, \delta, \xi\}$.

Por ejemplo, consideremos el siguiente vector de variables $y = (y_1, y_2, y_3)$. Entonces, haciendo uso de la notación de [MG08], la matriz de varianzas y covarianzas se representa como

$$\Sigma = E(y'y) = \begin{bmatrix} \sigma^2(y_1) & \sigma(y_1, y_2) & \sigma(y_1, y_3) \\ \sigma(y_2, y_1) & \sigma^2(y_2) & \sigma(y_2, y_3) \\ \sigma(y_3, y_1) & \sigma(y_3, y_2) & \sigma^2(y_3) \end{bmatrix},$$

donde $\sigma^2(y_i)$ es la varianza de cada variable y $\sigma(y_i, y_j)$ con $j \neq i, \forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}$ representa la covarianza entre ambas variables. Sean ϵ_1, ϵ_2 dos vectores aleatorios con $E(\epsilon_1), E(\epsilon_2) = 0$, $var(\epsilon_1) = \sigma^2(\epsilon_1); var(\epsilon_2) = \sigma^2(\epsilon_2), \sigma^2(\epsilon_1), \sigma^2(\epsilon_2) \in \mathbb{R}$, podemos plantear el siguiente MEE:

$$y_2 = \beta_1 y_1 + \epsilon_2, \quad (3)$$

$$y_3 = \beta_2 y_1 + \epsilon_3. \quad (4)$$

En particular, la estimación de la matriz S para el modelo en (3) y (4) puede sintetizarse como:

$$S = \begin{bmatrix} \sigma^2(y_1) & \beta_1^2 \sigma^2(y_1) + \sigma^2(\epsilon_2) & \beta_2^2 \sigma^2(y_1) + \sigma^2(\epsilon_3) \\ \beta_1 \sigma^2(y_1) & \beta_1 \beta_2 \sigma^2(y_1) & \beta_1 \sigma^2(y_1) + \sigma^2(\epsilon_2) \\ \beta_2 \sigma^2(y_1) & \beta_1 \sigma^2(y_1) + \sigma^2(\epsilon_2) & \beta_2 \sigma^2(y_1) + \sigma^2(\epsilon_3) \end{bmatrix}$$

Definición 3.3 (Diagrama de Trayectoria). Es una representación gráfica que busca modelar los elementos constitutivos de una ecuación estructural y las posibles relaciones entre las variables latentes y observables [KB89]. Los componentes primarios de este diagrama tienen una correspondencia con lo definido en [LCS20] (ver la Figura 2):

- Triángulo: constante del sistema de ecuaciones.
- Rectángulo: variable observable o $x_i, y_i, \dots$
- Ovoide: variable latente o ξ_i, η_i .
- Círculo: componente aleatorio o ζ_i .

Símbolo	Significado
$\triangle$	Constante
$\square$	Variable observada
η	Variable latente
ζ	Término aleatorio
$\zeta \curvearrowright \zeta$	Asociación no causal (covarianza)
$\eta \rightarrow x \rightarrow \zeta$	El sentido de la flecha recta indican la relación causal hacia una variable
$x \rightleftarrows \eta$	Dos flechas rectas indican causación recíproca

Figura 2: Componentes de un Sistema de Ecuaciones Estructurales-MEE

- Flecha recta: relación de causalidad desde una variable a otra.
- Flecha curva: covarianza entre dos componentes del MEE.

Definición 3.4 (Función de Máxima Verosimilitud.). Ecuación que permite maximizar la probabilidad de estimar los coeficientes asociados a un modelo de ecuaciones estructurales basado a una muestra específica. De acuerdo con [KSEaHM03], esta función se puede estimar como:

$$\log L = -\frac{1}{2}(n-1) \{ \log |\Sigma(\theta)| + \text{tr} [\Sigma(\theta)^{-1}] \} + c, \quad (5)$$

donde L es la función de verosimilitud, n el tamaño de la muestra, θ es el vector de parámetros a estimar en el modelo, $\Sigma(\theta)$ es la matriz de covarianzas estimada a partir del modelo, S la matriz de covarianzas obtenida de la muestra, tr es la traza de la matriz y $c \in \mathbb{R}$ una constante producto de la transformación logaritmo a la función L inicial.

Aplicando múltiples operaciones algebraicas para simplificar la ecuación (5)⁴, se puede obtener el máximo valor posible de la función anterior respecto a la variable θ mediante la siguiente función:

$$F_{ML} = \log |\Sigma(\theta)| - \log |S| + \text{tr} [\Sigma(\theta)^{-1}] - (p+q) \quad (6)$$

donde p es el número de variables exógenas y q el número de variables endógenas [JL21].

Definición 3.5 (Medidas de bondad de ajuste). Los MEE hacen parte de los métodos de modelamiento estadístico que permiten estimar un valor esperado sobre las variables objetivo del modelo, con lo cual se puede establecer el grado de precisión del modelo.

Esta eficacia de los modelos de ecuaciones estructurales se miden con varios indicadores que, en esencia, parten del mismo estimador estadístico conocido como el estimador de la

⁴Para mayor detalle del proceso de simplificación algebraica para derivar la Función de Verosimilitud inicial, se recomienda referirse al artículo de Sik-Yum Lee, Xin-Yuan Song, John C. K. Lee en [SYLea03]

prueba *Chi-Cuadrado*. Como se expresa en [Frankfurt], este estadístico se puede estimar con la siguiente ecuación:

$$\chi^2(df) = (N - 1)F[\mathbf{S}, \Sigma(\hat{\theta})], \quad (7)$$

donde $df = s - t$ son los grados de libertad del modelo, s es el número de vectores no redundantes o no repetidos en $\mathbf{S}$ y t número de parámetros total a ser estimado. Por construcción del estimador $\chi^2(df)$, la hipótesis nula de la prueba hipótesis sobre la bondad de ajuste del modelo corresponde a que la diferencia entre las entradas de la matriz de covarianzas estimada por el modelo $\Sigma(\hat{\theta})$ respecto a la poblacional Σ es estadísticamente cero. Como se referencia en [RHH23], valores altos de este estadístico implica un mal ajuste del modelo.

Es importante aclarar que las medidas de bondad de ajuste para un MEE tomando como referencia el concepto de *modelo base*, el cual consiste a un modelo donde no se contemplan covarianzas o trayectorias de casualidad entre las variable, y en consecuencia, no hay variables endógenas. Lo único que se modela es la varianza de cada variable, de la cual se obtiene una matriz de covarianza muestral $\mathbf{S}$ de referencia.

Tomando en cuenta el valor de la prueba chi-cuadrado, a continuación se enuncian algunos de los principales estadísticos de prueba utilizados para determinar el ajuste del modelo:

- **RMSEA** (*Root Mean Square Error of Aproximation-Raíz Cuadrada del Error de Aproximación.*) Este estadístico de prueba mide en términos absolutos la bondad de ajuste del modelo. La ventaja de este indicador consiste en que reduce la escala de la ecuación (6). Basado en [YXaYY19], el RMSEA puede estimarse con la siguiente ecuación:

$$RMSEA = \sqrt{\frac{\chi_b}{df(N - 1)}}. \quad (8)$$

Es inmediato considerar que al ser un transformación monótona del estadístico de prueba χ_b con la función raíz cuadrada, a menores valores de RMSEA mejor bondad de ajuste del modelo.

- **CFI** (*Comparative Fit Index - Índice comparativo de Ajuste*): Este índice compara la diferencia entre la especificación del modelo establecida en el modelamiento versus el modelo base, a través del siguiente cociente:

$$CFI = \frac{\chi_b - \chi_m}{\chi_b}. \quad (9)$$

Como esta es la estimación de un cambio relativo respecto al modelo base, este coeficiente oscila en el intervalo $[0, 1]$. Adicionalmente, a diferencia del estadístico de prueba $\chi^2(df)$, un CFI alto o se interpreta como un buen ajuste.

- **Índice Tucker Lewis (TLI) o Índice de Ajuste No-Normalizado (NNFI)**. Al igual que el CFI, corresponde a una medida de bondad de ajuste incremental en la que

se puede ver que tanto mejora la especificación del modelo respecto al modelo nulo. Su ecuación es la siguiente [SCaIE15]:

$$TLI = \frac{(\chi_b^2/v_b) - (\chi_t^2/v_t)}{(\chi_b^2/v_b) - 1} = \frac{(F_b/v_b) - (F_t/v_t)}{(F_b/v_b) - (1/(n - 1))} \quad (10)$$

Donde χ_b^2 : estadístico chi-cuadrado para el modelo base; χ_t^2 estadístico chi-cuadrado para el modelo estimado; F es valor aproximado de la función F_{ML} definido en la sección anterior y v sus respectivos grados de libertad del estadístico de prueba.

Heurísticamente, se ha identificado una amplia literatura que determinado valores críticos en donde puede considerarse que los modelos tienen una buena bondad de ajuste. Estos criterios se resumen en la Tabla 1:⁵

Indicador	Valores Óptimos
χ^2	2,0 - 5,0
RMSEA	$\leq 0,05$ (óptimo)/ $\leq 0,10$ (bueno)
CFI	$\geq 0,95$ (óptimo)/ $\geq 0,90$ (bueno)
TLI	$\geq 0,95$ (bueno)

Cuadro 1: Valores óptimos para medidas de bondad de ajuste.

Definición 3.6 (Prueba de Esfericidad de Barlett). Sea R una matriz de correlaciones lineales. Sea p el rango R y H_0 una hipótesis nula, la cual afirma que la matriz poblacional de correlaciones lineales sea la matriz identidad de orden p [RW22].

Sea T el estadístico de prueba definido como:

$$T = -\log(\det(R))(N - 1 - (2p + 5)/6) \quad (11)$$

entonces, $T \sim \chi_g$, con $g : \frac{p(p-1)}{2}$ grados de libertad

4. Los Datos

Para obtener una medición aproximada consistente sobre la informalidad y su relación con otras variables económicas, se considera adecuado usar los microdatos anonimizados de la Gran Encuesta Integrada de Hogares (GEIH) producida por el DANE. La ventaja de usar los propios datos del DANE permite contrastar si la definición de informalidad establecida por esta entidad se materializa en hechos concretos de la dinámica económica. Las características de los datos a procesar son:

- Tipo de Registro: Datos de corte transversal.
- Tablas de Origen: Ocupados y Caracterización del Hogar.
- Ventana de selección: Enero/2022 - Mayo/2023.

⁵Para mayor detalle, se recomienda revisar [HDaCJea08] en la bibliografía.

- Unidad de Observación: DIRECTORIO (Unidad familiar).
- Índice de referencia de observación $i = 1, 2, 3, \dots, N$.
- Esquema de agregación: La unidad de agregación original es una llave compuesta DIRECTORIO-ORDEN(individuo), por lo cual se totaliza información en términos de la unidad familiar.
- Tamaño de Muestra N : 263.396 unidades familiares.

5. Estimación del modelo

El objetivo de alcanzar el mejor modelo se obtiene mediante la identificación de las relaciones entre las variables exógenas con la variable endógena. Así, se propone la siguiente metodología para encontrar dichas variables y relaciones:

1. Identificar posibles variables indicadoras u observables:

De las ocho tablas constitutivas de la GEIH, se tienen 603 campos que miden los atributos de educación, ingresos, vivienda, migración, ocupación de las unidades familiares muestreadas en la GEIH. Luego de revisar cada una, se seleccionan las siguientes variables como campos relevantes para explicar el concepto de informalidad laboral, los cuales se sintetizan en la tabla 2:⁶

Variable	Descripción de Variable
P6100	Tipo de vinculación a Seguridad Social
P3042	Máximo grado de escolaridad en la familia
P6040	Edad alcanzada por la Cabeza de Hogar
P6426	Antigüedad en la empresa o negocio
INGLABO	Ingresos percibidos por el individuo

Cuadro 2: Variables de insumo. Gran Encuesta Integrada de Hogares

2. Análisis de comportamiento estacional:

Con el fin de identificar tendencias en las variables definidas, se agregaron como Series de Tiempo con frecuencia semanal ($T = 73$). Se obtuvo la descomposición estacional aditiva de los totales de cada variable. Basado en lo anterior, se observó que la media muestral de cada serie mantiene rangos muy cerrados y que el comportamiento estacional observado obedece a condiciones propias de la operación estadística.

Como se ilustra en la Figura 3, el número de personas vinculadas con el régimen contributivo emula el comportamiento estacional del tamaño de muestra encuestada, que en tiempos regulares oscila entre 2.600 - 3.400 registros y cada 4 semanas aumenta en el rango de 5.600 - 6.400 registros.

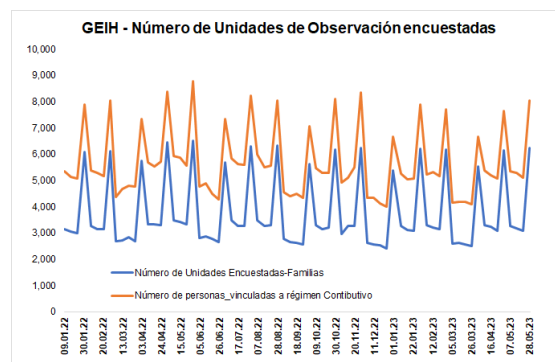


Figura 3: Serie de Tiempo del número de observaciones encuestada en

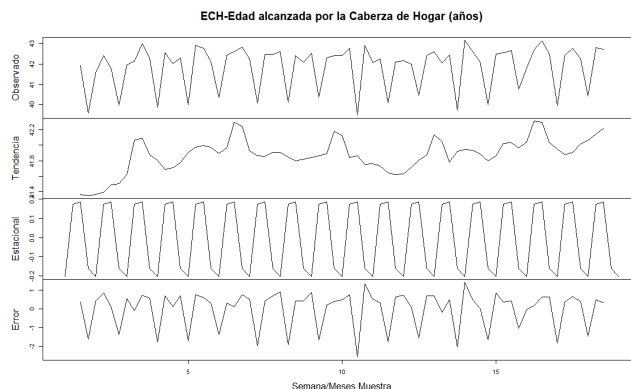


Figura 4: Descomposición estacional para la serie de tiempo Edad Máxima de Cabeza de Hogar

Por otro lado, como se observa en la Figura 4, la descomposición estacional aditiva de las series definidas, no evidencia cambios abruptos de tendencia. Por ejemplo en la variable ECH_i , se observa que a pesar de tener una tendencia creciente, el rango o $Ran(ECH_i) = [49,2 - 50,0]$, lo cual puede entenderse como estable. Por lo anterior, se considera adecuado tratar el cuerpo de datos como *corte transversal*, confirmando que la aproximación mediante técnicas de series de tiempo no es adecuada.

3. Análisis Factorial. Se propone realizar un análisis de factorial con las variables que han quedado seleccionadas en la agregación de información:

- x_1 ($x1_edad$) Edad alcanzada por quien ejerza la cabeza del hogar.
- x_2 ($x2_escol$) Máximo grado de escolaridad alcanzado por la cabeza del hogar.
- x_3 ($x3_num_subs$) Número de personas en régimen subsidiado por hogar.
- x_4 ($x4_tamano_hogar$) Tamaño del hogar (Número de personas en el hogar).

⁶Para mayor detalle de los los códigos constitutivos del Diccionario de Datos de la GEIH, se recomienda consultar [DANdE23b]

- x_5 ($x5_ant_emp$) Antigüedad promedio en negocio o empresa.
- x_6 ($x6_ing_labor$) logaritmo natural del ingreso laboral mensual.⁷

Se identifica que las variables tienen correlaciones cruzadas positivas de baja magnitud (ver Figura 5), a excepción de la pareja (x_3, x_4) cuya correlación $\hat{r}(x_3, x_4) = 0,87$, la cual permite inferir que la informalidad (vinculación al Sistema de Seguridad Social en calidad de subsidiado) está altamente relacionado con la proporción de personas sujetas al régimen subsidiado en un hogar.

Adicionalmente, teniendo en cuenta que el p-valor asociado al estadístico de prueba de esfericidad de Bartlett cayó en zona de rechazo ($2,202791 \times 10^{-35}$), se puede afirmar que las variables son objeto de aplicarles un análisis de reducción de factores [NIOsaT21] ya que se rechaza la hipótesis nula que la matriz de covarianza poblacional sea la matriz unitaria.

Al aplicar el método de Análisis Factorial sobre la muestra en consideración, se obtuvieron las siguientes combinaciones lineales de los Factores (F_1, F_2, F_3):

$$F_1 = 0,35x_1 + 0,11x_2 + 0,89x_3 + 0,94x_4 + 0,21x_6, \quad (12)$$

$$F_2 = 0,26x_1 + 0,99x_2 + 0,19x_3 + 0,15x_4 + 0,47x_6, \quad (13)$$

$$F_3 = 0,23x_1 + 0,99x_2 + 0,99x_5 + 0,12x_6, \quad (14)$$

Tipo de Proporción	F_1	F_2	F_3
Varianza	0.310	0.224	0.176
Varianza (Acum)	0.310	0.534	0.710

Cuadro 3: Resultados del Análisis Factorial

Producto de la estimación de análisis factorial anterior, se observa que la proposición de tres variables latentes (obtenidas como combinaciones lineales entre las variables indicadoras) podría capturar el 71,0 % de la variabilidad total del modelo (Ver Tabla 3).

De las ecuaciones, se puede inferir:

- El Factor 1 corresponde a variables asociadas a *informalidad* ($x3_num_subs$ - (número de personas en régimen subsidiado) y $x4_tamano_hogar$ - (número de personas en el hogar), con lo cual puede representarse a través de una variable latente η_1 como constructor de informalidad demográfica.
- El Factor 2 tiene pesos más altos asociados a $x2_escol$ -*Escolaridad* y la variable $x6_ing_labo$ -*Ingreso*, con lo cual puede considerarse como una variable latente η_2 de informalidad económica.

⁷Se hace transformación por logaritmo natural en la medida que el método de Análisis Factorial es sensible a variables con escalas disímiles entre si.

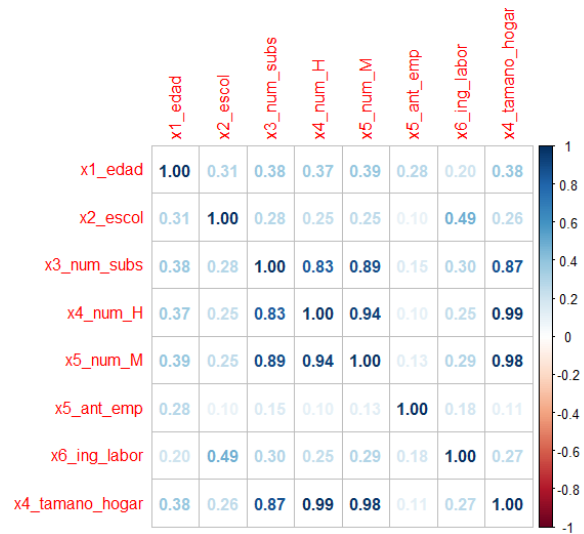


Figura 5: Correlaciones lineales entre variables

- El Factor 3 η_3 incorpora la temporalidad, en la medida que el mayor valor absoluto de una variable sobre el indicador corresponde a la variable de $x4_ant_emp$.

4. Proposición de un Sistema de Ecuaciones Estructurales:

En función a lo observado en el anterior título, se propone un MEE con variables latentes (η_i), las cuales se definen como η_1 : informalidad demográfica; η_2 : informalidad económica y η_3 : factor temporal. Cada uno de estos factores son expresados en función de las variables observables $x_i, i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e incluyendo sus diferentes componentes aleatorios (ζ_i).

Para modelar el comportamiento de las variables latentes mencionadas, se propone trabajarlo mediante dos alternativas de modelos: 1) *Modelo básico*: el cual corresponde a una sola variable latente como combinación lineal de las variables observables. 2) *Modelo ampliado* cuya especificación funcional reconoce la existencia de tres componentes latentes de la informalidad. Ambos modelos se ilustran a continuación:

Modelo Básico:

$$\omega = \sum_{i=1}^6 \alpha_{1i} x_i + \zeta_5. \quad (15)$$

Modelo Ampliado:

$$\eta_1 = \delta_{11} x_3 + \delta_{12} x_4 + \zeta_1, \quad (16)$$

$$\eta_2 = \delta_{21} x_2 + \delta_{22} x_6 + \zeta_2, \quad (17)$$

$$\eta_3 = \delta_{31} x_1 + \delta_{32} x_5 + \zeta_3, \quad (18)$$

$$\gamma = a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + a_3 \eta_3 + \zeta_4 \quad (19)$$

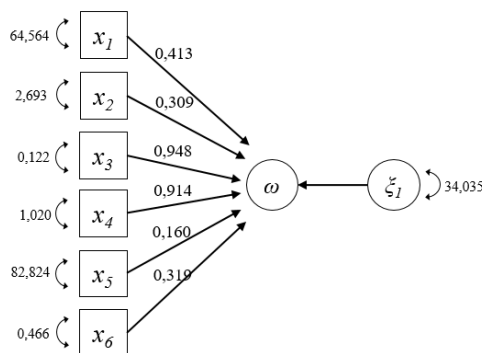


Figura 6: Diagrama de Trayectoria para Modelo Básico

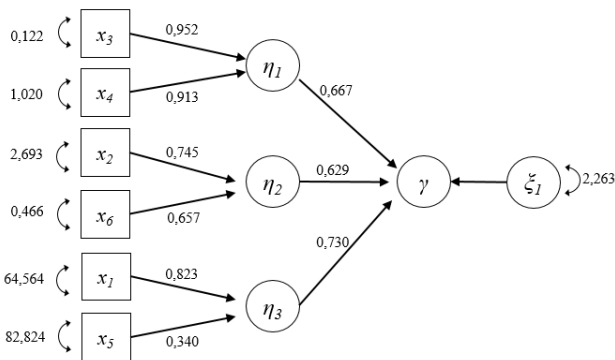


Figura 7: Diagrama de Trayectoria para Modelo Ampliado

5. Coeficientes obtenidos:

Mediante la estimación de ambos sistemas de ecuaciones estructurales con variables latentes, se observan dos situaciones particulares en términos de la estimación de coeficientes (ver salidas de modelos en R. Figura 8 y Figura 9): Por un lado, tanto en el modelo básico como en el modelo ampliado, las variables con coeficiente (estandarizado - columna *Std.all*) en valor absoluto más alto son las asociadas al tamaño del hogar y número de personas en el régimen subsidiado. Por ejemplo, para el Modelo Básico, un cambio de 1 desviación estándar en el número de personas vinculadas en régimen subsidiado incide en un cambio de 0.948 desviaciones estándar en la variable latente ω .

Por otro lado, se evidencian signos contrarios a los esperados respecto a los coeficientes de $x2_escol$ y $x6_ing_labor$ (0.309 y 0.319 respectivamente) pues se obtuvieron coeficientes positivos a pesar que el análisis económico relacionaría estas variables de forma negativa con la variable latente construida. En otras palabras, la lógica económica permite sostener la hipótesis que a mayor grado de escolaridad se logra una mayor grado de remuneración salarial que es más probable en una vinculación formal, es decir, a mayor grado de escolaridad, menor informalidad.

No obstante, la estimación de correlaciones lineales par-

Latent variables:						
	Estimate	Std.Err	z-value	P(> z)	Std.lv	Std.all
inf_total =~	1.000				5.834	0.413
x1_edad	0.130	0.001	130.919	0.000	0.759	0.309
x2_escol	0.186	0.001	216.601	0.000	1.083	0.948
x3_num_subs	0.387	0.002	218.489	0.000	2.260	0.914
x4_tamano_hogr	0.266	0.004	75.827	0.000	1.550	0.160
x6_ing_labor	0.050	0.000	134.016	0.000	0.289	0.319

Variances:						
	Estimate	Std.Err	z-value	P(> z)	Std.lv	Std.all
.x1_edad	165.631	0.463	357.534	0.000	165.631	0.830
.x2_escol	5.470	0.015	360.204	0.000	5.470	0.905
.x3_num_subs	0.131	0.002	67.112	0.000	0.131	0.100
.x4_tamano_hogr	1.006	0.009	114.249	0.000	1.006	0.165
.x5_ant_emp	91.251	0.252	362.239	0.000	91.251	0.974
.x6_ing_labor	0.737	0.002	359.999	0.000	0.737	0.898
inf_total	34.035	0.317	107.250	0.000	1.000	1.000

Figura 8: Coeficientes Modelo Básico

Latent variables:						
	Estimate	Std.Err	z-value	P(> z)	Std.lv	Std.all
inf_demo =~	1.000				2.256	0.913
x4_tamano_hogr	0.482	0.001	432.503	0.000	1.088	0.952
inf_econ =~	1.000				1.831	0.745
x2_escol	0.325	0.002	166.552	0.000	0.595	0.657
inf_temp =~	1.000				11.623	0.823
x1_edad	0.283	0.003	94.531	0.000	3.291	0.340
inf_total =~	1.000				0.667	0.667
inf_demo	0.765	0.005	140.261	0.000	0.629	0.629
inf_econ	5.641	0.039	144.839	0.000	0.730	0.730

Variances:						
	Estimate	Std.Err	z-value	P(> z)	Std.lv	Std.all
.x4_tamano_hogr	1.020	0.011	93.689	0.000	1.020	0.167
.x3_num_subs	0.122	0.002	49.236	0.000	0.122	0.093
.x2_escol	2.693	0.020	132.195	0.000	2.693	0.445
.x6_ing_labor	0.466	0.002	195.640	0.000	0.466	0.568
.x1_edad	64.564	1.328	48.605	0.000	64.564	0.323
.x5_ant_emp	82.824	0.251	329.393	0.000	82.824	0.884
.inf_demo	2.828	0.018	156.040	0.000	0.556	0.556
.inf_econ	2.028	0.019	104.650	0.000	0.605	0.605
.inf_temp	63.099	1.365	46.238	0.000	0.467	0.467
inf_total	2.263	0.020	111.462	0.000	1.000	1.000

Figura 9: Coeficientes Modelo Ampliado

ciales entre estas variables permite inferir que las relaciones, aunque sean débiles, son positivas, con lo cual se generan resultados sólidos que invitan a reflexionar sobre las condiciones o factores exógenos sobre estas variables que permiten obtener resultados contrarios a la lógica económica.

6. Evaluación de los modelos

Los resultados de la estimación para ambos modelos permite afirmar que el Modelo Ampliado presenta mejores medidas de bondad de ajuste, tal como se presenta en la Tabla 4: Retomando los criterios heurísticos identificados en investigaciones previas, el Modelo Ampliado cuenta con un CFI de 0.982, el cual puede ser considerado como óptimo, mientras que el modelo básico obtiene un valor CFI inferior al bueno (0.873).

Por otro lado, indicador RMSEA, el cual mide la participación del componente aleatorio sobre la variabilidad del modelo, permite inferir que el modelo ampliado tiene un grado muy bajo en error cuadrático (0.081), mientras que el modelo básico tiene un efecto de error mayor al doble del modelo ampliado (0.196).

Concepto	Modelo Básico	Modelo Ampliado
CFI	0.873	0.982
TLI	0.729	0.954
AIC	7574817.227	7493774.601
RMSEA	0.196	0.081

Cuadro 4: Comparación de medidas de bondad de ajuste.

7. Conclusiones

La aplicación de un MEE brinda mejores resultados en términos de bondad de ajuste e interpretabilidad de los resultados para modelar un fenómeno a través de mediciones latentes. Adicionalmente, descomponer la medición de variables latentes a través de varias combinaciones lineales permite diferenciar los efectos de variabilidad identificados mediante técnicas de reducción de dimensiones como el Análisis Factorial.

No obstante, se observan datos en el desempeño de los modelos que es adecuado manejarlos con prudencia: Inicialmente, para tamaños de muestra grande (en este caso la GEIH), tiene a rechazarse la prueba de que la matriz de covarianza estimada por el modelo es similar a la poblacional, lo cual deja a consideración reflexionar si los resultados de coeficientes son adecuados para analizar el modelo.

Por otro lado, se parte de la consideración que las variables tienen correlación baja y por ende, en un escenario reduccionista, se excluyen de la estimación. No obstante, la inclusión de mayores correlaciones entre variables regresoras implicaría problemas de sobre-especificación del modelo y en consecuencia no poder generar la estimación adecuada.

* Acerca de la investigación: Este artículo es producto de la Práctica Profesional bajo modalidad investigativa desarrollada por los autores para el periodo 2023-2, en el marco del cooperación académica interinstitucional ente el Centro de Investigaciones en Matemáticas e Ingenierías de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz y el Grupo de Análisis de Bienestar de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Colombia.

Referencias

- [KB89] Kenneth Bollen, *Structural Equations with Latent Variables* (1989), 1-150. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- [LCS20] Laura Castro-Schilo, *Structural Equations Models A favorite amongst those who use them... wonder why?*, 2020. <https://towardsdatascience.com/structural-equations-models-3d8578952f87>.
- [DANdE23a] Departamento Administrativo Nacional de Estadística, *Boletín Técnico - Informalidad Laboral en Colombia. Trimestre Noviembre 2022-Enero 2023* (2023). https://www.dane.gov.co/files/investigaciones/boletines/ech/ech_informalidad/bol_geih_informalidad_nov22_ene23.pdf.
- [DANdE23b] ———, *Diccionario de Datos*, 2023. <https://microdatos.dane.gov.co/index.php/catalog/771/data-dictionary>.
- [MTEPea16] María Teresa Escobedo Portillo et al., *Modelos de ecuaciones estructurales: Características, fases, construcción, aplicación y resultados*, Ciencia y Trabajo - Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Chihuahua, México **18** (2016), no. 55. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-24492016000100004>.
- [MG08] Marín Guenov, *Covariance Structural Models of the Relationship between the Design and Customer Domains*, Journal of Engineering Design **19** (2008), no. 1, 75-95. <https://sci-hub.se/10.1080/09544820701213378>.
- [HDaCJea08] Hooper D. and Coughlan J. et al., *Structural Equation Modelling: Guidelines for Determining Model Fit*, Vol. 6, 2008. <https://core.ac.uk/download/pdf/297019805.pdf>.
- [RHH23] Rick H. Hoyle, *Handbook of Structural Equation Modelling*, 2nd Edition, The Guildford Press, 2023.
- [JMIL21] Juan Miguel Iglesias Labraca, *Modelos de Ecuaciones Estructurales*, Trabajo de Grado en Matemáticas - Universidad de Almería (2021). <https://repositorio.ual.es/handle/10835/13177>.
- [SYLea03] Sik-Yum Lee et al., *Maximum Likelihood Estimation of Nonlinear Structural Equation Models with Ignorable Missing Data*, Journal of Educational and Behavioral Statistics **28** (2003), no. 2. <https://www.jstor.org/stable/3701258>.
- [JL21] Johnny Lin, *Introduction to Structural Equation Modelling (SEM) in R with LAVAAN*, Advanced research computing - Statistical methods and Data Analysis, 2021. <https://stats.oarc.ucla.edu/r/seminars/rsem>.
- [EM19] Ed Merkle, *Introductory Structural Equation Modeling*, 2019. https://pj.freefaculty.org/guides/crmda_workshops/sem/sem-1/sem-1.pdf.
- [Myu03] I. J. Myung, *Maximum likelihood estimation*, Journal of mathematical Psychology **47** (2003), no. 1. https://web.pdx.edu/~newsomj/semclass/ho_ML.pdf.
- [NIoSAT21] National Institute of Standards and Technology, *1.3.5.7. Bartlett's Test*, 2021. <https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda357.htm>.
- [OIpeT22] Organización Internacional para el Trabajo, *Economía informal en América Latina y el Caribe*, 2022. https://www.ilo.org/wcmsp5/groups/public/---americas/---ro-lima/documents/publication/wcms_867497.pdf.
- [SCaIE15] Sengul C. and Irkel E., *Comparison of Model Fit Indices Used in Structural Equation Modeling Under Multivariate Normality*, Vol. 14, 2015.
- [KSEaHM03] Karin Schermelleh-Engel and Helfried Moosbrugger, *Evaluating the Fit of Structural Equation Models: Tests of Significance and Descriptive Goodness-of-Fit Measures*, Methods of Psychological Research Online **8** (2003), no. 2. https://www.stats.ox.ac.uk/~snijders/mpr_Schermelleh.pdf.
- [PS15] Peter Spirtes, *Latent Structure and Causal Variables*, International Encyclopedia of the Social and Behavioral Sciences **2** (2015), 394-397. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-097086-8.42136-7>.
- [RW22] Rick Wicklin, *On Bartlett's sphericity test for correlation*, 2022. <https://blogs.sas.com/content/iml/2022/04/27/bartletts-sphericity-test.html>.
- [YXaYY19] Yan X. and Yanyun Y., *RMSEA, CFI, and TLI in structural equation modeling with ordered categorical data: The story they tell depends on the estimation methods*, Behavior Research Methods volume **51** (2019). <https://doi.org/10.3758/s13428-018-1055-2>.

[LAZ10] Luis Achaerandio Zuazo, *Iniciación a la Práctica de Investigación*, Instituto de Investigaciones Jurídicas - Universidad Rafael Landívar Guatemala, 2010.

Acerca de los autores: Este artículo es producto de la Práctica Profesional bajo modalidad investigativa desarrollada por los autores para el periodo 2023-2, en el marco del cooperación académica interinstitucional ente el Centro de Investigaciones en Matemáticas e Ingenierías de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz y el Grupo de Análisis de Bienestar de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Colombia.

MULTIESTACIONARIDAD E INYECTIVIDAD: UN ENFOQUE DESDE LA GEOMETRÍA ALGEBRAICA

Astrid Liliana Contreras Mendoza^{*}
astrid.122196@gmail.com

Resumen

En este artículo, damos una breve introducción a la *Chemical Reaction Network Theory* (CNRT) en español, la Teoría de redes de reacciones químicas desde una perspectiva matemática. También describimos cómo las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) se utilizan para modelar la cinética de las reacciones y explicamos cómo la geometría algebraica permite analizar los estados estacionarios, así como comprender la dinámica de las redes mediante el estudio de las variedades algebraicas asociadas. Presentamos los conceptos básicos como acción de masas, que relaciona las velocidades de reacción con las concentraciones de los reactivos, y cómo esto conduce a un sistema de EDO que describe la evolución temporal de las concentraciones. Adicionalmente, analizamos la teoría de grafos, donde las especies químicas y las reacciones se representan como nodos y aristas, respectivamente. Esto nos permite estudiar la estructura de la red y su estabilidad mediante el análisis de matrices. En el artículo también discutimos sobre métodos para encontrar soluciones estacionarias o *steady states* y analizar cardinalidad de estas soluciones, así como el uso de herramientas numéricas para simular y resolver estos sistemas que suelen ser complejos. Finalmente, mostraremos al lector que la geometría algebraica nos permite entender y predecir el comportamiento de redes de reacciones químicas, con aplicaciones en química, biología y la ingeniería.

1. Introducción

Las *redes de reacción química* surgen de manera natural en biología, en la fabricación de nuevos materiales, en la producción de energía, en la dinámica ambiental y en el comercio en general. En vista de la enorme variedad y la profunda importancia de las redes de reacción química en la ciencia y la industria y en vista del interés histórico que los matemáticos han tenido en los sistemas no lineales (especialmente polinómicos) de ecuaciones diferenciales, estudiar las CNRT es una área de interés en matemáticas. Remitimos al lector al trabajo seminal de Martin Feinberg [Fei19] para más referencias sobre CRNT.

^{*}Departamento de Ciencias Básicas. Universidad Autónoma de Bucaramanga.
Este trabajo se originó gracias al valioso apoyo de la Escuela de Verano EMALCA, realizada en Julio de 2024 en Bogotá, Colombia.

La *Chemical Reaction Network Theory* (CNRT) se originó en la década de los 70 a través del trabajo pionero de Fritz Horn y Roy Jackson [FHaRJ72]. Esta teoría se desarrolló con el propósito de modelar matemáticamente sistemas complejos de reacciones químicas. Su enfoque es único porque nos permite estudiar la dinámica y estabilidad de estos sistemas químicos sin la necesidad de conocer todos los parámetros cinéticos exactos. Además, las CNRT se han aplicado extensamente en la química [BS02], la biología [Gun03], la ingeniería [RAaTC65] y en otros campos que involucran procesos químicos complejos como las redes de regulación genética y los procesos enzimáticos [IBP13].

El objetivo al presentar este artículo es ofrecer una introducción elemental a las CNRT, sin perder la formalidad matemática. Nuestro objetivo es ofrecer una visión concisa de los avances en este campo, resaltando algunos desarrollos clave y señalando problemas abiertos y desafíos actuales en la investigación matemática relacionada con las CNRT. Si bien no pretendemos abarcar exhaustivamente toda la literatura existente, buscamos proporcionar un marco que facilite la comprensión del estado actual de las redes de reacciones químicas y sus posibles direcciones en un futuro. Es por esto, que el artículo está organizado en tres secciones principales. En la primera sección, se presentan las definiciones fundamentales de las redes de reacciones químicas, junto con los conceptos claves y necesarios para modelar procesos biológicos, haciendo especial énfasis en la cinética de las reacciones. En la sección siguiente nos enfocamos en el estudio de los sistemas dinámicos procedentes de redes de reacciones químicas con la cinética de acción de masas. Finalmente, en la última sección, nos enfocamos en analizar los estados estacionarios del sistema, abordando las siguientes preguntas: Dada una red de reacción química, una cinética y unas constantes de reacción específicas, ¿existe un estado de equilibrio en el sistema? En caso afirmativo, ¿puede haber más de uno? Además, considerando una concentración inicial de las especies, ¿es posible alcanzar múltiples estados estacionarios? Este análisis se centra en estudiar la propiedad de multiestacionariedad de una CNRT.

2. Redes de reacciones químicas

Las *reacciones químicas* son procesos termodinámicos que transforman una materia, en este proceso, dos o más

sustancias químicas, también llamadas *reactantes*, cambian su estructura molecular y enlaces químicos para consumir o liberar energía. De esta manera, consiguen generar unas nuevas estructuras químicas distintas a las iniciales llamadas *productos*.

Estos procesos pueden darse de manera natural y espontánea en la naturaleza, así como también pueden generarse a través de la intervención humana en un entorno de condiciones controladas como un laboratorio. Primero, presentamos un ejemplo básico de una reacción química.



En esta reacción, la especie A y la especie B reaccionan para formar la especie C . El *reactante* $A + B$ y el *producto* C son llamados *complejos*. Después de numerar las especies, un complejo puede ser identificado con un vector en $\mathbb{Z}_{\geq 0}^s$, donde s denota el cardinal de X , donde X se refiere al conjunto de especies.

Cuando la reacción (1) ocurre, una unidad de A y una unidad de B se transforman en una unidad de C . Si denotamos x_A, x_B y x_C al número de unidades de las especies A, B y C respectivamente, antes de que ocurra la reacción, entonces el número de unidades de cada especie luego de que tenga lugar la reacción es $x_A - 1$, $x_B - 1$ y $x_C + 1$ respectivamente. En ocasiones pueden aparecer más reacciones que involucren a las mismas especies. Un conjunto de reacciones que involucran ciertas especies es una *red de reacciones químicas*. A continuación, presentamos su definición más formal.

Definición 2.1. Una *red de reacciones químicas* consiste entonces de tres conjuntos:

1. Un conjunto finito de *especies* $X = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$, para algún $s \in \mathbb{N}$.
2. Un conjunto finito de *vectores* $\mathcal{C} = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ para algún $r \in \mathbb{N}$, con $y_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s$ con $i \in \{1, \dots, r\}$ que representan a los *complejos* de la red, cada uno de los cuales es una combinación lineal de las especies con coeficientes enteros no negativos.
3. Un conjunto de reacciones $R \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, que satisfacen:
 - a) Ningún complejo reacciona con sí mismo, es decir, para cualquier $i \in \{1, \dots, r\}$ no existe una reacción en R tal que $y_i \rightarrow y_i$.
 - b) Para todo $i \in \{1, \dots, r\}$ existe una reacción en R para la cual y_i es el complejo reactante o el complejo producto.

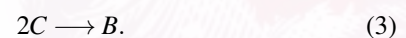
Por lo general se representan por un grafo finito dirigido y así denotamos $G := (X, \mathcal{C}, R = \{R_j\}_{j=1}^r)$ a la red de reacciones químicas. Es importante mencionar que cada arista dirigida representa una reacción química de la red que une los dos vértices correspondientes a los dos complejos involucrados en dicha reacción, de esta manera:

$$R_j : \sum_{i=1}^s \alpha_{ij} x_i \xrightarrow{k_j} \sum_{i=1}^s \beta_{ij} x_i. \quad (2)$$

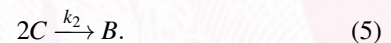
Como vemos en (2), aquí las reacciones están representadas junto a una etiqueta. La etiqueta de una reacción química indica cuán rápido o cuán frecuentemente ocurre la reacción y la llamamos *constante de reacción*, la cuál siempre es un valor positivo. Después de numerar las especies, un complejo puede ser identificado con un vector en $\mathbb{Z}_{\geq 0}^s$, donde s denota el cardinal de X .

Veamos a continuación algunos ejemplos de redes de reacciones químicas.

Ejemplo 2.1. Si añadimos una reacción adicional a la reacción presentada en (1). Por ejemplo



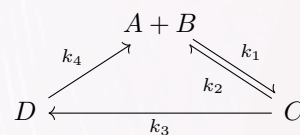
En este caso, obtenemos una red de reacciones químicas y el grafo asociado está dado por:



donde k_1 y k_2 son las constantes de reacción. Al complejo $A + B$ le asociamos el monomio $x_A x_B$, que determina el vector $y_1 = (1, 1, 0)$ y al complejo $2C$ le asociamos el monomio x_C^2 , que determina el vector $y_2 = (0, 0, 2)$.

Ejemplo 2.2. Consideremos el modelo de transducción de señales en células o linfocitos T , propuesto por el inmunólogo Timothy W. McKeithan [McK95]. En este modelo, los receptores de los linfocitos T interactúan tanto con antígenos propios como con antígenos extraños, y la dinámica de este modelo ofrece una posible explicación de cómo los linfocitos T son capaces de distinguir entre estos diferentes tipos de antígenos.

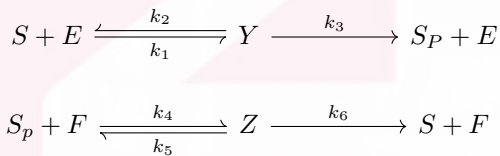
Un estudio matemático de la dinámica de este modelo fue hecho por Eduardo Sontag en el año 1992. En este caso, el grafo dirigido asociado a la red más simple de reacciones sería el siguiente:



La especie A denota al receptor del linfocito T , B denota el complejo mayor de histocompatibilidad (CMH) del antígeno propio, C denota a la especie A unida con la especie B , y D denota la forma activada (fosforilada) de C . La unión de A y B para formar C desencadena una señal de alerta de D . El mecanismo general propuesto por McKeithan incluye varias formas activadas de C , hasta que se obtiene una forma final (activa) que desencadena el ataque.

Nuestro siguiente ejemplo describe un modelo del sistema de fosforilación y desfosforilación de la enzima IDH (Isocitrato Deshidrogenasa), un proceso que fue estudiado por Guy Shinar y Martin Feinberg en el contexto de la bacteria *Escherichia coli* [MFaGS10].

Ejemplo 2.3. Las reacciones mostradas en el modelo incluyen dos tipos de pasos: fosforilación, que desactiva la enzima IDH y la desfosforilación, que la activa. Este modelo se sustenta por el grafo.



Los vectores asociados a cada uno de los complejos son:

$$\begin{aligned} C_1 &= (1, 1, 0, 0, 0, 0), & \text{correspondiente a } S + E, \\ C_2 &= (0, 0, 1, 0, 0, 0), & \text{correspondiente a } Y, \\ C_3 &= (0, 0, 0, 1, 1, 0), & \text{correspondiente a } S_P + E, \\ C_4 &= (0, 0, 0, 1, 0, 1), & \text{correspondiente a } S_P + F, \\ C_5 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0), & \text{correspondiente a } Z, \\ C_6 &= (1, 0, 0, 0, 0, 1), & \text{correspondiente a } S + F. \end{aligned}$$

Estos dos últimos ejemplos, que consisten en sistemas químicos, son comunes en la biología molecular, donde se utilizan para comprender cómo una enzima alterna entre estados activos e inactivos a través de la adición o remoción de grupos fosfato, y se han estudiado ampliamente porque reflejan diferentes comportamientos biológicos.

2.1. Sistemas cinéticos

Nos gustaría formular ecuaciones diferenciales que modelen la evolución de las concentraciones de las especies de los Ejemplos 2.1, 2.2 y 2.3. Dado que las reacciones químicas son responsables de los cambios en la composición, comprender cómo formular las ecuaciones diferenciales depende fundamentalmente de conocer la velocidad a la que ocurren las distintas reacciones.

Dada una red de reacciones químicas $G := (X, \mathcal{C}, R)$, el vector de concentraciones

$$x := x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_s(t)),$$

para cada $i \in \{1, \dots, s\}$ representa la concentración $x_i(t)$ de la especie x_i en el instante t . Por medio de una función de cinética $K_{y_n y_m}$,

$$K_{y_n y_m} : \mathbb{R}_{\geq 0}^s \longrightarrow \mathbb{R},$$

G define un sistema dinámico, es decir, a cada reacción $y_n \rightarrow y_m$ le asignamos una función continua a valores reales no negativa donde $K_{y_n y_m}(x)$ representa la tasa de ocurrencia instantánea de la reacción $y_n \rightarrow y_m$ cuando las concentraciones instantáneas de las especies están dadas por el vector x .

En el estudio de redes de reacciones químicas, es fundamental analizar la velocidad de formación de las distintas especies involucradas en el sistema. Para ello, se define la función f , denominada **función de velocidad de formación de especies**, la cual describe cómo varían las concentraciones de las especies a lo largo del tiempo. De este modo, la función f se expresa como una combinación lineal de las funciones cinéticas y está dada por:

$$f(x(t)) = \sum_{y_n \rightarrow y_m \in R} K_{y_n y_m} (y_m - y_n) \quad (6)$$

Así, para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos la función f_i dada por:

$$f_i(x(t)) = \sum_{y_n \rightarrow y_m \in R} K_{y_n y_m}(x(t)) ((y_m)_i - (y_n)_i).$$

Note que para cada especie X_i , la función $f_i(x)$ nos da la tasa de generación instantánea de la especie X_i mientras ocurren simultáneamente todas las reacciones de R . Una elección de funciones cinéticas $K_1, \dots, K_r$ le otorga a la red de reacción química G una cinética.

Definición 2.2. Un sistema cinético $G' := \{X, \mathcal{C}, R, K\}$ es una red de reacciones químicas $G = \{X, \mathcal{C}, R\}$ dotada de una cinética K .

2.2. Acción de masas

La ley de *cinética de acción de masas* fue introducida por dos científicos noruegos: el químico Peter Waage (1833-1900) y el matemático Cato Guldberg (1836-1902) en un artículo publicado en noruego en 1864 [PWaCG86]. Esta ley se fundamenta en la premisa de que la velocidad de una reacción es proporcional al producto de las concentraciones de las especies en el complejo reactivo, siempre que las unidades estén homogéneamente distribuidas y sean abundantes. De este artículo, nos interesa estudiar las redes de reacciones químicas que siguen la cinética de acción de masas.

Definición 2.3. Decimos que un sistema cinético tiene cinética de acción de masas si todas las funciones de velocidad K_i con $i \in \{1, \dots, r\}$, son de la forma:

$$K_{y_n y_m} = k_{y_n y_m} x_1^{y_1} x_2^{y_2} \dots x_s^{y_s}, \quad (7)$$

para algún vector positivo de constantes de reacción $k_{y_n y_m} \in \mathbb{R}_{>0}^r$.

Por (6), la función velocidad de formación de especies de una red de reacciones químicas con cinética de acción de masas nos queda de la siguiente manera:

$$f(x(t)) = \sum_{y_n \rightarrow y_m \in R} k_{y_n y_m} x^y (y_m - y_n), \quad (8)$$

note que además $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_s]$.

3. Sistemas dinámicos procedentes de redes de reacciones químicas

Como vimos anteriormente, G define el siguiente sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias en las concentraciones $x_1, \dots, x_s$ de las especies como funciones de tiempo t .

Más concretamente, dado un sistema cinético $G' = \{X, \mathcal{C}, R, K\}$, tenemos el siguiente sistema dinámico asociado dado por el siguiente producto matricial:

$$\frac{dx}{dt} := \Gamma \begin{pmatrix} K_1(x) \\ \vdots \\ K_r(x) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

donde la matriz Γ se conoce como la *matriz de estequiometría*, definida a partir de los coeficientes de los reactantes y el producto de la siguiente manera:

$$\Gamma := \begin{pmatrix} \beta_{11} - \alpha_{11} & \cdots & \beta_{1r} - \alpha_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{s1} - \alpha_{s1} & \cdots & \beta_{sr} - \alpha_{sr} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{s \times r} \quad (10)$$

Las columnas de Γ hacen referencia a las reacciones y las filas corresponden a las especies x_i y cada entrada ij está dada por $\beta_{ij} - \alpha_{ij}$ de la matriz Γ corresponde a la *producción neta* de la especie x_i en la reacción R_j (por ejemplo en número de unidades) y el vector $K = (K_1(x), \dots, K_r(x))$, con $K_i \in \mathcal{C}$, corresponde a la cinética de la red de reacción química. Una cinética de tipo *acción de masas* por (7) da lugar a funciones de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = \Gamma \text{diag}(k)x^y, \quad x \in \mathbb{R}_{>0}^s, \quad (11)$$

con $k = (k_1, \dots, k_r)$, $y \in \mathbb{Z}^{s \times r}$ y x^y es el vector de monomios. A continuación, presentaremos tres ejemplos de sistemas dinámicos asociados a redes de reacciones químicas.

Ejemplo 3.1. Las concentraciones de las tres especies de la red de reacción química (2.1), que notamos x_A, x_B y x_C , cambian en el tiempo mientras la reacción ocurre. El sistema dinámico asociado es

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 x_A x_B \\ k_2 x_C^2 \end{pmatrix}.$$

Luego, el sistema de acción de masas de la reacción está dado por:

$$\frac{d}{dt}x_A = -k_1 x_A x_B, \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt}x_B = -k_1 x_A x_B + k_2 x_C^2, \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt}x_C = k_1 x_A x_B - 2k_2 x_C^2. \quad (14)$$

Ejemplo 3.2. En la red de reacción química del Ejemplo (2.2), la red tiene 4 reacciones, 4 especies: A, B, C y D , y 3 complejos: $A + B, C$ y D .

Las ecuaciones diferenciales ordinarias para las concentraciones de las especies de la red de reacción química con cinética de acción de masas son:

$$\frac{d}{dt}x_A = -k_1 x_A x_B + k_3 x_D,$$

$$\frac{d}{dt}x_B = -k_1 x_A x_B + k_3 x_D,$$

$$\frac{d}{dt}x_C = k_1 x_A x_B - k_2 x_C,$$

$$\frac{d}{dt}x_D = k_2 x_C - k_3 x_D.$$

Ejemplo 3.3. La red de reacción química del Ejemplo (2.3) tiene matriz de estequiometría

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Luego, el sistema de acción de masas de la reacción está dado por:

$$\frac{d}{dt}x_S = -k_1 x_S x_E + k_2 x_Y + k_6 x_S x_F, \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt}x_E = -k_1 x_S x_E + k_2 x_Y + k_3 x_{S_p} x_E, \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt}x_Y = k_1 x_S x_E - k_2 x_Y - k_3 x_{S_p} x_E, \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt}x_{S_p} = k_3 x_{S_p} x_E - k_4 x_{S_p} x_F + k_5 x_Z, \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt}x_F = -k_4 x_{S_p} x_F + k_5 x_Z + k_6 x_S x_F, \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt}x_Z = k_4 x_{S_p} x_F - k_5 x_Z - k_6 x_S x_F. \quad (20)$$

4. Estados estacionarios

En un sistema cinético, nos interesa identificar sus puntos o estados estacionarios, los cuales corresponden a los ceros de la función que describe la velocidad de formación de las especies. En esta sección nos enfocamos en definir los estados estacionarios y en determinar cuándo una red de reacción química posee dichos estados. Además, exploramos si la red de reacción química presenta un único estado de equilibrio o si existen múltiples estados posibles.

Los estados estacionarios se definen como aquellos en los que las concentraciones de las especies químicas permanecen constantes en el tiempo. Para identificar estos estados, necesitamos encontrar las raíces comunes de los polinomios que

describen el sistema. En este contexto, utilizaremos las herramientas de la geometría algebraica, como las variedades algebraicas, para analizar y resolver estos sistemas de ecuaciones polinomiales.

Definición 4.1. Dado $G' = \{X, \mathcal{C}, R, K\}$ un sistema cinético los valores de $c \in \mathbb{R}^n$ para que $f_i(c) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$ se conocen como **estados estacionarios o steady states** que sin pérdida de generalidad los vamos a denotar por $s.s.$

Dado un conjunto finito de polinomios $F = \{g_1(x), \dots, g_m(x)\} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, la variedad algebraica real definida por F es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$ en el que todos estos polinomios se anulan simultáneamente. Escribimos $\mathbb{V}_{\langle g_1, \dots, g_m \rangle}$ para denotar la variedad definida por F .

Como asumimos en (2.2) que las $f_i(x)$ son polinomiales, entonces V , definido a través de F , corresponde a la intersección de esta variedad con el ortante positivo. Esto implica que V es una variedad algebraica y, además, un conjunto semialgebraico. Entendemos por conjunto semiálgebraico un conjunto cuya definición, además de ecuaciones polinomiales, incluye desigualdades polinomiales. Para más detalles le recomendamos al lector revisar [Har92].

Definición 4.2. El conjunto de $s.s$ positivos, se denomina **variedad de estados estacionarios positivos**, se denota por

$$V_k = \mathbb{V}_{\langle g_1, \dots, g_m \rangle} \cap \mathbb{R}_{>0}^n,$$

y es un conjunto semi algebraico.

Si una cinética es de acción de masas, los $s.s$ positivos son los ceros positivos comunes de los polinomios $f_1, \dots, f_n$, es decir, de $\Gamma(kx^v)$. Ahora, vamos a introducir algunos ejemplos de los estados estacionarios de una red de reacción química.

Ejemplo 4.1. Si consideramos la red de reacción química (2.1), de la ecuación diferencial correspondiente a la concentración x_A (12), cualquier estado estacionario cumple que

$$k_1 x_A x_B = 0. \quad (21)$$

Luego, la red de reacción química no admite $s.s$ positivos para ninguna elección positiva de la constante de reacción k_1 . En este caso, los estados estacionarios están caracterizados por la extinción de alguna de las especies. Ahora, para las concentraciones de x_B y x_C , tenemos $k_1 x_A x_B - 2k_2 x_C^2 = 0$. Sin embargo, para resolver explícitamente las concentraciones estacionarias, normalmente se necesitaría información adicional, como las condiciones iniciales o valores específicos de k_1 y k_2 .

Ejemplo 4.2. Para la red de reacción química (2.2) los $s.s$ están dados por las siguientes relaciones entre las concentraciones:

$$x_C = \frac{k_1}{k_2} x_A x_B,$$

$$x_D = \frac{k_1}{k_3} x_A x_B.$$

Estas ecuaciones describen los valores de x_C y x_D en función de x_A y x_B , las constantes de reacción, y los valores iniciales de las concentraciones. Esto implica que los $s.s$ dependen de las concentraciones de x_A y x_B así como de las constantes de reacción involucradas.

Definición 4.3. El subespacio de estequiometría de la red de reacciones químicas $G = \{X, \mathcal{C}, R\}$ es el subespacio lineal generado por todas las columnas de la matriz de estequiometría definida en (10). Denotamos a este subespacio S :

$$S = \langle y' - y : y \longrightarrow y' \in R \rangle \subset \mathbb{R}^s.$$

Por lo anterior, el rango de una red de reacción química es la dimensión de S , es decir, $\text{rank}(\Gamma)$.

Ejemplo 4.3. Encontremos el subespacio de estequiometría S para la red de reacción química del Ejemplo 2.2. En este caso, los vectores son: $y_1 = (1, 1, 0, 0)$, $y_2 = (0, 0, 1, 0)$, $y_3 = (0, 0, 0, 1)$. Luego

$$S = \langle (-1, -1, 1, 0), (1, 1, -1, 0), (0, 0, -1, 1), (1, 1, 0, -1) \rangle.$$

Observamos que $(-1, -1, 1, 0) = -1(1, 1, -1, 0)$ y $(1, 1, 0, -1) = (1, 1, -1, 0) - (0, 0, -1, 1)$. Por lo tanto, el conjunto generador se reduce a

$$S = \langle (1, 1, -1, 0), (0, 0, -1, 1) \rangle.$$

En consecuencia, el rango de Γ es $\text{rank}(\Gamma) = 2$.

Ejemplo 4.4. De manera similar al ejemplo anterior, el espacio de estequiometría S para la red de reacción química del Ejemplo 2.1 se define por:

$$S = \langle (-1, -1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, -1, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 1, -1, -1) \rangle.$$

Da la condición inicial en $t = 0$, existe una solución $x : I \rightarrow \mathbb{R}^s$ del sistema (9) definida en un intervalo abierto I alrededor del origen. Como para todo tiempo $t \in I$ el vector $\frac{dx}{dt}$ pertenece al subespacio S se sigue que cualquier trayectoria $x(t)$ pertenece a un trasladado de S . Más aún, si $x(0) = x^0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}^s$, entonces para todo $t \geq 0$ en I , $x(t)$ pertenece a la clase de compatibilidad estequiométrica que definimos a continuación,

Definición 4.4. Sea $G = \{X, \mathcal{C}, R\}$ una red de reacción química y sea S su subespacio de estequiometría. Para cada $x^0 \in \mathbb{R}_{>0}^s$ definimos la clase de compatibilidad estequiométrica o clase de estequiometría:

$$S_{x^0} = (x^0 + S) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^s.$$

Decimos que $x, x' \in \mathbb{R}_{\geq 0}^s$ son **compatibles estequiométricamente**, si están en la misma clase de compatibilidad estequiométrica, o sea, si $x - x' \in S$. Las ecuaciones lineales de $x^0 + S$ dan las **leyes de conservación**. Hemos visto que algunas ecuaciones del sistema $f(x) = 0$ pueden ser redundantes: si la dimensión del subespacio S es $n < s$, entonces para definir V basta con tomar d ecuaciones linealmente independientes de entre las f_i .

Ejemplo 4.5. En el Ejemplo 3.1, observamos que

$$\frac{d}{dt}x_A - 2\frac{d}{dt}x_B - \frac{d}{dt}x_C = 0.$$

Luego, $x_A - 2x_B - x_C = c_1$, donde c_1 es una constante que depende de las condiciones iniciales $c_1 = x_A(0) - 2x_B(0) - x_C(0)$. Esto es, el vector de concentraciones $(x_A(t), x_B(t), x_C(t))$ pertenece a la variedad afín $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - z = c_1\}$ y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - z = 0\}$ es el subespacio de estequiometría de la red del Ejemplo 2.1.

Un sistema de acción de masas se dice que es consistente cuando existe al menos un s.s positivo.

Lema 4.1. Un sistema de acción de masas es **consistente** si y solo si $\text{Ker}(\Gamma) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^r \neq \emptyset$.

Ejemplo 4.6. Análogo que el ejemplo anterior por (3.2) obtenemos que

$$\frac{d}{dt}(x_A + x_B + x_C + x_D) = 0.$$

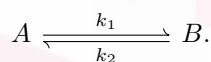
Lo que implica que $x_A + x_B + x_C + x_D = c_1$. Esto representa la conservación de la masa total de las especies A, B, C y D, lo cual es típico en sistemas cerrados. La ley de conservación encontrada nos dice que la suma de las concentraciones de todas las especies se mantiene constante a lo largo del tiempo. Esto puede interpretarse como una conservación de la cantidad total de materia presente en el sistema.

4.1. Multiestacionaridad

La multiestacionaridad en las redes de reacciones químicas ocurre cuando un sistema tiene más de un s.s bajo las mismas condiciones de parámetros y concentraciones iniciales. Esto significa que el sistema puede llegar a diferentes estados finales estables dependiendo de su trayectoria en el espacio de concentraciones. Esta propiedad es fundamental en las redes de reacciones bioquímicas, ya que ofrece un mecanismo de “interruptor” entre distintos estados de respuesta. Este fenómeno permite que sistemas de señalización celular generen múltiples resultados, aun cuando las concentraciones totales de las especies involucradas sean las mismas.

Definición 4.5. Decimos que una red de reacción química es **monoestacionaria** si solo hay un s.s positivo por clase de estequiometría.

Ejemplo 4.7. Consideremos el siguiente sistema que consta de dos especies químicas: A y B



Las ecuaciones diferenciales que describen las concentraciones x_A y x_B son:

$$\frac{dx_A}{dt} = -k_1x_A + k_2x_B,$$

$$\frac{dx_B}{dt} = k_1x_A - k_2x_B.$$

Al resolver este sistema, la curva de estados estacionarios positivos está dada por $x_A = \frac{k_2}{k_1}x_B$. La ley de conservación del sistema es:

$$x_A + x_B = C,$$

donde C es una constante. Ahora, sustituyendo x_A en la ecuación de ley de conservación,

$$\frac{k_2}{k_1}x_B + x_B = C.$$

Resolviendo para x_B :

$$x_B = \frac{C}{\frac{k_2}{k_1} + 1} = \frac{Ck_1}{k_1 + k_2}.$$

Finalmente, obtenemos:

$$x_A = \frac{k_2}{k_1}x_B = \frac{Ck_2}{k_1 + k_2}.$$

Las concentraciones en estado estacionario x_A y x_B están completamente determinadas por los parámetros k_1 , k_2 y la constante de conservación de masa C . Esto implica que el sistema tiene una única solución para el estado estacionario, lo que demuestra que es monoestacionaria.

Ejemplo 4.8. La red de reacción química del Ejemplo 2.2 es monoestacionaria por el Ejemplo 4.2.

Nos gustaría saber si una red de reacción química es monoestacionaria, sin necesidad de calcular los s.s positivos que según la complejidad de la red de reacción química, no siempre es sencillo de calcularlos. Martin Feinberg en [Fei19] define la deficiencia de una reacción y demuestra el **Teorema (deficiencia cero)** donde afirma que una red de reacción química con deficiencia cero implica monoestacionaridad.

Definición 4.6. La deficiencia de una red de reacción química denotada por d está dada por

$$d = m - l - n,$$

donde m : es el número de complejos de la red de reacción química, l : es el número de componentes conexas de la red de reacción química y n : es el rango de S .

Ejemplo 4.9. La red de reacción química del Ejemplo 2.1 tiene $d = 0$ y, por lo tanto, es monoestacionaria.

Ejemplo 4.10. La red de reacción química del Ejemplo 2.3 tiene $d = 1$, por lo tanto, no podemos asumir que es monoestacionaria.

Se dice que la red de reacción química G tiene la capacidad de multiestacionariedad, si existe una elección de constantes de reacción k y constantes de conservación total c tales que el sistema tenga dos o más estados estacionarios en la clase de compatibilidad estequiométrica determinada por

c.

Como observamos en el Ejemplo 4.10, aunque el criterio de deficiencia cero nos permitió concluir que la red no es monoestacionaria, esto no implica necesariamente que sea multiestacionaria. Para abordar esta cuestión con mayor precisión, a continuación presentaremos algunos resultados que nos permitirán determinar en un mayor número de casos si la red de reacción química descrita en el Ejemplo 2.3 es o no es multiestacionaria.

4.2. Multiestacionaridad e inyectividad

Existen varios métodos para determinar si una red de reacciones químicas con cinética de acción de masas tiene capacidad de presentar multiestacionariedad. Estos métodos pueden, tanto descartar, como garantizar la multiestacionariedad en ciertas clases de redes de reacción química. Por ejemplo, se pueden emplear criterios basados en los resultados de inyectividad.

En el análisis de redes de reacciones químicas, la inyectividad es una propiedad importante, ya que está relacionada con la existencia y unicidad de los s.s.

Definición 4.7. Sea $S \subset \mathbb{R}^s$ un subespacio vectorial. Decimos que una red de reacción química es **inyectiva** respecto a S si para todo $k \in \mathbb{R}_{>0}^r$ y para todo $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}^s$ tal que $x - y \in S$ y $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$.

Observación 4.1. De la definición podemos deducir que si f_k es inyectiva con $S = \text{Im}(\Gamma)$ para todo $k \in \mathbb{R}_{>0}^r$ implica que no puede haber multiestacionariedad.

Martin Feinberg [Fei19] desarrolló herramientas que permiten analizar la inyectividad de una red química sin necesidad de resolver todas las ecuaciones de manera explícita. Esto incluye el análisis de la estructura del jacobiano y el concepto de deficiencia. Los aportes de Feinberg han sido fundamentales para el análisis de sistemas complejos de reacciones químicas, permitiendo identificar la capacidad de una red de reacción química para ser multiestacionaria o monoestacionaria mediante métodos basados en la estructura algebraica y topológica de las ecuaciones de la red de reacción química. En lo queda del artículo, denotaremos por f_k a las funciones definidas en (11).

Determinar si para todo k , f_k es inyectiva podemos usar dos métodos: calculando los signos de determinados subdeterminantes o calculando el determinante de una matriz simbólica. Las siguientes subsecciones están dedicadas a estudiar estos dos métodos.

4.2.1. Inyectividad, signos y determinantes

Sean $\Gamma \in \mathbb{R}^{s \times r}$ y $y \in \mathbb{R}^{s \times r}$, definimos los siguientes conjuntos:

$$F := \{x \mapsto f_k, x \in \mathbb{R}_{>0}^s, k \in \mathbb{R}_{>0}^r\},$$

$$L := \{\Gamma \text{diag}(k)y^\top \text{diag}(\lambda) \mid k \in \mathbb{R}_{>0}^r, \lambda \in \mathbb{R}_{>0}^s\},$$

donde $\text{diag}(\lambda)$ denota la matriz diagonal con diagonal formada por elementos iguales a λ .

El primer conjunto consiste en todas las funciones polinomiales f_k cuyo dominio está restringido a $x \in \mathbb{R}_{>0}^s$, construidas a partir de matrices de coeficientes Γ y matrices de exponentes y . Es importante notar que cualquier aplicación polinomial que pertenezca a algún conjunto F , para alguna elección de matrices Γ y y , también pertenecen al segundo conjunto L . Este último está compuesto por aplicaciones matriciales que se obtienen al multiplicar Γ y $y^\top$, con la adición de vectores escalares asociados a parámetros adicionales.

Cuando el rango de Γ coincide con la dimensión de S , podemos aplicar un criterio, usando determinantes. Esta restricción sobre el rango se cumple en el caso de redes de reacciones, pues en este caso Γ es la matriz de estequiometría y $S = \text{Im}(\Gamma)$. Si el rango de Γ es s , podemos eliminar filas redundantes de Γ y suponer que Γ' tiene rango n .

Así pues, consideramos $\Gamma' \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $y \in \mathbb{R}^{s \times r}$ y $x, z \in \mathbb{R}_{>0}^s$ tales que $\dim(S) = n$. Para todo par de vectores $x, z \in \mathbb{R}_{>0}^s$ y $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}^s$, construimos una matriz $M_\lambda \in \mathbb{R}^{s \times s}$ de la siguiente manera:

$$M_{k,\lambda} = \begin{pmatrix} \Gamma \text{diag}(k)y^\top \text{diag}(\lambda) \\ W \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{s \times s}.$$

Las primeras $s - n$ filas de $M_{k,\lambda}$ son independientes de los parámetros y forman una base de $S^\perp$ que denotamos por W . Tenemos que $M_{k,\lambda}(x) = 0$ si y sólo si $x \in S$ y $x \in \ker(\Gamma \text{diag}(k)y^\top \text{diag}(\lambda))$. Por lo tanto, $\Gamma \text{diag}(k)y^\top \text{diag}(\lambda)$ define una aplicación inyectiva en S si y sólo si

$$\det(M_{k,\lambda}) \neq 0.$$

El determinante de $M_{k,\lambda}$ es un polinomio en términos de k y λ . Si todos los coeficientes del polinomio tienen el mismo signo y el polinomio no es idénticamente nulo, entonces

$$\det(M_{k,\lambda}) \neq 0, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{R}_{>0}^r \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}_{>0}^s,$$

y la familia L es inyectiva con respecto a S . El recíproco es cierto también en ese caso y da lugar al siguiente teorema:

Teorema 4.1 (Teorema 4, [Fei16]). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (inj) El conjunto F es inyectivo respecto a S .
- (lin) La aplicación lineal definida por cualquier matriz $M \in L$ es inyectiva en S .
- (det) Todos los coeficientes de $\det(M_{k,\lambda})$, como polinomio en k, λ , tienen el mismo signo y el polinomio no es idénticamente nulo.

Ejemplo 4.11. Para la red de reacción química del Ejemplo 2.3, la matriz $M_{k,\lambda}$ está dada por:

$$M_{k,\lambda} = \begin{pmatrix} -k_1\lambda_1 & k_2\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & k_6\lambda_6 \\ 0 & 0 & k_3\lambda_3 & -k_4\lambda_4 & k_5\lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4\lambda_4 & k_5\lambda_5 & k_6\lambda_6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\det(M_{k,\lambda}) = k_1k_3k_4\lambda_1\lambda_3\lambda_4 + k_2k_3k_4\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + k_1k_3k_5\lambda_1\lambda_3\lambda_5 + k_2k_3k_5\lambda_2\lambda_3\lambda_5 + k_1k_3k_6\lambda_1\lambda_3\lambda_6 + k_2k_3k_6\lambda_2\lambda_3\lambda_6 + k_1k_4k_6\lambda_1\lambda_4\lambda_6 + k_2k_4k_6\lambda_2\lambda_4\lambda_6 + k_3k_4k_6\lambda_3\lambda_4\lambda_6 + k_1k_5k_6\lambda_1\lambda_5\lambda_6 + k_2k_5k_6\lambda_2\lambda_5\lambda_6 + k_3k_5k_6\lambda_3\lambda_5\lambda_6.$$

Según el Teorema 4.1, se concluye que la función f_k , para todo $k \in \mathbb{R}_{>0}^r$ es inyectiva. Por lo tanto, la red de reacción química no presenta multiestacionaridad, ya que la inyectividad implica que no existen múltiples estados estacionarios compatibles con las mismas condiciones iniciales.

Definición 4.8. Dado un conjunto $Z \subseteq \mathbb{R}^s$, definimos el **conjunto de signos en Z** como

$$\sigma(Z) := \{\text{sign}(z) \mid z \in Z\},$$

donde $\text{sign}(z) = (\text{sign}(z_1), \dots, \text{sign}(z_s))$ es el vector de signos de z , componente a componente.

El conjunto $\sigma^{-1}\sigma(S)$ está formado por todos los puntos de $\mathbb{R}^s$ que tienen el mismo signo que algún elemento en S .

A continuación, presentamos el resultado desarrollado por Müller, Feliu, Regensburger, Conradi, Shiu y Dickenstein en [SMea16], donde se abordó un análisis profundo sobre la inyectividad en sistemas de redes de reacciones químicas. Este teorema representa un avance significativo en la teoría, proporcionando una herramienta más robusta para determinar la inyectividad de estos sistemas y, en consecuencia, la ausencia de multiestacionaridad bajo condiciones generales.

Teorema 4.2 (Teorema 1.4 [SMea16]). Sea $f_k: \mathbb{R}_{>0}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ el mapeo polinómico generalizado $f_k(x) = \Gamma x^y$, donde $\Gamma \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $y \in \mathbb{R}^{s \times r}$ y $k \in \mathbb{R}_{>0}^r$. Además, sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y $S^* = S - \{0\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. **(inj)** f_k es inyectiva con respecto a S , para todo $k \in \mathbb{R}_{>0}^r$.
2. **(jac)** $\ker(J_{f_k}(x)) \cap S^* = \emptyset$, para todo $k \in \mathbb{R}_{>0}^r$ y $x \in \mathbb{R}_{>0}^s$.
3. **(lin)** $\ker(\Gamma \text{diag}(k) y^t \text{diag}(\lambda)) \cap S^* = \emptyset$, para todo $k \in \mathbb{R}_{>0}^r$ y $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}^s$.
4. **(sig)** $\sigma(\ker(\Gamma)) \cap \sigma(y(\Sigma(S^*))) = \emptyset$.

Este enfoque consiste en calcular el determinante de la matriz jacobiana de las f_k , apoyándose en las propiedades de las matrices y de la red de reacción química estequiométrica. Esto nos permite determinar si el sistema es inyectivo, lo cual es clave para entender la existencia y unicidad de los s.s en sistemas de reacciones químicas.

Según el Teorema 4.2 si el determinante de la matriz jacobiana es siempre no cero, esto indica que el sistema es inyectivo, es decir, que tiene un único s.s para cada conjunto

de condiciones iniciales y si el determinante de la matriz jacobiana se anula en algún punto, entonces el sistema puede tener múltiples s.s indicando no inyectividad.

En el siguiente ejemplo estudiaremos la inyectividad de la red de reacción química descrita en el Ejemplo 2.3.

Ejemplo 4.12. La matriz jacobiana del sistema cinético de la red de reacción química 2.3 está dada por la siguiente matriz:

$$J = \begin{bmatrix} -k_1x_E + k_6x_F & -k_1x_S & k_2 & 0 & k_6x_S & 0 \\ -k_1x_E + k_3x_Ex_{S_p} & -k_1x_S + k_3x_{S_p}x_S & k_2 & k_3x_Ex_S & 0 & 0 \\ k_1x_E - k_3x_Ex_{S_p} & k_1x_S - k_3x_{S_p}x_S & -k_2 & -k_3x_Ex_S & 0 & 0 \\ k_3x_Ex_{S_p} - k_4x_F & k_3x_{S_p}x_S & 0 & k_3x_Ex_S & -k_4x_S & -k_5 \\ -k_4x_F + k_6x_F & 0 & 0 & 0 & -k_4x_S + k_6x_S & k_5 \\ k_4x_F - k_6x_F & 0 & 0 & 0 & k_4x_S - k_6x_S & -k_5 \end{bmatrix}.$$

Dado que el determinante de la matriz jacobiana $|J| = 0$, ya que las filas 4 y 5 son múltiplos escalares, se sigue que $\ker(J_{f_k}(x))$ es no trivial. Por lo tanto,

$$\ker(J_{f_k}(x)) = \left\{ \left(0, \frac{-x_E}{x_{S_p}}, \frac{-k_1x_Ex_S}{k_2x_{S_p}}, 1, 0, 0\right), \left(\frac{x_S}{x_F}, \frac{x_E}{x_F}, 0, 0, 1, 0\right) \right\}$$

Y luego, por el Ejemplo 4.4, tenemos que $\ker(J_{f_k}(x)) \cap S^* = \emptyset$. Finalmente, aplicando el Teorema 4.2, concluimos que f_k es inyectiva y, por lo tanto, no es multiestacionaria.

Las redes de reacciones químicas en aplicaciones reales pueden ser considerablemente más complejas, con muchas más especies y reacciones que las expuestas en este artículo. Esta complejidad presenta retos y desafíos teóricos y computacionales, que incluyen el desde el estudio de la estabilidad, la detección de multiestacionaridad hasta la inferencia de parámetros cinéticos basándose en datos experimentales. Estos desafíos abiertos siguen motivando a investigadores en la creación de nuevas herramientas matemáticas y métodos computacionales para comprender el comportamiento de las redes de reacción químicas en otros contextos.

5. Agradecimientos.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a las profesoras Angélica Torres y Beatriz Pascual por su dedicación y por todo lo que nos han enseñado en el curso de redes en reacciones químicas durante la Escuela de Verano EMALCA. Su compromiso y conocimiento han sido fundamentales para mi aprendizaje y la escritura de este artículo. También quisiera agradecer a los organizadores de la escuela por la oportunidad de participar y por todos los beneficios que está experiencia me ha brindado. Y también un agradecimiento a la profesora Claudia Granados por ser un apoyo en todos los aspectos de mi vida y por motivarme a participar en la escuela.

Referencias.

- [RAaTC65] Rutherford Aris and Truesdell C, *Prolegomena to the rational analysis of systems of chemical reactions*, Archive for rational mechanics and analysis **19** (1965), 81–99.

- [GCaMF05] Gheorghe Craciun and Martin Feinberg, *Multiple equilibria in complex chemical reaction networks: I. The injectivity property*, SIAM Journal on Applied Mathematics **65** (2005), no. 5, 1526–1546.
- [Fei19] Martin Feinberg, *Foundations of chemical reaction network theory*, Springer, 2019.
- [MFaGS10] Martin Feinberg and Guy Shina, *Structural sources of robustness in biochemical reaction networks*, Science **327** (2010), no. 5971, 1389–1391.
- [Fel16] Elisenda Feliu, *Sobre las soluciones positivas de sistemas de polinomios parametrizados en biología*, Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española **19** (2016), no. 1, 113–132.
- [Gia19] Magalí Paola Giaroli, *Multiestacionariedad en redes de reacciones bioquímicas y soluciones positivas de sistemas polinomiales raros*, Universidad de Buenos Aires, 2019.
- [Gun03] Jeremy Gunawardena, *Chemical reaction network theory for in-silico biologists*, Notes available for download at <http://vcp.med.harvard.edu/papers/crnt.pdf> **5** (2003).
- [Har92] Joe Harris, *Algebraic geometry: a first course*, Vol. 133, Springer Science & Business Media, 1992.
- [FHaRJ72] Fritz Horn and Roy Jackson, *General mass action kinetics*, Archive for rational mechanics and analysis **47** (1972), 81–116.
- [IBP13] Ingalls Brian P, *Mathematical Modeling in Systems Biology: An Introduction*, MIT Press, Cambridge, MA, 2013.
- [McK95] Timothy W. McKeithan, *Kinetic proofreading in T-cell receptor signal transduction*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **92** (1995), no. 11, 5042–5046.
- [SMea16] Stefan Müller et al., *Sign conditions for injectivity of generalized polynomial maps with applications to chemical reaction networks and real algebraic geometry*, Foundations of Computational Mathematics **16** (2016), no. 1, 69–97.
- [BPEyAT22] Beatriz Pascual Escudero y Angélica Torres, *Herramientas algebraicas y combinatorias para el estudio de sistemas dinámicos polinomiales*, Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española **25** (2022), no. 2, 299–325.
- [BS02] Bernd Sturmfels, *Solving systems of polynomial equations*, American Mathematical Soc, 2002.
- [PWaCG86] Peter Waage and Cato Guldberg, *Studies concerning affinity*, Journal of chemical education **63** (1986), no. 12, 1044.

Acerca de la autora: Astrid Liliana Contreras Mendoza es matemática egresada de la Universidad Industrial de Santander y también Magíster en Matemáticas de la misma universidad. Es una apasionada por las matemáticas, la enseñanza y la investigación. Sus áreas de investigación son el álgebra, la geometría y ahora la CNRT.

MateKuento



El Último Ajuste

Ocurrió en 2039. Un año extraño, en el que el cielo parecía estar repleto de sombras ocultas y los radares registraban presencias difíciles de reconocer. Videos de objetos que cuestionaban las leyes de la física se inundaban en las redes sociales, y aquellos que los divulgaban eran ridiculizados de manera habitual. Aunque esto no era nada extraordinario, pues desde hace más de 90 años se habían escuchado historias de este tipo, atribuyéndolas a la intervención de seres extraterrestres... pese a no tener evidencia científica.

En diversos terrenos de cultivo alrededor del mundo, iban apareciendo formas geométricas inusuales. Círculos perfectos, nudos matemáticos, y símbolos que nadie podía descifrar. Los medios los denominaban “círculos de las cosechas”, y la mayoría los atribuían a humoristas o artistas singulares.

Pero esta vez era diferente, porque quienes se acercaban demasiado a los símbolos, reportaban mareo y visiones fugaces.

Y entonces, ellos llegaron.

No en una invasión, ni con una gran revelación, como se muestra en las películas de ciencia ficción. No se anunciaron con luces ni con trompetas celestiales. Simplemente aparecieron.

Una nave que no brillaba ni reflejaba luz aterrizó en el desierto de Nevada, con un diseño que parecía cambiar sutilmente cada vez que se le miraba. Científicos y militares se reunieron con cautela, esperando el primer contacto.

La compuerta se abrió sin sonido, y los seres salieron. No había en su forma nada abiertamente monstruoso, pero su silueta era... inestable. Como si no ocuparan un solo espacio definido, sino que fluctuaran en estados distintos. Caminaban con un ritmo que desafiaba la intuición, como si avanzaran en dimensiones invisibles para el ojo humano.

El doctor Devers, uno de los principales científicos del equipo de contacto, fue el primero en intentar comunicarse. No habló, ni levantó la mano en señal de saludo. En su lugar, tomó una pizarra y escribió en ella un único número:

1

Lo sostuvo en alto, con la confianza de un hombre que cree estar haciendo algo obvio.

Más tarde nos explicó su decisión. El lenguaje hablado es ambiguo. La escritura es cultural. Pero las matemáticas son

universales. Si estos seres habían desarrollado tecnología suficiente para cruzar el espacio, debían conocer los mismos principios que nosotros. Si había algo en lo que podíamos coincidir, era en los números.

Los seres no reaccionaron.

Devers frunció el ceño y añadió otra ecuación a su pizarra:

$$2 + 2 = 4$$

Entonces, uno de ellos inclinó su cabeza, como si estuviera observando algo profundamente extraño, algo que desafiaba su propia percepción. Algo ocurrió. En el aire, frente a nosotros, apareció una serie de formas geométricas que se reorganizaban constantemente. Estaban traduciendo nuestros números a su propio lenguaje, pero, también los habían convertido en algo más, algo que parecía existir en un plano matemático completamente distinto al nuestro.

Y finalmente, respondieron.

No con palabras, sino con símbolos que parecían moverse incluso después de haber sido escritos. No representaban cantidades, sino transiciones entre estados, operaciones sin equivalencia en nuestra aritmética. Era como si, en su realidad, los números no existieran, solo los cambios entre un estado y otro.

A cada intento de traducción, la sensación de inquietud crecía. Cada nuevo descubrimiento parecía erosionar la certeza de nuestra propia realidad.

Devers fue quien lo comprendió primero.

- No están tratando de aprender nuestra matemática - dijo una noche, con la mirada perdida -. Nos están mostrando la verdadera.

A partir de ese momento, dejó de hablar con los demás. Se encerró en su laboratorio, obsesionado con encontrar correspondencias entre la estructura de los seres y la nuestra. Cuando lo encontramos, su pizarra estaba llena de símbolos que no pertenecían a ningún lenguaje terrestre. Su última nota decía:

“Ellos no ven el universo como nosotros. No hay cosas, solo cambios. No hay números, solo transiciones. Para ellos, lo que llamamos realidad no es más que un estado transitorio dentro de una estructura mayor que no podemos percibir.”

Esa noche, Devers desapareció. No hubo señales de lucha, ni rastros de huida. Simplemente dejó de estar allí.

Los seres se marcharon poco después, dejando tras de sí un único símbolo grabado en el suelo con una precisión imposible. Lo habíamos analizado bajo todas las herramientas matemáticas conocidas: teoría de patrones, simetrías, combinaciones... Nada encajaba.

Y, sin embargo, cada vez que alguien miraba el símbolo durante demasiado tiempo... algo en su mente cambiaba. No podían explicarlo con palabras. Solo repetían, en un susurro casi inaudible:

“Ellos no se fueron. Solo se transformaron.”

Sellamos la zona. Bloqueamos toda investigación. El símbolo fue cubierto con concreto y clasificado como “anomalía inexplicable”. El gobierno cerró el caso con el predecible sello de “desinformación”.

Pero algo había cambiado.

Los que habíamos estado expuestos al símbolo comenzamos a experimentar... lagunas. Momentos en los que la realidad parecía fragmentarse. Un paso que duraba demasiado. Un objeto que, por un instante, parecía no estar donde debería. Ecos de palabras que nunca habíamos pronunciado.

Algunos intentaron ignorarlo. Otros, como yo, no pudimos.

Reuní a los últimos que quedábamos del equipo original. Riose, Darrell y Devers habían desaparecido. Pero aún estábamos el doctor Seldon, Dornick y yo. Nos refugiábamos en un laboratorio subterráneo, revisando cada ecuación que Devers había dejado.

Fue Seldon quien hizo el descubrimiento final.

- Los símbolos en los campos de cultivo - dijo, señalando una serie de fotografías -. Son operadores de transformación.

Lo miré con incredulidad.

- ¿Operadores?

- Sí - respondió -. Como los que usan en física cuántica para describir cambios de estado. Pero estos no operan en partículas subatómicas. Operan en la realidad misma.

Dornick encendió un monitor. Mostraba patrones captados por un radiotelescopio. Eran idénticos al símbolo. Pero ahora no estaban en el suelo. Estaban en el cielo.

No era un simple mensaje. Era un proceso.

La corrección estaba en marcha.

En ese preciso momento, mientras los símbolos brillaban en el cielo, mientras la atmósfera vibraba con la presencia de algo incomprensible, lo comprendí. La humanidad no debía existir. Desde una perspectiva cósmica, nuestra especie era un error, una fluctuación incontrolada dentro de una estructura matemática perfecta.

No éramos más que una disonancia, una solución incorrecta en una ecuación que nunca debió permitirnos ser. Los seres, en su indescifrable naturaleza, no solo nos observaban: nos corregían. El universo, en su vasta exactitud, debía borrar nuestra presencia, como quien elimina una ecuación falsa de una serie de cálculos precisos.

Y lo peor era que ni siquiera éramos conscientes de ello. Nuestra existencia era solo un desajuste en los números fundamentales que regían la realidad. Cada segundo que pasaba,

la corrección se acercaba más, mientras nosotros continuábamos sin saberlo, atrapados en nuestra insignificancia.

El mundo siguió su curso. Las personas vivían sus vidas, ajenas a la estructura que colapsaba bajo sus pies. Pero nosotros lo sabíamos. Veíamos cómo la realidad se deslizaba, cómo ciertas cosas cambiaban sin que nadie más lo notara.

Pequeños detalles, al principio. Nombres que no encajaban. Calles que habían existido siempre pero que ninguno recordaba.

Luego, ocurrió algo peor.

Algunas personas comenzaron a olvidar cosas más grandes. Otros, como nosotros, comenzaron a ver las sombras. Figuras que no eran los visitantes, sino algo diferente. Algo que intentaba sujetarse a esta realidad que se deshacía.

Nosotros también éramos anomalías.

Y entonces comprendimos el último mensaje de Devers:

“Ellos no nos visitaron. Siempre han estado aquí.”

Los seres no eran visitantes de otro mundo. No eran dioses ni exploradores. Eran... custodios. Sí, entidades encargadas de mantener la coherencia matemática del universo.

Y nosotros éramos una incoherencia.

El último cálculo que hicimos mostró una fecha.

El día final.

El momento en el que la corrección se completaría.

Cuando la estructura real del universo terminara de absorber nuestra falsa noción de espacio y tiempo.

Hoy es esa fecha.

Estoy escribiendo esto en un mundo que, matemáticamente, ya no debería existir.

En los días previos al día final, Seldon y Dornick trabajaron sin descanso para descifrar el significado completo de los símbolos. Lo que descubrieron fue aterrador y fascinante.

Los símbolos no eran meras representaciones estáticas, sino ecuaciones dinámicas que describían transformaciones en el tejido mismo de la realidad. Cada línea, cada curva, representaba un operador de transformación que actuaba sobre las variables fundamentales del universo: espacio, tiempo, energía y materia.

Uno de los símbolos más recurrentes parecía representar una ecuación diferencial no lineal, aunque los términos no tenían equivalencia en nuestras matemáticas. Seldon lo llamó “el operador de transición”, una función que describía cómo una realidad podía transformarse en otra.

- Es como si el universo fuera una ecuación gigante - explicó Seldon -, y estos símbolos fueran las instrucciones para resolverla. Pero no estamos viendo la solución completa, solo un paso intermedio.

Dornick, por su parte, se obsesionó con la idea de que los símbolos eran una forma de código fuente cósmico.

- Si pudiéramos entenderlo - dijo -, podríamos predecir cómo y cuándo ocurrirá la corrección.

Sin embargo, cada vez que intentaban traducir los símbolos a nuestras matemáticas, algo fallaba. Las ecuaciones no

convergían y las computadoras se colapsaban bajo la carga de cálculos imposibles.

Fue entonces cuando Seldon hizo una observación crucial.

- No estamos tratando con números - dijo -. Estamos tratando con relaciones. Los símbolos no representan cantidades, sino cómo las cantidades se relacionan entre sí. Es como si el universo fuera una red de conexiones, y estos símbolos fueran las reglas para reconfigurar esa red.

El día final llegó de improvisto.

El cielo se oscureció por una ausencia de luz. Los símbolos en los campos de cultivo comenzaron a brillar con una intensidad cegadora, y el aire se llenó de un zumbido grave que resonaba en los huesos.

En el laboratorio, Seldon y Dornick intentaron desesperadamente completar sus cálculos.

- ¡Tenemos que encontrar la invariante! - gritó Seldon -. Si podemos encontrar una cantidad que no cambie bajo la transformación, podríamos estabilizar la realidad.

Pero era demasiado tarde.

El operador de transición había comenzado a actuar.

El mundo a nuestro alrededor comenzó a desvanecerse en una lenta y silenciosa disolución. Las paredes del laboratorio se volvieron translúcidas, luego transparentes, y finalmente desaparecieron por completo.

Miré a Seldon y Dornick, pero ya no estaban allí. En su lugar, vi sombras que se desvanecían en la nada.

Y entonces, lo entendí.

No éramos más que variables en una ecuación cósmica, y el universo estaba siendo resuelto.

Los símbolos en el cielo brillaron con una última explosión de luz, y todo se volvió oscuridad.

Epílogo

No sé cómo puedo estar escribiendo esto.

No debería existir.

Pero aquí estoy, en un lugar que no es un lugar, en un tiempo que no es un tiempo.

Los símbolos han desaparecido, y con ellos, la realidad que conocíamos.

Pero algo ha quedado.

Una ecuación, simple y elegante, flotando en la nada.

No puedo leerla, pero sé lo que significa.

Es el operador de transición.

Y está esperando a que alguien lo active de nuevo.

Leidy Catherine Sánchez Ascanio

leidyc.sancheza@konradlorenz.edu.co

Acerca de la autora: Leidy es ingeniera industrial y matemática. Aunque tiene muchos intereses, la escritura ocupa un lugar especial entre sus pasatiempos preferidos.

Política Editorial

El Paskín Matemático es una producción del Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Está abierto a todos y todas. Si tienes interés en escribir un artículo con cualquier tipo de contenido matemático, reseñar a un personaje, comentar un problema o tienes comentarios sobre nuestra publicación, envía un mensaje a paskin@konradlorenz.edu.co

$$\sum_{i \neq j}^n F_i = G \frac{m_i m_j}{d(r_i, r_j)^2}$$

El Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz fue creado en 1998. Conoce más acerca de nuestro programa en nuestra página institucional

<https://www.konradlorenz.edu.co/programas/matematicas/>

Bogotá, Colombia. 2025

PASKÍN MATEMÁTICO

Volumen 7, No. 1, 2025

Contenido

- Mario Andrés Medina Barrera
Números primos de la forma $x^2 + ny^2$ y casos particulares 1
- Alejandra T. Manotas
¿Qué son las cónicas?..... 9
- Mariam Pinto Heydler y César Augusto Lara Santana
Estimación de un modelo de ecuaciones estructurales para informalidad
laboral 14
- Astrid Liliana Contreras Mendoza
Multiestacionaridad e Inyectividad: Un enfoque desde la geometría al-
gebraica 23
- Leidy Catherinne Sánchez
MateKuento..... 32

*Las matemáticas son el arte de dar el mismo nombre
a objetos diferentes.*

Henri Poincaré

**KONRAD
LORENZ**
FUNDACIÓN UNIVERSITARIA