



El control de procesos en la manufactura

ALTERNATIVAS A LOS GRÁFICOS DE
CONTROL SINTÉTICOS Y SU OPTIMIZACIÓN

Gustavo Andrés Campos Avendaño

Catalogación en la publicación Fundación Universitaria Konrad Lorenz

Campos Avendaño, Gustavo Andrés

670
C157c

El control de procesos en la manufactura alternativas a los gráficos de control sintéticos y su optimización / Gustavo Andrés Campos Avendaño. -- Bogotá : Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Facultad de Matemáticas e Ingenierías. Centro de investigaciones, 2017.

224 p.: tablas.

Incluye bibliografía.

ISBN: 978-958-58047-1-5

1. Procesos de manufactura 2. Control de calidad 3. Estadísticas 4. Métodos gráficos

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA KONRAD LORENZ

RECTORA

Lina Uribe Correa

VICERRECTOR

Aldo Hernández Barrios

DIRECTORA GESTIÓN Y TRANSFERENCIA DEL CONOCIMIENTO

Jenny Paola Lis Gutiérrez

DECANO FACULTAD MATEMÁTICAS E INGENIERÍAS

Carlos Alberto Díez Fonnegra

COLECCIÓN

Avances

Fundación Universitaria Konrad Lorenz

Carrera 9A núm 62-27

Bogotá, Colombia

AUTOR

Gustavo Andrés Campos Avendaño

CORRECCIÓN DE ESTILO

Ana Tolosa

DISEÑO GRÁFICO EDITORIAL, ARMADA ELECTRÓNICA E INTERACTIVIDAD

Proceditor Ltda.

ISBN electrónico

978-958-58047-1-5

DOI: <https://doi.org/10.14349/9789585804715>

Primera edición 2017. Bogotá, D. C. 2017.

Konrad Lorenz Editores

Carrera 9A núm 62-27, Edificio central

Teléfono: (57) (1) 3472311 ext. 219

Bogotá, Colombia

Hecho en Bogotá, Colombia

Atribución – No comercial – Sin derivar: permite que otros puedan descargar las obras y compartirlas con otras personas, siempre que se reconozca su autoría, pero no se pueden cambiar de ninguna manera ni se pueden utilizar comercialmente.





EL CONTROL DE PROCESOS EN LA MANUFACTURA

ALTERNATIVAS A LOS GRÁFICOS DE CONTROL SINTÉTICOS Y SU OPTIMIZACIÓN

Gustavo Andrés Campos Avendaño

Ingeniero Industrial (Universidad Distrital Francisco José de Caldas)

Doctor en Estadística y Optimización (Universidad Politécnica de Valencia)

Director del Centro de investigaciones Facultad de Matemáticas e Ingenierías

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
gustavo.campos@konradlorenz.edu.co
Carrera 9 bis núm. 62-43

Resumen

En el entorno productivo y de manufactura, el control estadístico de procesos (SPC, por sus siglas en inglés) es una herramienta ampliamente utilizada para mantener la calidad del producto fabricado. Dentro del SPC, los gráficos de control han sido objeto de innumerables investigaciones encaminadas a aumentar su desempeño. Esto es debido a que los clásicos gráficos de control $\bar{X}$ de Shewhart y S de Shewhart, aunque de uso muy extendido, presentan la desventaja de su poca efectividad para detectar cambios pequeños o moderados en la media y en la desviación del proceso respectivamente.

Para intentar mitigar dicha dificultad, diferentes autores han planteado numerosas alternativas a los mencionados gráficos de control, entre las más destacadas se encuentran los gráficos con reglas adicionales, EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*), Cusum (*cumulative sum*) con tamaño de muestra e intervalo de muestreo variable, sintéticos, etc.

En el presente libro de investigación se estudian, caracterizan y optimizan dos nuevos gráficos de control. El denominado $\bar{X}$ - RL_2 , que combina un gráfico de control $\bar{X}$ de Shewhart con un gráfico RL_2 y el S - RL_2 , que combina el gráfico S de Shewhart con un gráfico RL_2 . Con estos nuevos gráficos se mejora el desempeño de los clásicos gráficos $\bar{X}$ y S para ciertos tamaños de muestra y magnitudes de cambio de diseño establecidos. De igual manera, tanto el gráfico de control $\bar{X}$ - RL_2 como el S - RL_2 presentan un desempeño superior a los gráficos sintéticos para ciertos parámetros de diseño.

Adicionalmente, el desempeño de los gráficos de control $\bar{X}$ - RL_2 se compara con el de los gráficos con reglas adicionales, gráficos Cusum y EWMA, y el desempeño del gráfico S - RL_2 se compara con el de los gráficos Cusum S y EWMA S , con resultados ventajosos en algunos casos.

Todas las comparaciones se realizan en el escenario *zero-state* usando la métrica del *ARL* (*Average Run Length*), definida como el promedio de puntos en un gráfico hasta que aparece una señal de fuera de control. De igual manera se realizaron simulaciones computacionales para contrastar los resultados obtenidos.

Abstract

Within the production and manufacturing environment, statistical process control (SPC) is a widely used tool to maintain quality of the manufactured products. Within the SPC, the control charts have been the object of numerous investigations, all aimed to increase the effectiveness of them. This is because the classical Shewhart $\bar{X}$ and Shewhart S control charts, although they are widely used; they have the disadvantage of its limited effectiveness in detecting small or moderate changes in the mean and the standard deviation of the process respectively.

To try to mitigate this difficulty, several authors have proposed many alternatives for the above control charts. Among the most outstanding ones that one can find are the control charts with run rules, *EWMA* and *Cusum* control charts, variable sample sizes and variable sampling interval control charts, synthetic control charts, etc.

In the actual research book two new control charts are being studied, characterized and optimized. The first one is the $\bar{X}$ - RL_2 control chart that combines the Shewhart $\bar{X}$ control chart with a RL_2 control chart. The second one is the S - RL_2 control Chart that combines the Shewhart S control chart with a RL_2 control chart. With these newly developed control charts the power of the classical $\bar{X}$ and S control charts (proposed by Dr. Walter Shewhart for certain sample sizes and magnitudes of change established design) can be enhanced. Likewise, the $\bar{X}$ - RL_2 and the S - RL_2 control charts showed a better performance in comparison with the synthetic control charts for certain parameters design.

In addition, the effectiveness of $\bar{X}$ - RL_2 control charts is compared with the effectiveness of control charts with run rules, *Cusum* and *EWMA* control charts. Correspondingly, the performance of the S - RL_2 control chart is compared to *Cusum* S and *EWMA* S control charts, with beneficial results in some cases.

All comparisons were performed on the zero-state scenario using the *ARL* measure (*Average Run Length*). The *ARL* is defined as the average of points on a control chart until a one point plots out of control. Computer simulations were performed to verify the results.

› Contenido

Capítulo I

Introducción y objetivos 15

- 1.1 Generalidades 15**
- 1.2 Planteamiento del problema 16**
- 1.3 Objetivo general 18**
- 1.4 Objetivos específicos 18**

Capítulo II

Metodología..... 19

- 2.1 Etapas de la investigación 19**
 - 2.1.1 Concepción de la idea de investigación 19
 - 2.1.2 Revisión bibliográfica 19
 - 2.1.3 Planteamiento del problema de investigación 19
 - 2.1.4 Caracterización y diseño de los gráficos de control propuestos 19
 - 2.1.5 Resolución las de expresiones establecidas..... 20
 - 2.1.6 Simulación de los gráficos de control propuestos 20
 - 2.1.7 Comparación y análisis de resultados 20
 - 2.1.8 Elaboración del reporte de investigación 20
- 2.2 Restricciones de la investigación 20**
- 2.3 Estructura del libro de investigación..... 20**

Capítulo III

Antecedentes..... 23

- 3.1 Generalidades 23**
- 3.2 Gráficos de control..... 24**
 - 3.2.1 Generalidades..... 24
 - 3.2.2 Tipos de gráficos de control..... 25
 - 3.2.2.1 Por variables..... 27
 - 3.2.2.2 Por atributos 30
 - 3.2.3 Para la media..... 30**
 - 3.2.3.1 Capacidad de detección para el gráfico de la media 32
 - 3.2.4 Para monitorear la dispersión..... 36**
- 3.3 Cadenas de Markov en los gráficos de control 38**

3.4	Gráficos de control basados en la distribución binomial negativa	41
3.4.1	Generalidades.....	41
3.4.2	Gráfico de control CRL	42
3.4.3	El gráfico RL_2	44
3.4.4	Otros trabajos basados en la distribución binomial negativa	48
3.5	Gráficos de control sintéticos.....	49
3.5.1	Para la media	49
3.5.2	Para monitorear la desviación.....	50

Capítulo IV

Diseño y optimización del gráfico $\bar{X}-RL_2$53

4.1	Generalidades	53
4.2	Diseño	53
4.3	Dinámica	55
4.4	Obtención del ARL	57
4.5	Obtención de límites para un ARL bajo control.....	59
4.6	Cálculo del ARL fuera de control	61
4.7	Optimización	63
4.8	Comprobación de parámetros y valores de ARL	69
4.9	Desempeño	71
4.9.1.	El gráfico de control $\bar{X}-RL_2$ frente al gráfico $\bar{X}$ de Shewhart.....	72
4.9.2	El gráfico de control $\bar{X}-RL_2$ frente al gráfico sintético para la media	76
4.9.3	El gráfico de control $\bar{X}-RL_2$ frente al gráfico $\bar{X}$ con reglas adicionales	80
4.9.4	El gráfico de control $\bar{X}-RL_2$ frente al gráfico Cusum y EWMA	82

Capítulo V

Diseño y optimización del Gráfico $S-RL_2$85

5.1	Generalidades	85
5.2	Para incrementos: gráfico $S-RL_2-U$	86
5.2.1	Dinámica del gráfico de control $S-RL_2-U$	87
5.2.2	Obtención del ARL para el gráfico de control $S-RL_2-U$	87
5.2.3	Obtención de límites del gráfico $S-RL_2-U$ para un ARL bajo control	90
5.2.4	Cálculo del ARL fuera de control para el gráfico de control $S-RL_2-U$	91
5.2.5	Optimización.....	92
5.2.6	Desempeño.....	95
5.2.6.1	Gráfico de control $S-RL_2-U$ frente al gráfico S de Shewhart.....	96

5.2.6.2	Gráfico $S-RL_2-U$ frente al gráfico sintético para incrementos en la desviación	100
5.2.6.3	Gráfico de control $S-RL_2-U$ frente al gráfico Cusum S y $EWMA S$ para detectar incrementos en la desviación n	106
5.3	Diseño del gráfico $S-RL_2$ para decrementos: gráfico $S-RL_2-L$.....	108
5.3.1	Dinámica del gráfico de control $S-RL_2-L$	110
5.3.2	Obtención del ARL para el gráfico de control $S-RL_2-L$	110
5.3.3	Obtención del ARL para el gráfico de control $S-RL_2-L$	114
5.3.4	Cálculo del ARL fuera de control para el gráfico de control $S-RL_2-L$	115
5.3.5	Optimización.....	116
5.3.6	Desempeño	118
5.3.6.1	Gráfico de control $S-RL_2-L$ frente al gráfico S de Shewhart para detectar decrementos....	118
5.3.6.2	Gráfico $S-RL_2-L$ frente al gráfico sintético para decrementos en la desviación.....	123
5.3.6.3	Gráfico de control $S-RL_2-L$ frente al gráfico Cusum S y $EWMA S$ para detectar decrementos en la desviación	127
5.4	Diseño bilateral: gráfico $S-RL_2-C$.....	127
5.4.1	Dinámica.....	129
5.4.2	Obtención del ARL	131
5.4.3	Obtención límites del gráfico $S-RL_2-C$ para un ARL bajo control.....	133
5.4.4	Cálculo del ARL fuera de control	135
5.4.5	Optimización.....	136
5.4.6	Diseño del gráfico de control $S-Synth-C$	137
5.4.7	Desempeño	139
5.5	Comprobación de parámetros y valores de ARL	141

Capítulo VI

Conclusiones y futuros trabajos de investigación	145
--	-----

6.1	Gráfico de control $\bar{X}-RL_2$	146
6.2	Gráfico de control $S-RL_2$	147
6.3	Futuros trabajos de investigación	150

Referencias	151
-------------------	-----

Anexos.....	157
-------------	-----

A.	Tablas con valores óptimos gráfico $\bar{X}-RL_2$	158
B.	Tablas con valores óptimos gráficos $S-RL_2-U$ y $S-RL_2-L$	170
C.	Códigos desarrollados en el programa Mathcad 14 y Matlab R2009b	202

› Índice de tablas

Tabla 3.1	Prueba de hipótesis.....	31	Tabla 5.7	Comparación entre Cusum S y $S-RL_2-U$ caso $ARL(1) = 200$	106
Tabla 3.2	Límites para RL_2	46	Tabla 5.8	Comparación entre Cusum S Cusum S^2 y $S-RL_2-U$ caso $ARL(1) = 500$	107
Tabla 4.1	Valor límites de control L y $ZARL(0) = 370$	61	Tabla 5.9	Comparación entre Cusum S, EWMA S y SRL_2-U caso $ARL(0) = 500, n = 5$	108
Tabla 4.2	Valores ARL fuera de control: caso ARL bajo control 370, $n = 4$	65	Tabla 5.10	Valores límites de control LS y K^*	114
Tabla 4.3	Búsqueda de parámetros óptimos caso ARL bajo control 370, $n = 4$	65	Tabla 5.11	Valores ARL fuera de control caso ARL bajo control 370, $n = 10$	116
Tabla 4.4	Valores óptimos de $ARL(\delta'_a)$: caso ARL bajo control 370, δ_a 0.1 a 1.....	67	Tabla 5.12	Valores óptimos de $ARL(\delta'_a)$ para el gráfico $S-RL_2-L$	117
Tabla 4.5	Comparación de ARL bajo control teórico y simulado.....	70	Tabla 5.13	Compración de ARL entre gráfico S y $S-RL_2-L$	119
Tabla 4.6	Comparación de ARL fuera de control teórico y simulado para $n = 4$	71	Tabla 5.14	Comparación de ARL entre los gráficos sintético para decrementos en la desviación y gráfico $S-RL_2-L$	123
Tabla 4.7	Comparativa caso ARL bajo control 200 y 370.....	73	Tabla 5.15	Comparación ARL , Cusum, EWMA y $S-RL_2-L$ $ARL(1) 200$	127
Tabla 4.8	Comparación de $ARL(\delta_a)$ caso $ARL(0) = 370$	77	Tabla 5.16	Valores de límites de control.....	134
Tabla 4.9	Comparación de $ARL(\delta_a)$ caso $ARL(0) = 500$	77	Tabla 5.17	Valores de ARL fuera de control caso ARL bajo control 370, $n = 15$	136
Tabla 4.10	Comparación de $ARL(\delta_a)$ caso $ARL(0) = 1000$	78	Tabla 5.18	Valores óptimos de $ARL(\delta'_a)$ para el gráfico $S-RL_2-C$ $ARL(1) = 370$	138
Tabla 4.11	Comparación con reglas adicionales caso $ARL(0) = 370$	82	Tabla 5.19	Comparación de valores de ARL óptimos, ARL bajo control 370.....	140
Tabla 4.12	Comparación con reglas adicionales caso $ARL(0) = 500$	83	Tabla 5.20	Comparación de ARL bajo control teórico y simulado, gráfico $S-RL_2-U$	142
Tabla 4.13	Comparación con reglas adicionales caso $ARL(0) = 1000$	83	Tabla 5.21	Comparación de ARL fuera de control teórico y simulado, gráfico $S-RL_2-U$	143
Tabla 4.14	Comparativa de ARL entre Cusum, EWMA y $\bar{X}-RL_2$	84	Tabla 5.22	Comparación de ARL bajo control teórico y simulado, gráfico $S-RL_2-L$	143
Tabla 5.1	Valores límites de control LS y K^*	91	Tabla 5.23	Comparación de ARL fuera de control teórico y simulado, gráfico $S-RL_2-L$	144
Tabla 5.2	Valores ARL fuera de control caso ARL bajo control 500, $n = 5$	93	Tabla 5.24	Comparación de ARL bajo control teórico y simulado, gráfico $S-RL_2-C$	144
Tabla 5.3	Valores óptimos de $ARL(\delta'_a)$ para el gráfico $S-RL_2-U$	94	Tabla 5.25	Comparación de ARL fuera de control teórico y simulado, gráfico $S-RL_2-C$	144
Tabla 5.4	Comparación de ARL entre gráfico S para incrementos y $S-RL_2-U$	97			
Tabla 5.5	Comparación de ARL entre el gráfico sintético para incrementos en la desviación y gráfico $S-RL_2-U$	102			
Tabla 5.6	Comparación de ARL entre el gráfico sintético para incrementos en la desviación y gráfico $S-RL_2-U$	103			

Índice de figuras

Figura 3.1	Tipos de gráficos de control	26
Figura 3.2	Gráfico de control $\bar{X}$ de Shewhart	32
Figura 3.3	Curvas características del gráfico $\bar{X}$	34
Figura 3.4	Curvas ARL	35
Figura 3.5	Curvas de ARL para el gráfico S . Incrementos y decrementos independientes	39
Figura 3.6	Curvas de ARL para el gráfico S calculando incrementos y decrementos de manera conjunta (gráfico bilateral)	39
Figura 3.7	Conteo CRL	42
Figura 3.8	Conteo RL_2	44
Figura 3.9	Comparación entre RL_2 y CRL caso $L = 100$ en RL_2 y $L=14$ en CRL	47
Figura 3.10	Comparación entre RL_2 y CRL caso $L = 75$ en RL_2 y $L = 9$ en CRL	47
Figura 3.11	Comparación entre RL_2 y CRL caso $L = 50$ en RL_2 y $L = 7$ en CRL	48
Figura 4.1	Esquematización del gráfico de control $\bar{X}-RL_2$	54
Figura 4.2	Dinámica del gráfico de control $\bar{X}-RL_2$	56
Figura 4.3	Curvas de ARL del gráfico de control $\bar{X}-RL_2$ para tamaño de muestra 2 a 10	66
Figura 4.4	Interfaz del simulador del gráfico $\bar{X}-RL_2$	69
Figura 4.5	Porcentaje de mejora caso $ARL(0) = 200$	74
Figura 4.6	Porcentaje de mejora caso $ARL(0) = 370$	74
Figura 4.7	Porcentaje de mejora caso $ARL(0) = 500$	75
Figura 4.8	Porcentaje de mejora caso $ARL(0) = 1000$	75
Figura 4.9	Porcentaje de mejora caso $ARL(0) = 370$	78
Figura 4.10	Porcentaje de mejora caso $ARL(0) = 500$	79
Figura 4.11	Porcentaje de mejora caso $ARL(0) = 1000$	79
Figura 4.12	Curvas de ARL reglas adicionales $ARL(0)=370$	81
Figura 5.1	Esquematización del gráfico de control $S-RL_2-U$	86
Figura 5.2	Dinámica del gráfico de control $S-RL_2-U$	88
Figura 5.3	Curvas de ARL del gráfico de control $S-RL_2-U$ caso $ARL(1) = 370$	95
Figura 5.4	Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 200$	98
Figura 5.5	Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 370$	99
Figura 5.6	Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 500$	99
Figura 5.7	Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 1000$	100
Figura 5.8	Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 200$	104
Figura 5.9	Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 370$	104
Figura 5.10	Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 500$	105
Figura 5.11	Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 1000$	105

Figura 5.12	Esquematzación del gráfico de control $S-RL_2-L$	109
Figura 5.13	Esquematzación del gráfico de control $S-RL_2-L$	113
Figura 5.14	Curvas de ARL del gráfico de control $S-RL_2-L$ caso $ARL(1) = 370$	118
Figura 5.15	Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 200$	121
Figura 5.16	Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 370$	121
Figura 5.17	Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 500$	122
Figura 5.18	Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 1000$	122
Figura 5.19	Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 200$	125
Figura 5.20	Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 370$	125
Figura 5.21	Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 500$	126
Figura 5.22	Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 1000$	126
Figura 5.23	Esquematzación del gráfico de control $S-RL_2-C$	128
Figura 5.24	Dinámica del gráfico de control $S-RL_2-C$	130
Figura 5.25	Interfaz del simulador del gráfico $S-RL_2$	142

› Acrónimos

<i>ARL</i>	<i>Longitud promedio de racha</i>
<i>ANI</i>	<i>Average number inspected</i>
<i>ATS</i>	Tiempo promedio hasta la señal
<i>CRL</i>	<i>Conforming run length</i>
<i>Cusum</i>	Gráfico de sumas acumuladas
<i>EWMA</i>	Gráfico de medias ponderadas exponencialmente
<i>LCL</i>	Límite de control inferior
<i>OC</i>	Curva característica
<i>RL</i>	<i>Run length</i>
<i>SPC</i>	Control estadístico de procesos
<i>TNS</i>	<i>Terminal nonconformity sequence</i>
<i>TNS$\bar{X}$</i>	<i>TNS en el subgráfico $\bar{X}$</i>
<i>TNSsU</i>	<i>TNS en el subgráfico S para incrementos</i>
<i>TNSsL</i>	<i>TNS en el subgráfico S para decrementos</i>
<i>TNSsC</i>	<i>TNS en el subgráfico S bilateral</i>
<i>UCL</i>	Límite de control superior
<i>VSS</i>	Tamaño de muestra variable
<i>VSI</i>	Intervalo de muestra variable

> Nomenclatura

α	Error tipo I o probabilidad de falsa alarma
β	Error tipo II
C_i	Estadístico del gráfico <i>Cusum</i>
δ	Cambio tipificado en la media de un proceso
δ'	Cambio tipificado en la desviación de un proceso
δ_d	Magnitud de cambio de diseño para un gráfico de control
σ	Desviación típica de un proceso
σ_0	Desviación típica cuando el proceso está bajo control
$F(\circ)$	Función de distribución acumulada de una distribución <i>chi</i> cuadrada
h	Parámetro del gráfico <i>Cusum</i>
K^+	Distancia a la cual es ubicado el límite de control superior en un gráfico <i>S</i> , sintético para la desviación o gráfico <i>S-RL</i> ₂
K^-	Distancia a la cual es ubicado el límite de control inferior en un gráfico <i>S</i> , sintético para la desviación o gráfico <i>S-RL</i> ₂
λ	Parámetro de ponderación del gráfico <i>EWMA</i>
$\mathcal{L}$	Límite de control en un gráfico $\bar{X}$ de Shewhart
L	Límite de control inferior de un gráfico <i>CRL</i> , sintético para la media o $\bar{X}$ - <i>RL</i> ₂
LS	Límite de control inferior de un gráfico sintético para la desviación o <i>S-RL</i> ₂
μ	Media actual de un proceso
μ_0	Media cuando el proceso está bajo control
n	Tamaño de muestra
p	Fracción no conforme en un gráfico de control por atributos
P	Potencia del gráfico de control $\bar{X}$ de Shewhart
P'	Probabilidad de falsa alarma requerida en el gráfico <i>S</i>
S	Estimador de σ
t	Tiempo entre muestras
$\Phi(\circ)$	Función acumulada de la distribución normal
$\bar{X}$	Estimador de μ
χ^2	Distribución <i>chi</i> cuadrada
Z	Distancia en desviaciones típicas a la cual se ubican los límites de control en un gráfico $\bar{X}$, sintético para la media o gráfico $\bar{X}$ - <i>RL</i> ₂
z_i	Estadístico de gráfico <i>EWMA</i>

Capítulo I

Introducción y objetivos

1.1 Generalidades

En los últimos años se ha producido un crecimiento exponencial en el número de empresas que utilizan diferentes herramientas estadísticas para mejorar la calidad de sus procesos o servicios. Una de las herramientas más relevantes es el control estadístico de procesos (SPC, por sus siglas en inglés *Statistical Process Control*). El SPC se vale de diferentes procedimientos, técnicas y metodologías con el propósito de establecer un marco coherente para el mejoramiento de la calidad. Una de las técnicas usadas en el SPC y a la que se la han dedicado enormes esfuerzos investigativos son los denominados gráficos de control. Dichos esfuerzos han ido encaminados principalmente al aumento del desempeño del gráfico, es decir, la velocidad con la que un gráfico es capaz de detectar un cambio en el proceso.

Los gráficos de control permiten la aplicación de la filosofía preventiva inherente a las acciones de calidad. Así, un objetivo claro de un gráfico de control es el de anticipar desajustes en el proceso para evitar la fabricación de productos defectuosos, es decir, “hágalo bien a la primera” y así, reducir costos, aumentar la satisfacción del cliente y la competitividad de la organización. Los gráficos de control permiten evitar el sobrecontrol en la manufactura, “si no está roto no lo repares”, y disminuir la variabilidad del proceso para generar una “mejora continua”. Mediante la estimación estadística, los gráficos de control proporcionan información para determinar si los parámetros del producto son estables y están dentro de las especificaciones deseadas para el mismo y, de esta manera, establecer la denominada capacidad del proceso. Por otra parte, los gráficos de control son una importante fuente de información real y actual (*on-line*) del desempeño que resulta fundamental para la correcta toma de decisiones.

Dependiendo de la característica a controlar en el proceso, los gráficos de control se dividen en dos grandes grupos; gráficos de control por variables y gráficos de control por atributos. En el primer grupo son dos los aspectos que pueden ser controlados, la posición y la dispersión.

La posición se controla mediante el orden de magnitud o el valor que toma la variable estudiada usando la media o mediana de la misma. Los gráficos más utilizados en este ámbito son el de control de la media de Shewhart, los de medias ponderadas exponencialmente (EWMA) y los de sumas acumuladas (Cusum).

El otro elemento a controlar, en un proceso de manufactura, es la dispersión, que representa el grado de heterogeneidad existente en el proceso. La dispersión es medida usualmente en desviaciones típicas de la variable del proceso en cuestión. La importancia de medir este elemento radica en que un incremento en la dispersión del proceso tiene como resultado un incremento en el número de piezas defectuosas producidas. Una disminución en la variabilidad implicaría una mejora en la capacidad del proceso, pero también puede ser indicio de una falla en los sistemas o dispositivos de medición.

La posibilidad de combinar un gráfico por variables con un gráfico por atributos; es decir, intentar considerar una señal de falta de control de un gráfico de control por variables como unidades conformes o no conformes en un gráfico por atributos fue la idea que originó la investigación que se describe en este libro. Durante la revisión bibliográfica se encontraron diferentes investigaciones que tratan el tema, las más relevantes son las investigaciones desarrolladas por Wu y Spedding (2000a), quienes proponen el denominado gráfico de control sintético para monitorizar la media. Por otro lado, Huang y Chen (2005) proponen un gráfico de control sintético para monitorizar la dispersión.

Es así como en el presente libro de investigación se estudian, caracterizan analíticamente y optimizan, bajo el escenario *zero-state*, dos nuevos gráficos de control; el primero, denominado $\bar{X}$ - RL_2 para el control de la posición y el segundo, denominado S - RL_2 para el control de la dispersión.

1.2 Planteamiento del problema

Una dificultad del gráfico de control $\bar{X}$ de Shewhart es la poca efectividad que presenta al momento de detectar cambios pequeños o moderados en la media del proceso. Para intentar mitigar dicha dificultad, diferentes autores han planteado numerosas alternativas al mencionado gráfico de control. Entre las propuestas más relevantes se encuentran los gráficos de medias

ponderadas exponencialmente (EWMA) de Roberts (1959) y Lucas y Saccucci (1990); los de sumas acumuladas (Cusum) de Page (1954) y Woodall y Adams (1993); los que incorporan señales adicionales de, por ejemplo, Champ y Woodall (1987). Más recientemente se han diseñado gráficos con tamaño de muestra o intervalo de muestreo variable (VSS y VSI) (Costa, 1997). Los que integran dos gráficos, en uno se destacan el EWMA- $\bar{X}$ (Klein, 1996), el *Cusum*- $\bar{X}$ (Westgard, Groth, Aronsson y de Verdler, 1977) y el de control sintético de Wu y Spedding (2000a). En trabajos posteriores Wu, Xie, Liu, Zhang (2006) proponen gráficos como el SXC que presenta ventajas como simpleza para ser usado por el operario y la efectividad del gráfico Cusum.

Por otra parte, es bien sabido que para controlar la variabilidad del proceso también se han destinado enormes esfuerzos investigativos al objetivo de aumentar su rapidez en la detección de cambios en la desviación típica. Los gráficos de control de Shewhart para el rango y la desviación típica son herramientas importantes para la detección de cambios en la dispersión del proceso, pero al igual que en el gráfico de la media, son poco efectivos para la detección de cambios pequeños ya que ellos están basados solo en la más reciente observación (Huang y Chen, 2005). Son varias las propuestas en la literatura que presentan mejoras al gráfico *S*. Page (1963) estudia los gráficos de Shewhart con límites de advertencia y un gráfico Cusum para el control de la desviación. Dicho trabajo es ampliado por Tuprah y Ncube (1987) y por Chang y Gan (1995). Crowder y Hamilton (1992) diseñan un gráfico EWMA para monitorizar la desviación. Lowry, Champ y Woodall (1995) llevan a cabo una extensa comparativa entre diferentes gráficos de control para monitorear la desviación y el rango. Huang y Chen (2005) presentan un gráfico de control sintético para controlar la dispersión. Costa y Rahim (2006) presentan un gráfico de control sintético que monitoriza de manera conjunta la media y la varianza basado en un estadístico T^2 .

Con el fin de explorar la posibilidad de mejorar el desempeño de los gráfico $\bar{X}$ y *S* de *Shewhart* y teniendo en cuenta que según conclusiones reportadas por Bourke (1991), quien menciona que el gráfico de control RL_2 presenta mejor desempeño que el gráfico *CRL*, se estudia y propone en este libro de investigación una alternativa novedosa: un gráfico de control que integra el gráfico $\bar{X}$ y el gráfico RL_2 y un gráfico de control que integra el gráfico *S* y el gráfico RL_2 . Siendo los gráficos de control *CRL* y RL_2 gráficos por atributos que monitorizan con 100 % de inspección.

El escenario de optimización bajo el cual son enfrentados y la métrica a utilizar son dos aspectos importantes al momento de establecer comparaciones del desempeño de diferentes gráficos de control. Para los fines de este libro se considera el escenario *zero-state* y el *ARL* (*Average Run Length*) como métricas de comparación; definido el *ARL* como el promedio de puntos en un gráfico hasta que aparece una señal de fuera de control.

1.3 *Objetivo general*

Diseñar, caracterizar y optimizar el gráfico de control $\bar{X}$ - RL_2 para la media y el gráfico de control S - RL_2 para la dispersión. Además, establecer el desempeño de dichos gráficos mediante la métrica del *ARL* en el escenario *zero-state*.

1.4 *Objetivos específicos*

- Caracterizar un nuevo gráfico de control que integre un gráfico $\bar{X}$ de *Shewhart* con uno RL_2 .
 - Caracterizar un nuevo gráfico de control que integre un gráfico S de *Shewhart* con uno RL_2 .
 - Identificar los parámetros que permitan el diseño de los gráficos $\bar{X}$ - RL_2 y S - RL_2 .
 - Establecer las expresiones analíticas que permitan obtener el desempeño de los gráficos $\bar{X}$ - RL_2 y S - RL_2 .
 - Establecer un procedimiento que permita la optimización de los gráficos $\bar{X}$ - RL_2 y S - RL_2 .
 - Comparar el desempeño de los nuevos gráficos $\bar{X}$ - RL_2 y S - RL_2 con la de otros gráficos de control ya existentes.
-

Capítulo II

Metodología

2.1 *Etapas de la investigación*

2.1.1 *Concepción de la idea de investigación*

La idea de la investigación fue explorar nuevos gráficos de control que permitan mejorar el desempeño de los ya existentes; para ello se consideró tratar las señales de falta de control en un gráfico de Shewhart como una no conformidad en un gráfico por atributos.

2.1.2 *Revisión bibliográfica*

Dentro de este proceso se encontraron, entre otros, el trabajo realizado por Wu y Spedding (2000a), quienes proponen el denominado gráfico de control sintético para la media. Huang y Chen (2005) se basan en dicho trabajo para desarrollar un gráfico de control sintético para la desviación.

2.1.3 *Planteamiento del problema de investigación*

Con los trabajos encontrados en la revisión bibliográfica se decide establecer como problema de investigación la mejora no solo del gráfico de control $\bar{X}$ de Shewhart y S de Shewhart, sino también de los gráficos de control sintéticos tanto para la media como para la desviación. Se plantea entonces como hipótesis que una combinación del gráfico $\bar{X}$ y un gráfico RL_2 tendría un desempeño superior al gráfico $\bar{X}$ y al gráfico sintético para la media. Dicha hipótesis también se establece análogamente para un gráfico S .

2.1.4 *Caracterización y diseño de los gráficos de control propuestos*

Se proponen dos nuevos gráficos de control. El primero es el gráfico de control $\bar{X}-RL_2$ para el control de la posición. El segundo es el gráfico $S-RL_2$ para el control de la dispersión. Para ambos gráficos se estudia un diseño estadístico teórico y un procedimiento para establecer expresiones adecuadas que permitan calcular el desempeño de los mismos.

2.1.5 Resolución las de expresiones establecidas

Para el cálculo del desempeño de los gráficos propuestos se utiliza la métrica del *ARL*. Mediante el uso del programa Mathcad 14 se resuelven las expresiones iniciales. Para la resolución de los procedimientos de optimización se utiliza el programa Matlab R2009b.

2.1.6 Simulación de los gráficos de control propuestos

Para contrastar los resultados obtenidos se utiliza el programa Delphi 7.

2.1.7 Comparación y análisis de resultados

Se generan gráficas que, mediante curvas de nivel, permiten la comparación de los valores de *ARL* que usan el porcentaje de mejora encontrado para dicha métrica.

2.1.8 Elaboración del reporte de investigación

Todo el trabajo desarrollado y anteriormente descrito se plasma en el presente libro de investigación junto con los resultados obtenidos y las conclusiones pertinentes.

2.2 Restricciones de la investigación

El diseño y desempeño del gráfico multivariante sintético tiene los siguientes supuestos:

1. La media y la varianza son parámetros conocidos.
2. Si ocurre un cambio en la media, la varianza permanece sin cambios y viceversa.
3. El gráfico de control trabaja en la etapa II del diseño y operatividad de un gráfico de control.
4. La comparación del desempeño entre los gráficos de control se realizará utilizando el valor de *ARL* fuera de control bajo el escenario *zero-state*.

2.3 Estructura del libro de investigación

En el capítulo I y II se presentan, la introducción a la temática de el presente libro de investigación y la metodología para el desarrollo de la misma, respectivamente. En el capítulo III se realiza una revisión a los antecedentes existentes sobre gráficos de control, especialmente se hace referencia a los gráficos relacionados con los que integran gráficos por variables con gráficos

por atributos ya que muchas de las líneas de investigación desarrolladas en este ámbito adquieren relevancia para la ejecución de la investigación. Por tanto, en este capítulo se hace una breve introducción en los gráficos de control, incluyendo los que se basan en una distribución binomial negativa, y se presentan los gráficos de control sintéticos, tanto para la media como para la dispersión. También se hace una breve descripción del cálculo del ARL mediante el uso de cadenas de Markov.

En el capítulo IV se presenta, caracteriza analíticamente y optimiza el nuevo gráfico de control denominado $\bar{X}-RL_2$. Se describe la dinámica del gráfico, se establecen expresiones adecuadas para la obtención de sus límites de control y para el cálculo del desempeño del mismo. Se propone un procedimiento de optimización para el nuevo gráfico presentado. Se compara el desempeño obtenido con el del gráfico de la media de Shewhart, el del gráfico sintético para la media y el del gráfico $\bar{X}$ con reglas adicionales. Se contrastan los resultados obtenidos mediante simulación computacional.

En el capítulo V se diseña, caracteriza analíticamente y optimiza el nuevo gráfico de control denominado $S-RL_2$, el cual presenta tres variantes: $S-RL_2-U$ para incrementos, $S-RL_2-L$ para decrementos y $S-RL_2-C$ bilateral (incrementos y decrementos). En los tres casos se describe su dinámica, se establecen expresiones adecuadas para la obtención de sus límites de control y para el cálculo del desempeño de los mismos. Se propone un procedimiento de optimización para cada uno de los nuevos gráficos presentados. Se compara el desempeño obtenido con el del gráfico S de Shewhart y el del gráfico sintético para la dispersión, entre otros. Se contrastan los resultados obtenidos mediante simulación computacional.

En el capítulo VI se presentan las conclusiones pertinentes y nuevas propuestas de investigación.

En los anexos I y II se presentan tablas con valores de ARL optimizados para todas las posibles combinaciones de parámetros estudiados de los nuevos gráficos de control propuestos.

El código de programación desarrollado para la consecución de el presente libro de investigación se encuentra en el anexo III.

3.1 Generalidades

Uno de los principales objetivos en el diseño y control de los procesos de manufactura es obtener productos de calidad que satisfagan las necesidades del cliente. Para llevar a cabo este cometido, es imperioso tener en cuenta dos aspectos; el primero, fabricar el producto dentro de sus especificaciones de diseño, es decir, determinar y controlar la capacidad del proceso para valorar conjuntamente los datos provenientes de un proceso dentro de un periodo de estabilidad. El segundo, monitorizar dichos datos y la evolución de los mismos en un tiempo determinado. Así, las herramientas proporcionadas por el Control Estadístico de Procesos (SPC, por su sigla en inglés) cobran relevancia, ya que son ellas las que permiten mantener estable la producción y prever la posible fabricación de producto no conforme.

Dentro de las herramientas mencionadas, el gráfico de control es la más popular en el entorno productivo. Esto se debe a la relativa simplicidad en su implementación y a la efectividad ampliamente demostrada para controlar procesos de manufactura. El objetivo principal y real por el cual se estudian, diseñan y aplican gráficos de control es mantener la estabilidad del proceso. Sin embargo, es importante resaltar que con los gráficos de control no se monitoriza el cumplimiento de las especificaciones del producto (de hecho estas no aparecen en el trazado del gráfico) ni la adecuación a ninguna tolerancia del producto terminado; es más, en muchos casos el gráfico de control no valora si el producto está mejorando o empeorando su calidad aunque ese sea su objetivo final (Carrión y Maluenda, 1997).

Por otra parte, el estudio de los gráficos de control ha generado numerosas variaciones que tienen como objetivo el aumento de su potencia o desempeño. La métrica de longitud media de racha (ARL, por sus siglas en inglés) es comúnmente utilizada para comparar el desempeño de los gráficos de control. Dicha métrica puede ser aplicada en tres distintos contextos o escenarios *zero-state*, *steady-state* y *worst-state*.

En el escenario *zero-state* se asume que al inicio del control del proceso ha ocurrido un cambio, por tanto, todos los puntos generados antes que se emita una señal de falta de control se han graficado con la distribución de frecuencia en estado fuera de control. Es decir, se asume que en el tiempo cero del proceso existe un punto fuera de control. Este supuesto es ampliamente utilizado en la comparación del desempeño de gráficos de control en el ámbito investigativo.

El escenario *steady-state* es considerado más realista (Zhang y Wu, 2005), en dicho escenario se asume que el inicio del proceso se encuentra bajo control y se mantiene hasta un instante aleatorio donde ocurre un cambio en el proceso, allí se fija un estado fuera de control. Como consecuencia, en este escenario algunos puntos se toman bajo control y otros fuera de control. Se debe considerar que el desempeño puede ser distinto entre los escenarios *zero-state* y *steady-state* para algunos gráficos de control, ejemplos de ello son los gráficos con reglas adicionales de Champ (1992), el gráfico sintético de Wu y Spedding (2000a), entre otros.

El escenario *worst-state* es quizá al que menos atención investigativa se le ha dedicado. En este escenario se considera la posible existencia de un cambio en el proceso de magnitud d_I que no ha sido detectado oportunamente antes que sea emitida una señal de falta de control de magnitud d . Se asume entonces que el sentido de cambio d_I es opuesto al cambio d . Así, se establece $d - d_I$ como un cambio en el proceso que puede verse retrasado por la presencia de la inercia (se entiende por inercia la resistencia que posee un gráfico de control para emitir una señal estadística de falta de control). La problemática que puede presentar la inercia en un gráfico de control se hace presente en gráficos que combinan la información de los estadísticos a través del tiempo como Cusum o EWMA (Woodall y Mahmoud (2005).

En las siguientes secciones se detallan los aspectos más relevantes de los gráficos de control.

3.2 Gráficos de control

3.2.1 Generalidades

El primer gráfico de control fue propuesto en la década de 1920 por el doctor Walter A. Shewhart. La dinámica de esta herramienta consiste en graficar el comportamiento de un estadístico a través del tiempo; es decir, controlar el comportamiento de una característica de calidad durante el proceso de manufactura. El manejo intuitivo y los cálculos no muy complejos

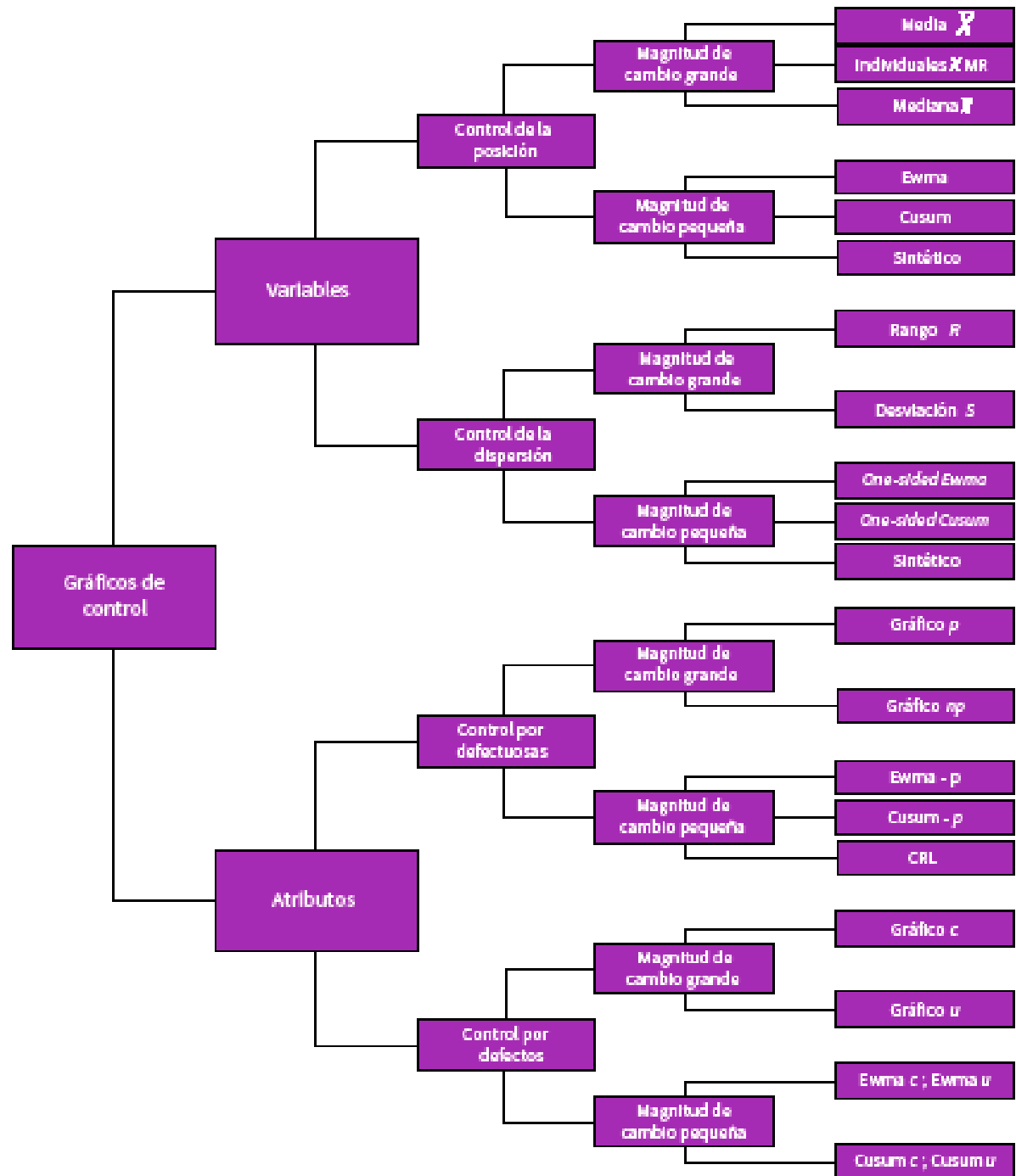
para la implementación de los gráficos de control hacen posible la obtención de información sobre el proceso mediante la toma de muestras representativas. Por lo general, los gráficos de control se componen de un eje de abscisas en el que se representa la sucesión de muestras que están siendo obtenidas del proceso; el eje de ordenadas representa el valor del estadístico que se está controlando; una línea central, que indica un valor de referencia en torno al cual debería oscilar el mencionado estadístico; una línea quebrada que indica la evolución temporal de la característica controlada; cada punto o vértice representa el valor que dicha característica tomó en una de las muestras y los límites de control que indican el valor máximo o mínimo que puede tomar el estadístico controlado, salvo que se produzca algún tipo de cambio en el proceso. Cabe mencionar que no necesariamente se debe sobrepasar dichos límites para la detectar cambios en el proceso; comportamientos no aleatorios de la línea quebrada tales como tendencias, grupos de valores seguidos por encima o por debajo de la línea media etc., son indicativos de la existencia de alguna situación anómala en el proceso.

Un elemento de gran importancia para la interpretación de un gráfico de control es el nivel de confianza o la probabilidad de cometer un error de primera especie. Dicho nivel de confianza está asociado a la denominada probabilidad de falsa alarma, es decir, la probabilidad de que el gráfico indique la existencia de problemas (cambios) en el proceso cuando en realidad no existe ninguno. Este tema se tratará con detalle más adelante.

3.2.2 Tipos de gráficos de control

Dependiendo del estadístico a controlar, los gráficos de control se dividen en dos grandes grupos, gráficos de control por variables y gráficos de control por atributos. El primer grupo corresponde a características medibles (pesos, dimensiones, etc.), el segundo a características de tipo cuantitativo, como por ejemplo conteo de defectos en productos o unidades defectuosas en una muestra. En la figura 3.1 se presenta un esquema parcial de los tipos gráficos de control univariante estructurados al tipo de variable controlada y a la magnitud del cambio que se desea detectar. Cabe resaltar que el estudio estadístico de los diferentes tipos de gráficos de control varía considerablemente y, por tanto, los cálculos necesarios en su manejo; sin embargo, su estructura gráfica e interpretación se mantienen.

Figura 3.1 Tipos de gráficos de control



Fuente: el autor

3.2.2.1 *Por variables*

En este tipo de gráficos la característica “controlar” ha de ser medible y por tanto ha de tratarse como variable; de esta manera son dos los aspectos posibles de controlar, la posición y la dispersión. El primero se refiere al orden de magnitud o al valor que toma la variable estudiada, en este caso utiliza la media o la mediana de una muestra. La media presenta un mejor comportamiento estadístico, siempre y cuando la característica controlada tenga una distribución normal o aproximadamente normal. En poblaciones no normales, es decir, que presenten asimetrías relevantes, puede ser preferible utilizar la mediana pues genera mejores resultados. Al controlar la dispersión se estudia el grado de heterogeneidad resultante en el proceso. En este caso se puede utilizar el rango o recorrido si los datos del proceso se están tomando de manera manual y si los tamaños de muestra son pequeños. Por otra parte es conveniente utilizar la desviación típica en procesos automatizados ya que se hace un mejor uso de la abundante información disponible. Si los tamaños de muestra son grandes (más 15 unidades) no se aconseja el uso del rango, siendo más efectivo usar la desviación típica aunque los cálculos sean más complejos (Carrión y Maluenda, 1997).

Los gráficos por variables más relevantes (el gráfico de control de la media, el gráfico de control de la dispersión y el sintético) se detallarán en los próximos apartados.

Los gráficos de control han sido objeto de investigaciones durante muchos años; por ejemplo, el gráfico de control $\bar{X}$ propuesto, originalmente, por Shewhart presenta numerosas variaciones, principalmente en el sentido del aumento del desempeño del mismo. A continuación se describen brevemente algunas de investigaciones destacadas.

El gráfico de medias móviles ponderadas exponencialmente (Exponentially Weighted Moving-Average, EWMA) fue introducido por Roberts (1959) y posteriormente estudiado por Lucas y Saccucci (1990), entre otros. Este gráfico ha sido especialmente diseñado para la detección de cambios pequeños en el proceso. La dinámica de gráfico consiste en monitorizar un estadístico que es el promedio ponderado de la observación actual y las observaciones anteriores, al que se le asigna, generalmente, una ponderación mayor que las observaciones más recientes. En los gráficos EWMA se establecen las medias móviles basándose en la asignación

de una ponderación a las informaciones históricas; dicha ponderación decae exponencialmente con el tiempo. El estadístico que se monitoriza se denomina comúnmente z_i y se obtiene como una media ponderada según el parámetro λ entre el valor observado y el predicho z_{i-1} ; según la siguiente expresión $z_i = \lambda \bar{X}_i + (1 - \lambda)z_{i-1}$ el parámetro λ tendrá valor entre $0 < \lambda \leq 1$. Es de observar que si $\lambda=1$ el valor del estadístico dependerá únicamente de la observación más reciente resultando un gráfico $\bar{X}$, mientras que para valores de λ tendientes a cero, la observación más reciente obtiene una ponderación baja. De este modo el desempeño del gráfico EWMA para la detección de cambios en el proceso estará sujeta al valor que tome λ .

El gráfico de sumas acumuladas Cusum (*cumulative-sums*) fue propuesto inicialmente por Page (1954) y estudiado entre otros por Woodall y Adams (1993). Así como en el gráfico de Shewhart, el valor a monitorizar es la media muestral del proceso, en el gráfico Cusum el estadístico a controlar es la suma de las desviaciones respecto a la media bajo control; por tanto, en cada punto graficado se tienen, en cuenta todas las observaciones graficadas hasta el momento. Al igual que el EWMA, el Cusum detecta muy rápidamente cambios de pequeña magnitud en el proceso. Existen dos variantes del gráfico Cusum, el tabular o algorítmico y el *V-mask* propuesto por Barnard (1959). El estadístico a controlar en el gráfico Cusum se denota comúnmente como c_i y viene dado por $C_i = \sum_{j=10}^i (\bar{X}_j - \mu_0)$, donde la $\bar{X}_j$ es el promedio de la j -ésima muestra y μ_0 es el valor objetivo de la media del proceso. Lucas y Crosier (1982) presentan una versión del gráfico Cusum denominada Cusum-FIR que consiste en tener en cuenta la causa que origina una señal de alarma en el proceso. Existe la posibilidad de que no se llegue a determinar dicha causa que originó la alarma o que existan varias causas recurrentes pero que solo algunas de ellas sean tratadas para su corrección. Por tanto, se pretende entonces que el gráfico detecte la salida de control lo más rápido posible. Así, el valor inicial $C_{i=0}$ será igual a $H/2$ donde $H = h\sigma$ y a su vez h es determinado por el usuario (en la literatura se recomienda $h = 5$ o 4) y la desviación del proceso. Los límites del gráfico Cusum vienen dados por $\pm H$.

Otras propuestas destacadas en la literatura están encaminadas a introducir señales adicionales de falta de control con el objetivo de aumentar el desempeño de los gráficos de control (Western Electric, 1956), (Champ y Woodall, 1987); aquí se considera que al producirse una desviación en la media existió un efecto en el proceso manifestado en varias muestras anteriores

a la aparición de un punto por fuera de los límites. Esta información es aprovechada al definir pautas o rachas que podrían aparecer en distintas zonas determinadas para el gráfico de la media.

Por otra parte, se han propuesto gráficos de control para la media donde se establecen tamaños de muestra o intervalos de muestreo variable denominados VSS (*Variable Sampling Size*), VSI (*Variable Sampling Interval*) (Prabhu, Montgomery y Runger, 1994), (Costa, 1997). Dicha propuesta consiste en hacer variar los parámetros (tamaño de muestra e intervalo de muestreo) entre un valor mínimo y un valor máximo. El procedimiento detecta cambios más rápido que el gráfico de la media de Shewhart, en especial para pequeños cambios del proceso.

Existen diferentes situaciones en las que el tamaño de la muestra a emplear en un gráfico de control es igual a uno, en estos casos se utiliza el gráfico de control para mediciones individuales, donde la muestra está constituida por una unidad individual. Un ejemplo de ello son los procesos de manufactura por lotes, también en los entornos altamente automatizados es posible la medición e inspección de cada unidad manufacturada por lo que no existe ninguna base racional para hacer subgrupos. El inconveniente se presenta cuando, con una única medición, no se puede obtener la desviación típica poblacional. Por esta razón es utilizado el gráfico del rango móvil MR para acompañar el gráfico de mediciones individuales o gráfico X y así estimar la variabilidad del proceso. Es posible entonces elaborar un gráfico de control para rango móvil que, combinado con el de mediciones individuales X -MR, proporciona información adicional para controlar el proceso. La capacidad de detección de cambios combinada para estos dos gráficos es calculada por Crowder (1987), su propuesta demuestra una mayor efectividad frente al gráfico de control estándar de Shewhart, sin embargo, algunos autores consideran que la propuesta de Crowder no arroja datos relevantes sobre la variabilidad del proceso (Roes, Does y Schurink, 1993), (Trip y Wieringa, 2006).

Dentro del entorno productivo, otro aspecto importante de calidad es la variabilidad. Las propuestas en la literatura que presentan mejoras al gráfico S de Shewhart son muchas; Page (1963) estudia los gráficos de Shewhart con límites de advertencia y un gráfico Cusum para el control de la desviación. Dicho trabajo es ampliado por Tuprah y Ncube (1987); Collani y Sheil (1989) y por Chang y Gan (1995). Crowder y Hamilton (1992) diseñan un gráfico

EWMA para monitorizar la desviación. Lowry, Champ y Woodall (1995) llevan a cabo una extensa comparativa entre diferentes gráficos de control para monitorear la desviación y el rango; Huang y Chen (2005) presentan un gráfico de control sintético para controlar la dispersión; Costa y Rahim (2006) presentan un gráfico de control sintético que monitoriza de manera conjunta la media y la varianza basado en un estadístico T^2 .

3.2.2.2 *Por atributos*

Son numerosos los procesos de manufactura en los que al momento de controlar las unidades producidas solo se verifican características de tipo cualitativo; es decir, se establece si la unidad es “conforme” o “no conforme”. En estos casos se utilizan los gráficos de control por unidades defectuosas. Aquí el control se lleva mediante el recuento del número unidades o piezas que son defectuosas en cada muestra tomada. El modelo estadístico asociado a este gráfico es el binomial, aunque si la población de la que procede la muestra es muy reducida (menos de diez veces el tamaño de la muestra o que la fracción de muestreo) se debe emplear el modelo hipergeométrico. Estos gráficos son especialmente aplicables en ámbitos no industriales, como la gestión de un determinado servicio en la que se evalúa en cada intento si el servicio ha sido prestado correctamente o no. Los gráficos más comúnmente utilizados en este contexto se denominan gráficos np y p . En np el control se lleva a cabo mediante el número de unidades defectuosas en la muestra (es necesario que el tamaño de muestra sea constante). En el gráfico p el control es llevado mediante la proporción de unidades defectuosas en la muestra.

Otra situación que se presenta al controlar características de tipo cualitativo es en la que se utiliza el denominado gráfico de control por defectos. Este gráfico es útil si existe más de un defecto en una misma pieza o producto y, por tanto, se realiza el recuento del número de dichos defectos presentes en una muestra, su modelo estadístico asociado es el de Poisson. Los gráficos c y u se utilizan en este contexto. En c se contabiliza el número de defectos por muestra y en u el número de defectos por unidad.

3.2.3 *Para la media*

Si en un proceso productivo o en un producto se quieren controlar sus características de calidad, y, teniendo en cuenta que estas características son variables aleatorias, la calidad del proceso o producto dependerá de la distribución de dichas variables. Así, si una variable X de

calidad es modelizada mediante una distribución normal de media μ y desviación σ es decir, $X \rightarrow N(\mu, \sigma)$ se puede entonces considerar que existirán solo tres tipos de cambio, cambio en la media μ , cambio en la dispersión σ , o cambios simultáneos en μ y σ . Cuando los cambios se atribuyen solo a causas aleatorias o comunes (variación inherente del proceso) el proceso se encuentra bajo control; si los cambios se producen por causas asignables o especiales (errores de operario, defectos de materia prima, desajuste de máquinas) el proceso está fuera de control. Por tanto, el objetivo primordial de los gráficos de control es detectar rápidamente las causas especiales para evitar la producción de piezas defectuosas y la consecuente pérdida económica.

Para detectar los cambios antes mencionados es posible usar una prueba de hipótesis; por ejemplo, para la media la prueba de hipótesis es

$$H_0 (\mu = \mu_0) \text{ vs. } H_1 (\mu \neq \mu_0)$$

Si se acepta la hipótesis nula H_0 se afirma que la media actual sigue siendo igual a la media μ_0 , esta es la media cuando el proceso se encuentra bajo control; si se rechaza la hipótesis nula, entonces se asevera que la media μ ha cambiado, el proceso se encuentra fuera de control y la hipótesis alternativa H_1 es aceptada. Como en cualquier test de hipótesis estadístico existen cuatro posibles situaciones (tabla 3.1).

Tabla 3.1 Prueba de hipótesis

	H_0 es verdadera	H_0 es falsa
Aceptar H_0	Decisión correcta	Error tipo II
Rechazar H_0	Error tipo I	Decisión correcta

Fuente: Carrión y Maluenda (1997).

Para rechazar o no la H_0 se toma una muestra de tamaño n del proceso, se calcula $\bar{X}$ siendo este estimador de μ , entonces si $\bar{X}$ difiere mucho de μ_0 se rechaza H_0 , en caso contrario no se rechaza. A continuación se fija una distancia de aceptación de H_0 (para cercano de μ_0) y una de distancia de rechazo de H_0 (para $\bar{X}$ lejano de μ_0). Resumiendo, se acepta la hipótesis nula si $\bar{X} \in [\mu_0 - \mathcal{L}, \mu_0 + \mathcal{L}]$. Para obtener el valor de $\mathcal{L}$ se establece el valor de la probabilidad

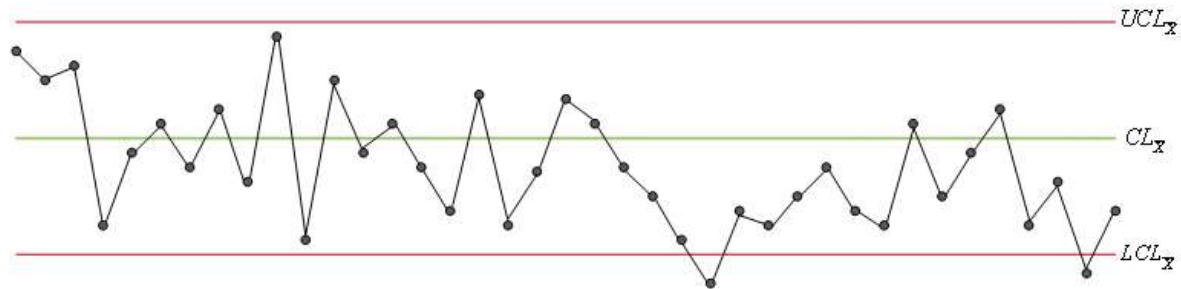
de error tipo I: en control de calidad esta probabilidad es conocida como probabilidad de falsa alarma α . Para fijar el valor de α es común utilizar el criterio de 3-sigma , pues la probabilidad de que $\bar{X}$ caiga dentro del intervalo de ± 3 desviaciones es de 99.73 % (por su distribución normal). Así, la probabilidad de falsa alarma viene dada por $\alpha = 1 - 0.9973 = 0.0027$. Por otra parte, sabiendo que la distribución de la media muestral está dada por $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ entonces la zona de aceptación es $\mu_0 \pm Z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, por tanto el valor de $\mathcal{L}$ es igual a $3\sigma/\sqrt{n}$. Con lo anterior se generan los denominados límites de control para el gráfico de control $\bar{X}$ de Shewhart. Si los parámetros del proceso son conocidos se tiene

$$\begin{aligned} UCL_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} + 3S/\sqrt{n} \\ CL_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$LCL_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - 3S/\sqrt{n} \quad (3.2)$$

Donde, $UCL_{\bar{X}}$ es límite de control superior, $CL_{\bar{X}}$ es la línea central, $LCL_{\bar{X}}$ límite de control inferior y n es el tamaño de muestra. La figura 3.2 representa un gráfico para la media de control y sus límites.

Figura 3.2 Gráfico de control $\bar{X}$ de Shewhart



Fuente: el autor

3.2.3.1 Capacidad de detección para el gráfico de la media

Como se observó en la sección anterior, uno de los parámetros indispensables al momento de diseñar un gráfico de control es el tamaño de muestra n ; dicho parámetro junto con la frecuencia de muestreo permiten establecer la efectividad del gráfico para detectar cambios

en el proceso. Así, al incrementar estos parámetros, el desempeño del gráfico también lo hace. Sin embargo, en la mayoría de los escenarios productivos no es económicamente factible llevar a cabo dichos incrementos. Para evaluar las decisiones que se toman cuando se especifica un tamaño de muestra y la frecuencia de muestreo, comúnmente se hace uso de las curvas características o de la métrica denominada longitud media de racha (ARL). La curva característica OC (figura 3.3) se define como la probabilidad de aceptar H_0 (ver prueba de hipótesis de la sección anterior) en función del parámetro μ . Así, considerando la OC para un gráfico $\bar{X}$ de Shewhart con desviación σ y valor de la media bajo control μ_0 , si se llegara a dar un cambio en la media donde se pasara a un valor $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$, es posible calcular analíticamente la probabilidad de no detectar este cambio en la siguiente muestra, así

$$\beta = P\{LCL \leq \bar{x} \leq UCL \mid \mu = \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma\} \quad (3.3)$$

Teniendo en cuenta las expresiones definidas anteriormente para los límites de control se tiene

$$\beta = \Phi(Z - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-Z - \delta\sqrt{n}) \quad (3.4)$$

Donde $\Phi(\cdot)$ representa la función acumulada de la distribución normal estándar, Z es el número de desviaciones estándar de la media a los cuales se establecen los límites de control para el gráfico y δ es el cambio tipificado que se pretende detectar y se define como

$$\delta = \left| \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_0} \right| \quad (3.5)$$

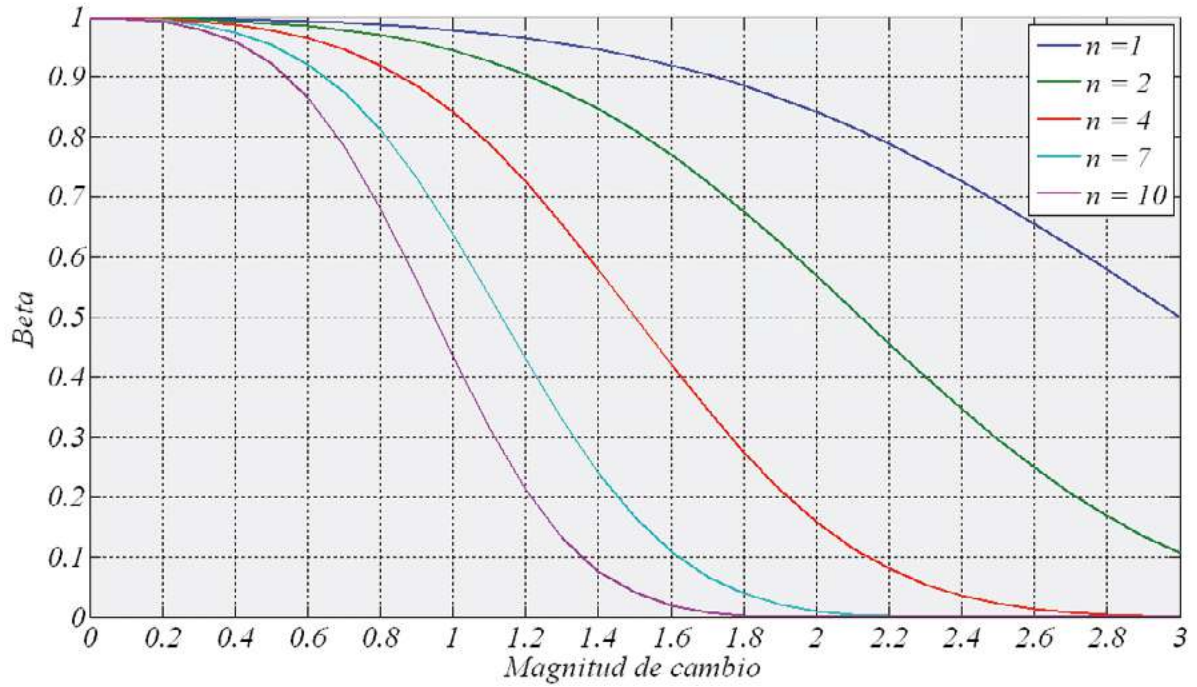
La probabilidad de detectar un cambio de la media en la muestra tomada inmediatamente después será $1 - \beta$, comúnmente denominada potencia del gráfico.

$$P = 1 - \beta \quad (3.6)$$

donde β es el error tipo II.

Las curvas características para varios valores de tamaño de muestra n con una probabilidad de error tipo I $\alpha = 0.0027$ se presentan la figura 3.3.

Figura 3.3 Curvas características del gráfico $\bar{X}$



Fuente: el autor

El ARL es una métrica muy utilizada para establecer la eficacia de los gráficos de control. Esta medida es el promedio de muestras que es necesario tomar hasta que por primera vez un punto caiga fuera de los límites de control (Carot, 1998); es decir, si el $ARL = 10$, en promedio existirán 10 muestras en el gráfico antes de obtener una señal de falta de control.

Analíticamente se puede constatar que (Montgomery, 2004)

$$ARL(\delta) = \frac{1}{1 - \beta(\delta)} \quad (3.7)$$

donde β es la probabilidad de error tipo II y δ es la descorrección observada. La ecuación 3.7 solo es válida en los gráficos donde las muestras consecutivas son independientes. Si el proceso está bajo control el ARL es

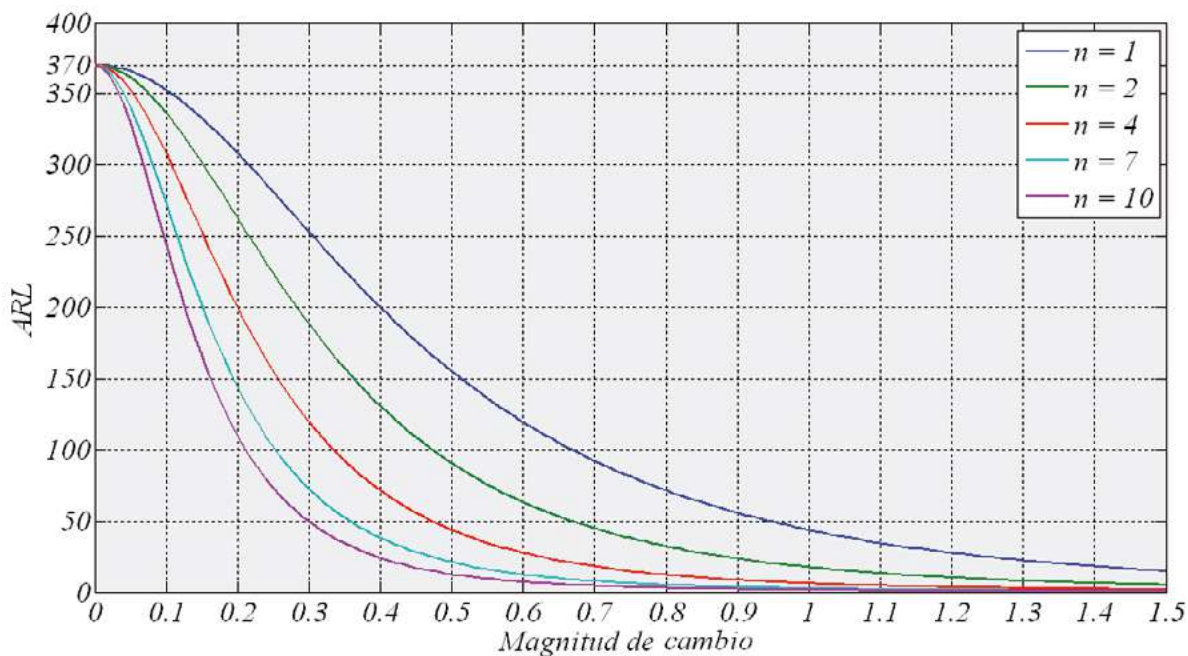
$$ARL(0) = \frac{1}{\alpha} \quad (3.8)$$

Con lo que se tendría

$$ARL(0) = \frac{1}{0,0027} \cong 370 \quad (3.9)$$

En la figura 3.4 se presentan las curvas de ARL para diferentes tamaños de muestra.

Figura 3.4 Curvas ARL



Fuente: el autor

En algunos casos, la medida con la que se establece el desempeño de un gráfico dependerá de las reglas establecidas en él mismo; por ejemplo, para el gráfico con tamaño de muestra e intervalo de muestreo variables la métrica ARL no es conveniente; en este caso es más oportuno

usar la métrica *ATS* (*Average Time to Signal*) tiempo promedio hasta la señal de fuera de control. Si se conoce el tiempo entre muestras t es posible calcular el ATS así

$$ATS = ARL \cdot t \quad (3.10)$$

3.2.4 Para monitorear la dispersión

Desde mediados del siglo XX el diseño y la optimización de gráficos de control para la media han recibido enormes esfuerzos investigativos. Por el contrario, no ha tenido la misma atención el estudio de gráficos de control para monitorear la dispersión. Por tal razón, en la literatura ha sido destacada la importancia de un estudio más riguroso de la desviación en las variables de un proceso. La importancia de controlar la dispersión en ciertos procesos de manufactura se debe principalmente a que un incremento de esta no necesariamente conlleva a un cambio en la media, con lo cual, el control de la posición no detectará esa modificación del proceso. Por ejemplo, si en un proceso donde la habilidad del operario constituye un factor importante de calidad, en el momento en el que se sustituya dicho operario por otro menos diestro, muy seguramente se generará un aumento de la variabilidad con las consecuentes repercusiones en la calidad del producto final. Por otra parte, la detección de la disminución de la variabilidad del proceso puede implicar una mejora en la calidad del mismo o del producto, siempre y cuando la causa de dicha disminución pueda ser determinada. Es importante recalcar que, en algunos casos, cuando se detecta una disminución pronunciada de la variabilidad y, por ende, una aparente mejora en el proceso, puede ser indicio de un fallo de los sistemas o instrumentos de medición con los que se está llevando el control.

A continuación se presentan algunas consideraciones estadísticas del gráfico de control para monitorear la dispersión.

Dado $X_1, X_2, \dots, X_n$ como la muestra aleatoria de un proceso de tamaño n distribuida normalmente, la media muestral viene dada por

$$\bar{X} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{n} \quad (3.11)$$

Y la desviación típica

$$\delta S_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{(n-1)}} \quad (3.12)$$

El proceso estará bajo control cuando $\delta' = 1$. De existir un cambio en el proceso, es decir, para valores $\delta' > 1$ existirá un incremento en el valor de σ y un límite control superior $K^+ \sigma_0$, debe ser establecido para el gráfico de control S . Por otro lado, para valores $\delta' < 1$ existirá un decremento en el valor de σ y un límite de control inferior $K^- \sigma_0$, debe ser igualmente establecido. Si el valor del estadístico S está por fuera de los límites de control se emite una señal. El cálculo del ARL en un gráfico para la dispersión establece el número promedio de muestras S requeridas para detectar un cambio en σ . Así, para un cambio $\delta' > 1$ el ARL viene dado por

$$\Pr(S > K^+ \sigma_0 | \sigma = \delta' \sigma_0) = \Pr\left(\chi_{n-1}^2 > (n-1) \left(\frac{K^+}{\delta'}\right)^2\right) = 1 - F\left((n-1) \left(\frac{K^+}{\delta'}\right)^2\right) \quad (3.13)$$

$$ARL = \frac{1}{1 - F\left((n-1) \left(\frac{K^+}{\delta'}\right)^2\right)} \quad (3.14)$$

Para cambios $\delta' > 1$

$$\Pr(S > K^- \sigma_0 | \sigma = \delta' \sigma_0) = \Pr\left(\chi_{n-1}^2 > (n-1) \left(\frac{K^-}{\delta'}\right)^2\right) = 1 - F\left((n-1) \left(\frac{K^-}{\delta'}\right)^2\right) \quad (3.15)$$

$$ARL = \frac{1}{1 - F\left((n-1) \left(\frac{K^-}{\delta'}\right)^2\right)} \quad (3.16)$$

Si se desea establecer el ARL para detectar cambios de manera conjunta tanto en incrementos como decrementos en la desviación, se calcula

$$ARL = \frac{1}{1 - F\left((n-1)\left(\frac{K^+}{\delta'}\right)^2\right) + F\left((n-1)\left(\frac{K^-}{\delta'}\right)^2\right)} \quad (3.17)$$

Las ecuaciones 3.13 y 3.15 representan la probabilidad de que el estadístico S caiga por fuera de los límites de control para $\delta' > 1$ y $\delta' < 1$, respectivamente. La expresión χ_{n-1}^2 denota la distribución *chi* cuadrada de una variable aleatoria con $n-1$ grados de libertad y $F(\cdot)$ denota la función de su distribución acumulada.

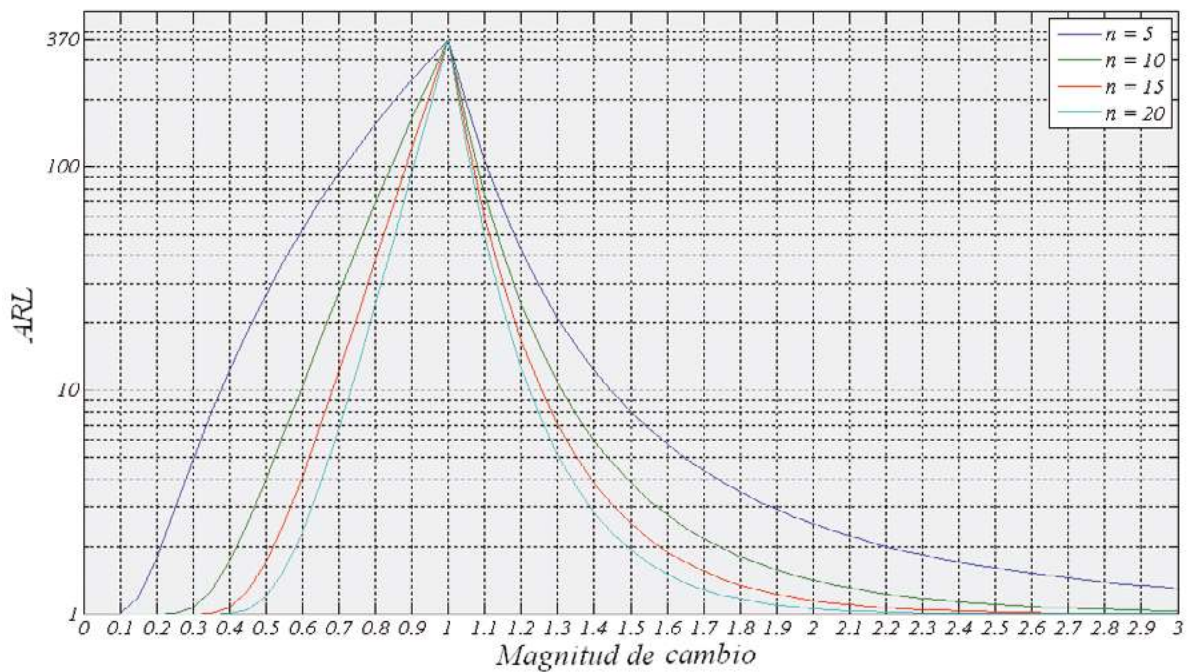
Un inconveniente al monitorizar de manera conjunta incrementos y decrementos en la desviación es la disminución presentada en el desempeño del gráfico en dicho contexto. Por ejemplo, el ARL del gráfico S cuando solo se monitorizan incrementos (caso $\delta' = 1.1$, $n = 5$ y ARL bajo control de 370) es de 106.8 frente a 159.42 cuando se calcula el ARL de manera conjunta. Además, al monitorizar decrementos en algunos casos el ARL fuera de control es mayor que el ARL bajo control para cambios cercanos a 1 y tamaños de muestra pequeños. Por ejemplo, el ARL conjunto (caso $\delta' = 0.9$, $n = 5$ y ARL bajo control de 370) es de 445.29 (figuras 3.5 y 3.6).

3.3 Cadenas de Markov en los gráficos de control

Existe un procedimiento para obtener el desempeño de un gráfico de control, mediante cadenas de Markov, desarrollado inicialmente por Brook y Evans (1972). Este pocedimiento ha sido objeto de diversas investigaciones en años posteriores Woodall y Ncube (1985); Lucas y Saccucci (1990); Runger y Prabhu (1996) y Fu, Shmueli, y Chang (2003).

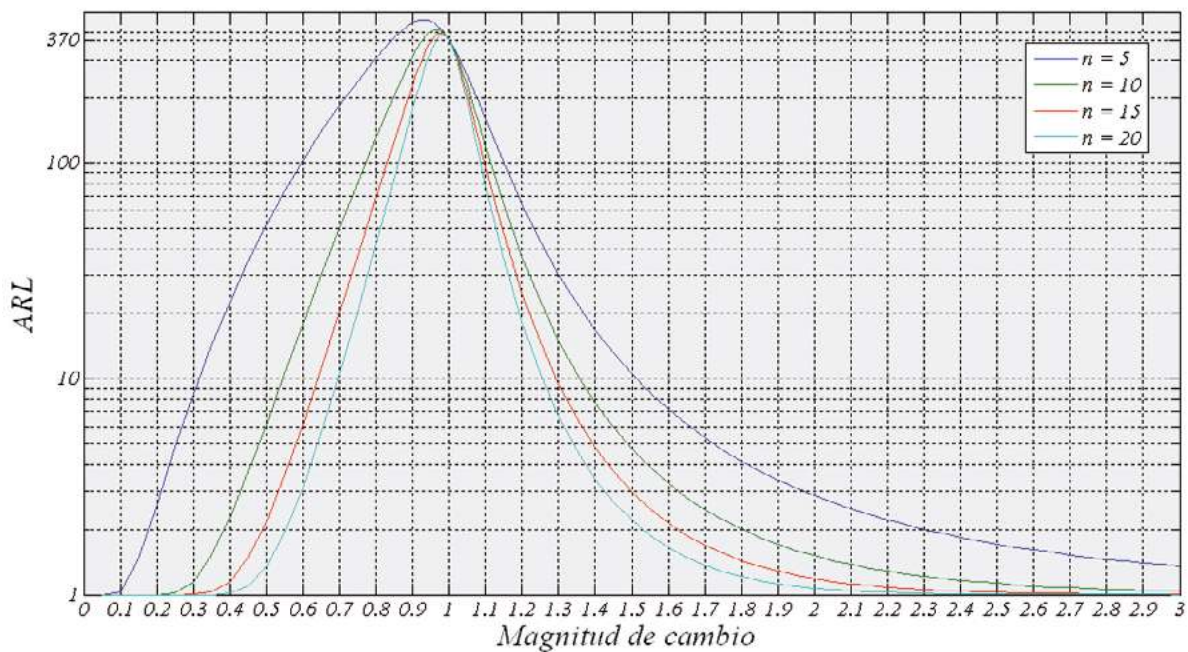
Una cadena de Markov es la representación de una serie de eventos donde la probabilidad de su ocurrencia depende del evento inmediatamente anterior, es decir, estos se caracterizan por tener memoria y por tanto los eventos futuros están condicionados. Si se considera un sistema bajo dichos parámetros, es posible determinar la probabilidad de uno de sus estados en particular y en un momento dado.

Figura 3.5 Curvas de ARL para el gráfico S. Incrementos y decrementos independientes



Fuente: el autor

Figura 3.6 Curvas de ARL para el gráfico S calculando incrementos y decrementos de manera conjunta (gráfico bilateral)



Fuente: el autor

Para representar un gráfico de control mediante cadenas de Markov se discretiza las diferentes zonas generadas por los límites de control. Generalmente se establecen $\mathbf{m}$ estados transitorios, un estado absorbente y un estado transitorio inicial. Si se establecen $\mathbf{m} - \mathbf{n}$ estados no transitorios es posible entonces generar una matriz de transición $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ en donde cada elemento de la matriz será ocupado por la probabilidad condicional de que el estadístico monitorizado en el gráfico de control se encuentre en un estado j , dado que en un instante de tiempo previo se encontraba en un estado i . Así, las probabilidades P_{ij} cumplirán la condición $\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1$ para $i, j = 1, 2, \dots, \mathbf{n}$. La matriz de transición $\mathbf{M}$ viene dada por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1m} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2m} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{1m} & P_{2m} & \dots & P_{mm} & \dots & P_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

La forma canónica es

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

En la submatriz $\mathbf{R}$ se encuentran las probabilidades en las que el estadístico monitorizado no emite una señal de fuera de control. Las probabilidades de paso de un estado transitorio a un estado absorbente se encuentran en la matriz $\mathbf{Q}$; $\mathbf{0}$ e $\mathbf{I}$ son matriz nula y matriz identidad, respectivamente.

Si se determina que la matriz fundamental de la cadena de Markov viene dada por

$$\mathbf{F} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \quad (3.20)$$

Es posible verificar que si la cadena de Markov empieza en un estado transitorio i , la probabilidad de que llegue a un estado absorbente j está dada por el elemento de la fila i y columna j de la matriz $\mathbf{F} \times \mathbf{Q}$. Además, un elemento f_{ij} de la matriz $\mathbf{F}$ representa en promedio el número de veces que la cadena está en el estado transitorio ij , siempre y cuando se establezca el inicio en un estado i y antes de caer en el estado absorbente. Por otra parte, si se suman los elementos de la fila i en la matriz $\mathbf{F}$, se obtiene la media del número de veces que la cadena se mueve por los estados transitorios antes de caer en un estado absorbente. Por tanto, el vector **ARL** se calcula

$$\mathbf{ARL} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1} \quad (3.21)$$

Donde $\mathbf{1}$ es un vector columna de unos y **ARL** es el vector de valores de ARL de los estados no absorbentes. Suponiendo que el gráfico de control inicia en un estado transitorio i se establece un ARL_i mediante

$$E(RL)_i = \text{ARL}_i = \mathbf{S}'(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1} \quad (3.22)$$

Donde $\mathbf{S}$ es el vector de probabilidades iniciales en el que la suma de sus elementos debe ser la unidad.

3.4 Gráficos de control basados en la distribución binomial negativa

3.4.1 Generalidades

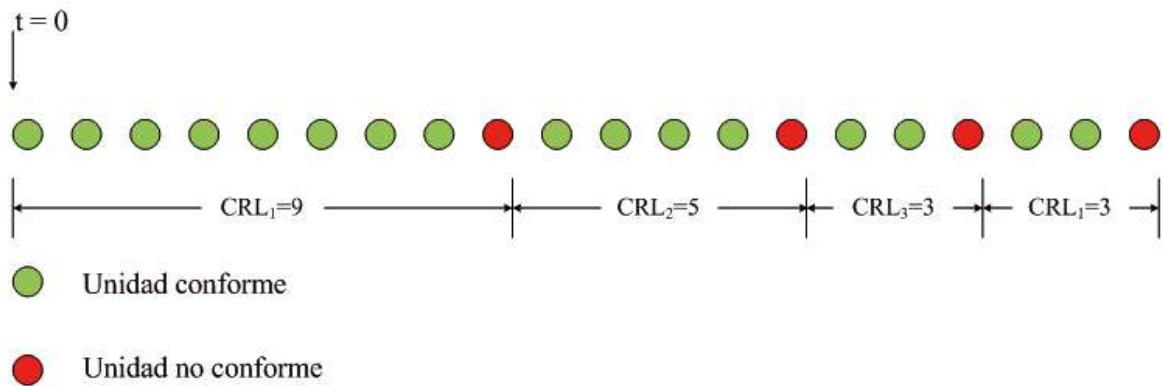
Existen procesos de manufactura donde la velocidad de producción es considerablemente alta, llegando a ser de unas 50 000 unidades por hora (Montgomery, 2005), además, en muchos casos la proporción de unidades no conformes es muy baja cuando el proceso está bajo control. Por otra parte, en bastantes escenarios productivos es posible ejecutar un control automático en línea y realizar un 100 % de inspección. En estas condiciones los tradicionales gráficos $\bar{np}$ o $\bar{c}$ son de poca utilidad pues arrojarían tamaños de muestra muy elevados con la consecuente demora para realizar los respectivos procedimientos de control. En los últimos

años y como respuesta a esta problemática, Bourke y Evans (1972), han propuesto la utilización de gráficos de control por atributos basados en la distribución binomial negativa.

3.4.2 Gráfico de control CRL

Con el propósito de inspeccionar la fracción no conforme de un proceso, Bourke (1991) desarrolla un gráfico control como alternativa a los tradicionales p o np . El gráfico control CRL (*Conforming Run Length*) es un gráfico por atributos que monitoriza con 100 % de inspección y consiste en el conteo de unidades inspeccionadas entre dos disconformidades que incluyen la última unidad no conforme. Para ilustrar, considérese un proceso de manufactura donde los artículos generados son representados por la serie de la figura 3.7, los círculos rojos simbolizan artículos no conformes y los verdes conformes. El sentido del gráfico CRL es que en el momento en que cambie la fracción no conforme p , el valor de CRL también cambia. Cuando la fracción no conforme disminuya el valor CRL aumentará y viceversa. El valor CRL generado es considerado como una variable aleatoria que se comporta de acuerdo con una distribución geométrica (caso particular de una distribución binomial negativa).

Figura 3.7 Conteo CRL



Fuente: el autor

Así pues, el número promedio de unidades inspeccionadas en una muestra CRL (Bourke, 1991) es

$$\mu_{CRL} = \frac{1}{p} \quad (3.23)$$

Y la función de distribución de probabilidad es

$$F_p = 1 - (1 - p)^{CRL}, \quad CRL = 1, 2, \dots, \quad (3.24)$$

Cuando el objetivo es detectar el incremento de la fracción no conforme p , solo el límite inferior de control L será necesario en el gráfico CRL. De la ecuación 3.16 (Xie, Xie, Goh, 1995) se obtiene entonces

$$\alpha_{CRL} = F_p(L) = 1 - (1 - p_0)^{LCL}, \quad L = \frac{\ln(1 - \alpha_{CRL})}{\ln(1 - p_0)} \quad (3.25)$$

donde α_{CRL} es el error tipo I del gráfico CRL y p_0 es la fracción no conforme bajo control. El valor de límite de control L debe ser redondeado a un entero. Si una muestra CRL es menor o igual que L es muy probable que la fracción no conforme p se haya incrementado y se considerará el proceso fuera de control.

Igualmente que en los gráficos de Shewhart, aquí el ARL puede ser utilizado como medida de desempeño del gráfico CRL. Se tiene entonces que ARL_{CRL} es el número promedio de muestras CRL requeridas para detectar un cambio en p . De manera análoga a la ecuación 3.7 (Wu y Spedding, 2000a) se tiene

$$ARL_{CRL} = \frac{1}{F_p(L)} = \frac{1}{1 - (1 - p)^L} \quad (3.26)$$

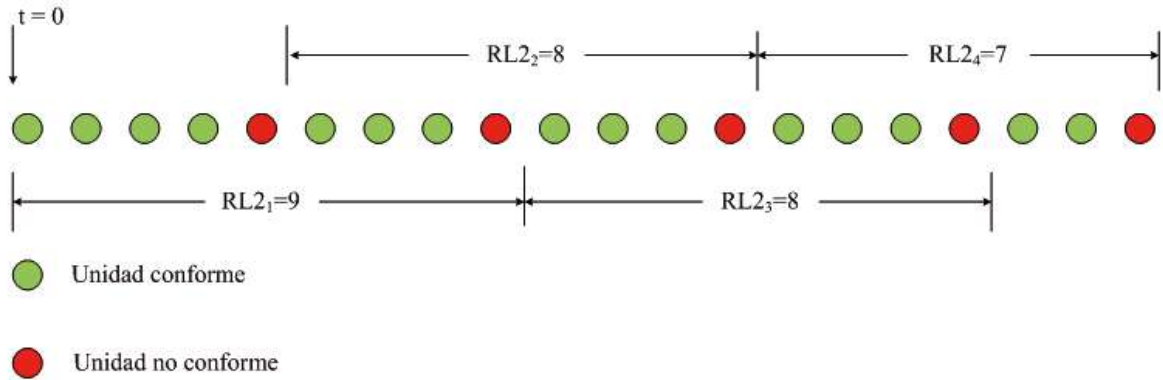
Aunque es común utilizar la métrica del ARL para establecer el desempeño de los gráficos de control, para los gráficos donde la variable a controlar es el número de piezas entre unidades no conformes, varios autores utilizan una métrica que consiste en el número medio de piezas inspeccionadas hasta que se produce una señal o ANI (*Average Number Inspected*) (Bourke, 1991). El ANI para el gráfico CRL se calcula $ANI_{CRL} = \mu_{CRL} \times ARL_{CRL}$ y al considerar las expresiones 3.23 y 3.26 se tiene

$$ANI_{CRL} = \frac{1}{p} \times \frac{1}{1 - (1 - p)^L} \quad (3.27)$$

3.4.3 El gráfico RL_2

Dentro de los trabajos más relevantes para soportar el argumento de la presente investigación se encuentra el realizado por Bourke (1991) quien propone un gráfico basado en la distribución geométrica (gráfico CRL) al cual denominó RL_1 , luego el autor estableció un segundo gráfico basado en la suma de dos sucesivos RL (*Run Lengths*) más recientes al cual llamó RL_2 , se justifica su desarrollo en el hecho de que el gráfico RL_1 no es muy efectivo para detectar cambios pequeños en la fracción no conforme. El método de conteo en el gráfico RL_2 se ilustra en la figura 3.8.

Figura 3.8 Conteo RL_2



Fuente: el autor

Para la obtención de los límites de control del gráfico RL_2 , Bourke (1991) presenta el siguiente procedimiento:

Sea Y denotada como la suma de los dos más recientes RL puede demostrarse que $(Y + 2)$ tiene una distribución binomial negativa tal que

$$\Pr[Y = k] = (k + 1) p^2 (1 - p)^k \quad (3.28)$$

y considerando

$$\Pr[Y \geq r] = \sum_r^{\infty} \Pr[Y = k] \quad (3.29)$$

$$\Pr[Y \geq r] = \sum_r^{\infty} p^2 \frac{d}{dp} \left\{ -(1-p)^{k+1} \right\} \quad (3.30)$$

Con lo que es posible obtener

$$\Pr[Y < r] = 1 - (1-p)^r (rp + 1) \quad (3.31)$$

Para una representación gráfica apropiada Bourke (1991) utiliza una transformación de los valores RL a una distribución uniforme $(0, 1)$, así, se generan y grafican valores α_k

$$\alpha_k = \Pr[Y \leq k] = 1 - (1-p_0)^{k+1} [(k+1)p_0 + 1] \quad (3.32)$$

Algunos valores para los límites superior e inferior del gráfico de control RL_2 se pueden observar en la tabla 3.2. De igual manera que en el gráfico CRL, para el gráfico RL_2 la métrica a utilizar para establecer su potencia es el ANI. Bourke (1991) considera el parámetro TNS (*Terminal Nonconformity Sequence*) para referirse a una racha de piezas conformes hasta una no conforme. Por tanto, el ANI para el gráfico RL_2

$$ANI_{RL_2} = \frac{1}{p} \times [E(NTNSs)] \quad (3.33)$$

De la ecuación 3.23 se obtiene el primer elemento de la expresión 3.33. Para obtener el valor del número esperado de TNS, es decir $E(NTNSs)$, se hace uso de un procedimiento basado en las cadenas de Markov (Bourke, 1991); esto debido a la falta de independencia entre

los valores graficados en dos puntos consecutivos pues ellos comparten el valor de uno de los dos sumandos que se agregan para obtener el valor a graficar (figura 3.8).

Tabla 3.2 Límites para RL_2

p_0	$\alpha=0.05$		$\alpha=0.001$		$\alpha=0.0027$	
	LCL	UCL	LCL	UCL	LCL	UCL
0.0001	2421	55712	1034	74297	528	88997
0.0005	483	11140	206	14856	105	17795
0.001	241	5568	102	7425	52	8895
0.005	47	1111	20	1481	10	1775
0.01	23	553	9	738	4	885

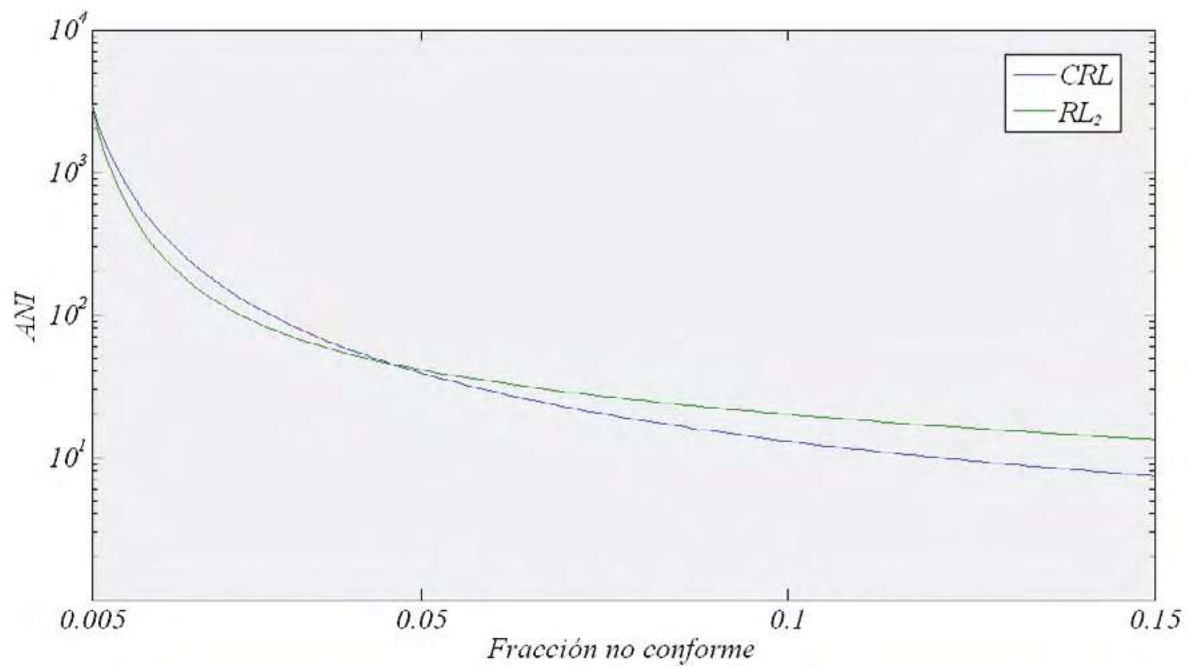
Fuente: el autor

Para el cálculo del ANI de un gráfico de control RL_2 se consideran los valores de la tabla 3.2. Así, con una probabilidad de falsa alarma de $\alpha = 0.0027$ y una fracción no conforme bajo control de $p_0 = 0.01$ el límite es $L = 4$. Utilizando el procedimiento presentado por Bourke (1991) se obtiene que para los anteriores parámetros el valor $E(NTNS_s)$ es igual a 1050.6039.

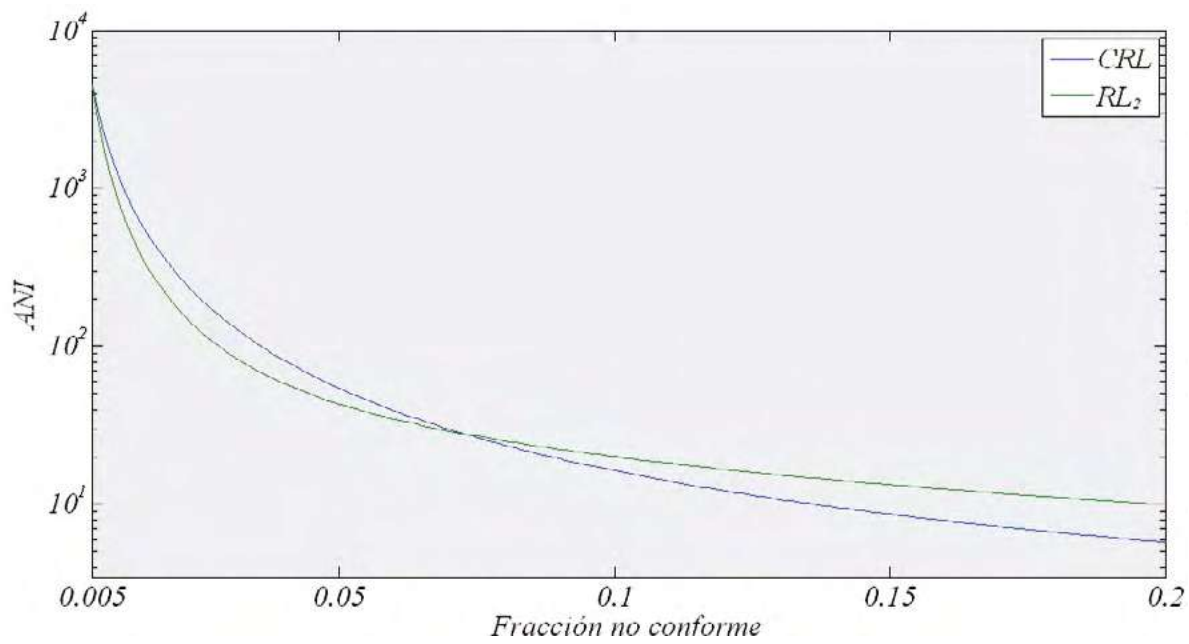
Por tanto ahora es posible calcular

$$ANI_{RL_2} = \frac{1}{0.01} \times [E(NTNS_s)] = 105060.3928$$

Algunas comparaciones entre el gráfico CRL y el RL_2 se presentan en las figuras 3.9 a 3.11 para diferentes límites de control inferior. Es posible observar que en las tres comparaciones el gráfico RL_2 siempre es más potente que el gráfico CRL para valores pequeños de la fracción no conforme p .

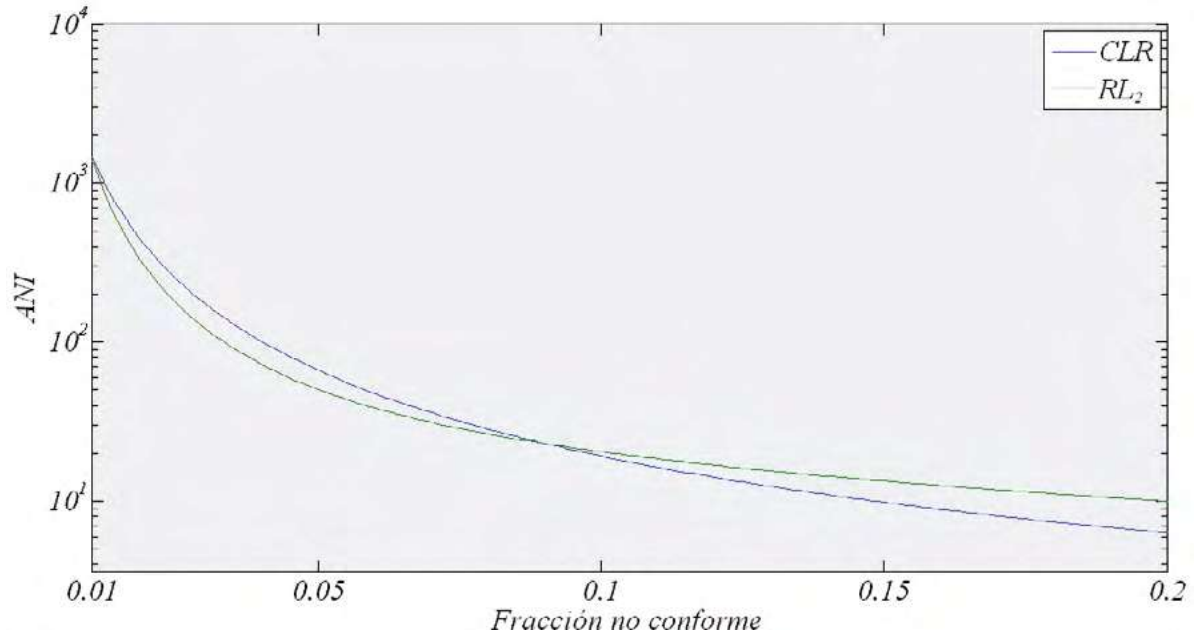
Figura 3.9 Comparación entre RL_2 y CRL caso $L = 100$ en RL_2 y $L=14$ en CRL

Fuente: el autor

Figura 3.10 Comparación entre RL_2 y CRL caso $L = 75$ en RL_2 y $L = 9$ en CRL

Fuente: el autor

Figura 3.11 Comparación entre RL_2 y CRL caso $L = 50$ en RL_2 y $L = 7$ en CRL



Fuente: el autor

Cabe mencionar que Bourke (2006) compara el desempeño del gráfico RL_2 frente al np para incrementos en la fracción no conforme en el escenario *steady-state* siendo el primero más eficiente, aunque se debe tener en cuenta el valor de falsa alarma utilizado. Por otra parte Bourke (2008) compara un gráfico de control sintético para detectar incrementos en la fracción no conforme, un gráfico RL -Cusum y un gráfico RL_2 también en el escenario *steady-state*.

3.4.4 Otros trabajos basados en la distribución binomial negativa

Xie, Lu y Goh (1999) presentan un procedimiento para procesos de manufactura automatizados que se basa en el conteo acumulativo de los artículos producidos antes de que se produzcan k no conformidades. Los autores presentan las dificultades de los tradicionales gráficos p y np en el contexto; calculan los límites exactos para el gráfico de control propuesto basado en la distribución binomial negativa y presentan una aplicación práctica para ilustrar el procedimiento.

Wu, Yeo y Fan (2000) realizan una comparación entre un gráfico CRL-Cusum (gráfico Cusum donde el estadístico es monitoreado como un CRL), un gráfico SCRL (gráfico basado en la distribución binomial negativa) y el tradicional gráfico np . Sus resultados demuestran la superioridad de los gráficos CRL-Cusum y SCRL frente al gráfico np . Reportan además que el gráfico CRL-Cusum supera al SCRL si el objetivo es detectar decrementos en la fracción no conforme p . Aunque el SCRL es superior al CRL-Cusum al detectar pequeños y moderados incrementos en p .

Otro estudio donde también es tratada la temática es el de Schwertman (2005) quien presenta tablas que proveen una información muy completa del gráfico de control basado en la binomial negativa, así como su probabilidad de falsa alarma y valores de ARL pertinentes entre otros datos.

Quaglino, Villafranca y Ramajo (2003) presentan un gráfico de control basado en la distribución binomial negativa. Se propone una nueva medida para establecer el desempeño del gráfico denominada EDE (Esperanza de Defectos en Exceso) e incorporan consideraciones estadísticas y económicas de manera conjunta. Por otra parte se desarrolla una nueva hipótesis que consiste en asumir que la salida de control se produce en un instante aleatorio del proceso y no inmediatamente después de registrado un punto en el gráfico.

3.5 Gráficos de control sintéticos

3.5.1 Para la media

Con el objetivo de detectar cambios en la media de un proceso más rápidamente que el tradicional gráfico de control $\bar{X}$ de Shewhart, Wu y Spedding (2000a) han propuesto una alternativa que consiste en un gráfico de control que integra el clásico $\bar{X}$ y el CRL (*Conforming Run Length*); los autores también presentan un procedimiento apropiado para optimizar el gráfico de control sintético.

En primera instancia, para implementar un gráfico sintético, se deben establecer los límites de control superior e inferior para el subgráfico $\bar{X}$ de Shewhart, y el límite de control inferior para el subgráfico *CRL*. A continuación se toma una muestra de tamaño n y se calcula la

media. Si la muestra se mantiene dentro de los límites de control del subgráfico $\bar{X}$ se considera que el proceso sigue bajo control y la muestra es conforme. Cuando una muestra esté más allá de los límites, se clasifica como no conforme, aquí se contabiliza el número de muestras hasta la siguiente no conformidad, con lo que se obtiene el valor CRL, si este valor es menor que el límite establecido para el subgráfico CRL, entonces habrá una señal de fuera de control. A diferencia del tradicional gráfico de control $\bar{X}$ de Shewhart, una salida de los límites de control en el subgráfico $\bar{X}$ no significará una señal de fuera de control, simplemente será una muestra no conforme. Por tanto, es posible concluir que la dinámica de un gráfico sintético es la misma que el gráfico CRL, pero considerando que cada unidad en el gráfico CRL es reemplazada por una muestra $\bar{X}$ en el gráfico sintético.

El cálculo del ARL en el gráfico de control sintético proviene del cálculo del ANI en el gráfico de control CRL (ecuación 3.27), pues la fracción no conforme p es reemplazada por la potencia del gráfico $\bar{X}$ (ecuación 3.6). Por tanto se tiene

$$ARL_{synth} = \frac{1}{P(\delta)} \times \frac{1}{1 - (1 - P(\delta))^L} \quad (3.34)$$

donde

$$P(\delta) = 1 - \Phi(Z - \delta\sqrt{n}) + \Phi(-Z - \delta\sqrt{n})$$

3.5.2 Para monitorear la desviación

Existe una propuesta de Huang y Cheng (2005) para monitorear la dispersión de un proceso, en este estudio se desarrolla un gráfico de control para controlar la variabilidad. También es presentado un procedimiento que permite obtener los parámetros que optimizan el gráfico y que es diseñado teniendo en cuenta los incrementos y los decrementos en la desviación de manera independiente.

El enfoque es análogo al trabajo presentado por Wu y Spedding (2000a), pues parte de la premisa de combinar un gráfico de control; en este caso un gráfico para la desviación típica S y un gráfico CRL. Huang y Cheng (2005) concluyen que su propuesta es una buena alternativa para monitorear la dispersión de un proceso y señalan que el gráfico detecta mejor los incrementos en la desviación que los decrementos. Adicionalmente su estudio presenta un esquema de intervalo de muestreo variable VSI para mejorar el desempeño de su gráfico.

Así como se realizan los cálculos en el gráfico de control sintético para la media, en el gráfico de control sintético, para la dispersión el valor de cada unidad inspeccionada en el subgráfico CRL es reemplazada por una muestra de tamaño n del denominado subgráfico S . Se considera N_s como el número de muestras necesarias hasta una salida del límite de control del subgráfico S en el gráfico sintético, y N_{CRL} se establece como el número de muestras CRL necesarias para una salida del límite de control del subgráfico CRL en el gráfico sintético. Es posible calcular el ARL del gráfico sintético para la dispersión denominado ARL_{synthS} el cual representa el número de muestras requeridas para detectar un cambio en σ ; así, en el gráfico de control sintético para la dispersión si $\delta' > 1$, es decir, para detectar aumentos de S , el ARL_{synthS} se calcula reemplazando el valor de p en la ecuación 3.27 por la ecuación 3.14 como sigue

$$ARL_{synthS} = E(N_s) \times E(N_{CRL})$$

$$ARL_{synthS} = \frac{1}{1 - F\left((n-1)\left(\frac{K^+}{\delta'}\right)^2\right)} \times \frac{1}{1 - F\left((n-1)\left(\frac{K^+}{\delta'}\right)^2\right)^{L-1}} \quad (3.35)$$

De igual manera, si $\delta' > 1$, es decir, para detectar decrementos de S , el ARL_{synthS} se calcula reemplazando el valor de p en la ecuación 3.27 por la ecuación 3.16, así

$$ARL_{synthS} = E(N_s) \times E(N_{CRL})$$

$$ARL_{synthS} = \frac{1}{1 - F\left((n-1)\left(\frac{K^-}{\delta'}\right)^2\right)} \times \frac{1}{1 - F\left((n-1)\left(\frac{K^-}{\delta'}\right)^2\right)^{L-1}} \quad (3.36)$$

Capítulo IV

Diseño y optimización del gráfico $\bar{X}$ - RL_2 **4.1 Generalidades**

Como se mencionó en el capítulo III, en el trabajo realizado por Wu y Spedding (2000a) se presentó el diseño de un gráfico de control sintético para mejorar el desempeño del gráfico de control $\bar{X}$ de Shewhart. A partir de ahí han sido varias las propuestas que hasta el momento se han desarrollado alrededor de los gráficos de control sintéticos. Dentro de las más relevantes se encuentra la de Calzada y Scariano (2001) quienes desarrollan un gráfico sintético bajo la hipótesis de no normalidad de los datos. Wu, Yeo y Spedding (2001) presentan un gráfico sintético para detectar incrementos en la fracción no conforme combinando un gráfico np y un gráfico CRL. Davis y Woodall (2002) plantean el gráfico sintético en el escenario *steady-state*. Huang y Cheng (2005) diseñan un gráfico sintético para monitorizar la variabilidad de un proceso y mejoran el desempeño del gráfico sintético utilizando intervalos de muestreo variable (VSI) entre otras estrategias. El estudio de los gráficos sintéticos ha sido también desarrollado en el ámbito multivariante (Aparisi y de Luna, 2009).

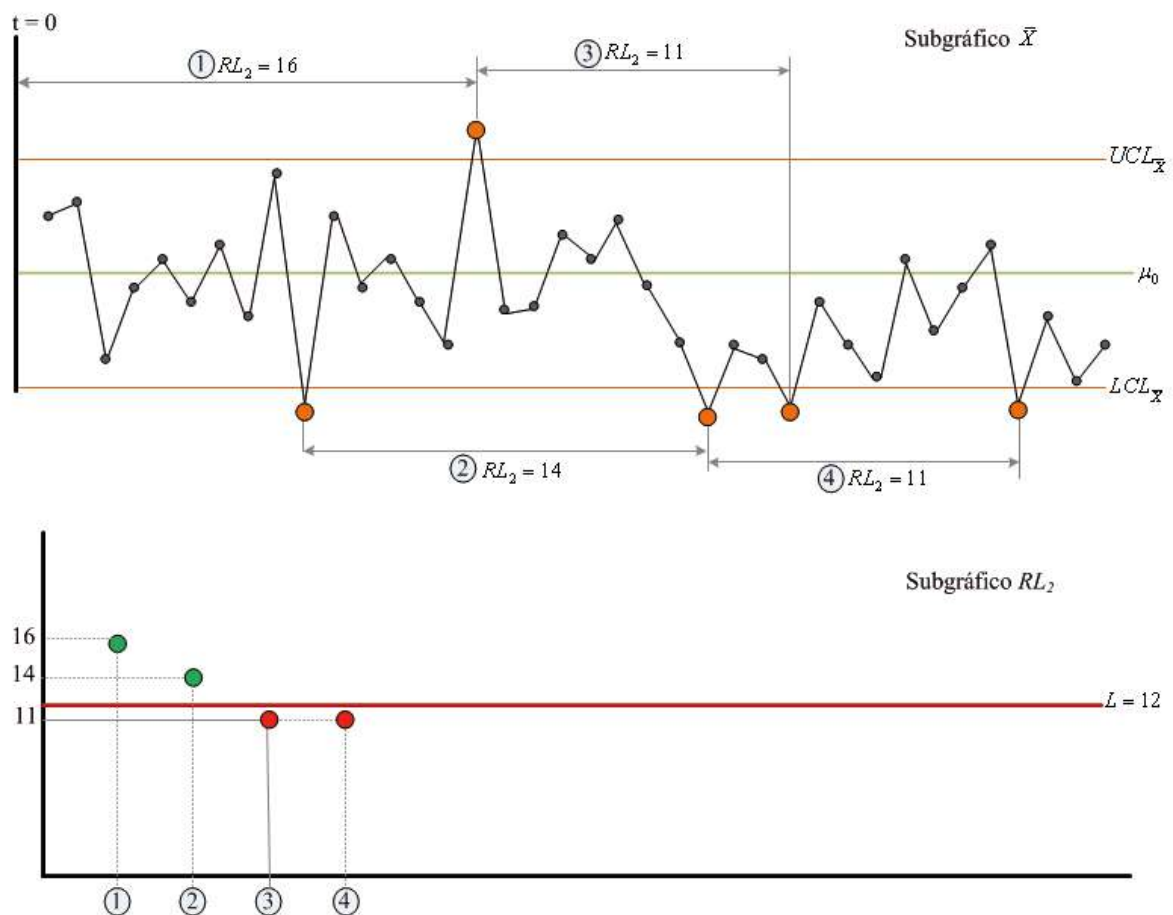
Según conclusiones reportadas por Bourke (1991) y presentadas en el capítulo III, el gráfico RL_2 presenta un mejor desempeño respecto al gráfico CRL para valores pequeños de la fracción no conforme. Bajo este supuesto, se ha decidido desarrollar en este capítulo un gráfico de control utilizando un $\bar{X}$ y un RL_2 con el fin de determinar su potencia utilizando como métrica el valor de ARL en el escenario *zero-state*.

4.2 Diseño

El gráfico de control $\bar{X}$ - RL_2 consiste en la utilización conjunta de un subgráfico $\bar{X}$ de Shewhart y un subgráfico RL_2 , siendo el subgráfico RL_2 diseñado para detectar incrementos en la probabilidad de que una muestra sea no conforme. Para el diseño del gráfico se asume una distribución normal de datos del proceso; además, la media y la desviación del proceso bajo control se suponen conocidos.

Desde el inicio del control del proceso en el subgráfico $\bar{X}$ se contabiliza el número de muestras hasta que se detecte la segunda muestra no conforme; así, el primer estadístico es obtenido y es plasmado en el subgráfico RL_2 . Para la obtención de un segundo estadístico se inicia el conteo de muestras en el subgráfico $\bar{X}$ desde la primera muestra no conforme obtenida hasta la tercera, de igual manera es llevado el valor al gráfico RL_2 . Así sucesivamente se obtienen los valores de los estadísticos para el subgráfico RL_2 . En el momento en el que el valor de un estadístico del subgráfico RL_2 es menor que el límite de control L se considera que existe una salida de control en el proceso. La figura 4.1 esquematiza el funcionamiento del gráfico de control $\bar{X}-RL_2$.

Figura 4.1 Esquematización del gráfico de control $\bar{X}-RL_2$



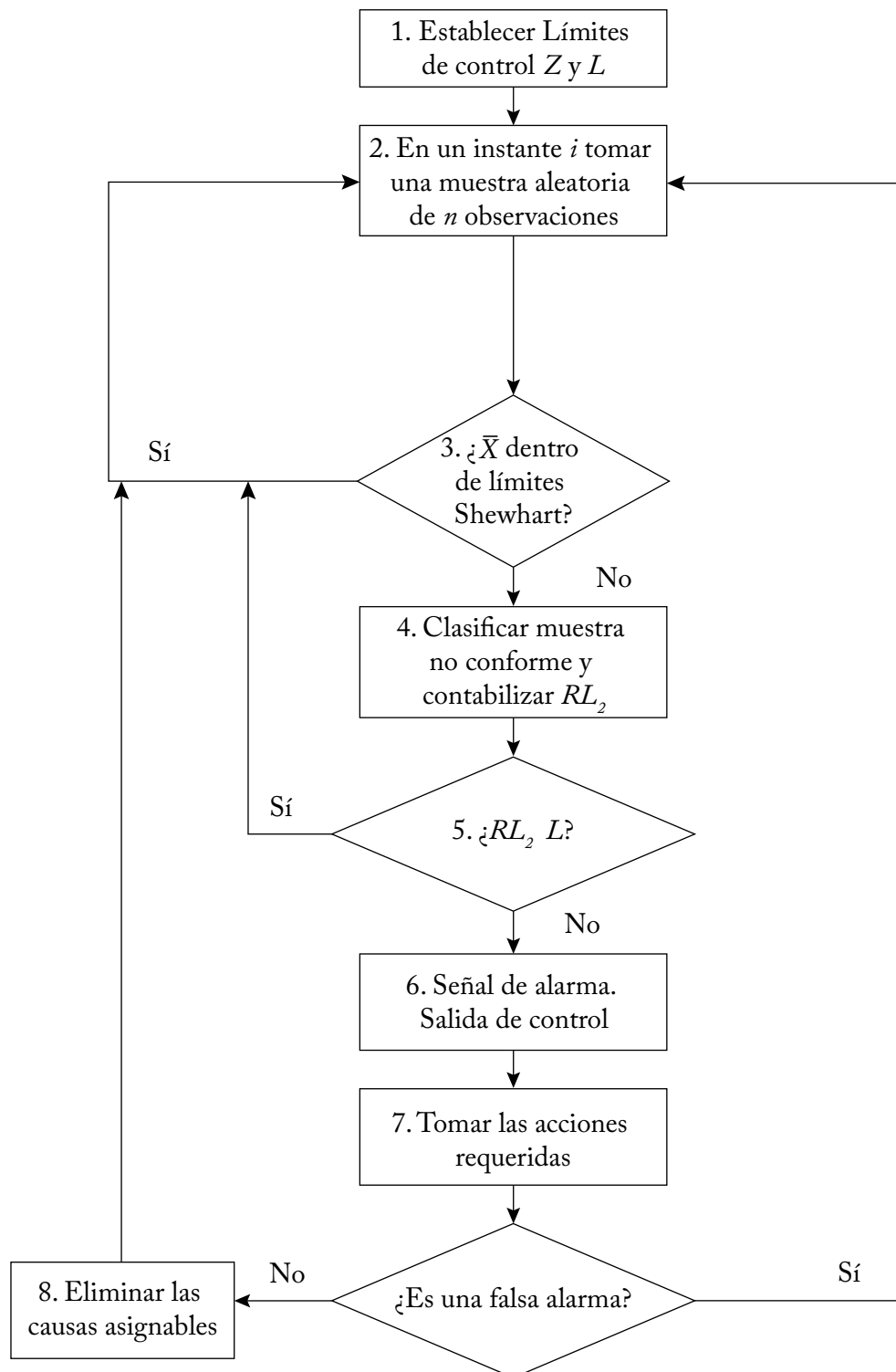
Fuente: el autor

Es importante mencionar que para el proceso de optimización, los límites de control del gráfico $\bar{X}$ - RL_2 se establecen fijando un ARL conjunto para ambos subgráficos, es decir que para el subgráfico $\bar{X}$ se establecen límites de control cuyo valor dependerá del límite de control inferior del subgráfico RL_2 , a fin de obtener un ARL global bajo control deseado. Consecuentemente será posible determinar un ARL fuera de control también global para un cambio en la media del proceso especificado.

4.3 Dinámica

El modo de operar del gráfico de control $\bar{X}$ - RL_2 se describe a continuación (figura 4.2):

1. Establecer los límites de control superior e inferior del subgráfico $\bar{X}$ de Shewhart y el límite inferior del subgráfico de control RL_2 .
 2. En un instante i tomar una muestra aleatoria de n observaciones y calcular la media muestral.
 3. Si el estadístico $\bar{X}$ está entre los límites del gráfico $\bar{X}$ de Shewhart, entonces se afirma que la muestra es conforme y se vuelve al paso 2. De lo contrario la muestra es denominada como no conforme y se prosigue al paso 4.
 4. Contabilizar el número de muestras en el gráfico $\bar{X}$ entre las dos más recientes muestras no conformes. Este número es contabilizado como una muestra para el subgráfico RL_2 .
 5. Si la muestra es mayor que el límite de control especificado L para el subgráfico RL_2 entonces se afirma que el proceso se encuentra bajo control y se debe volver al paso 2. En caso contrario se asume que el proceso se encuentra fuera de control y se continúa con el paso 6.
 6. Se genera una señal de fuera de control
 7. Tomar las acciones requeridas para encontrar y eliminar las causas asignables de la salida de control y así volver al paso 2.
-

Figura 4.2 Dinámica del gráfico de control $\bar{X}$ - RL_2 

4.4 Obtención del ARL

El ARL es considerado como la cantidad de muestras necesarias que en promedio se deben tomar hasta detectar un cambio en el proceso. Para el diseño de un gráfico de control se debe establecer un ARL bajo control deseado; es decir, un ARL cuando se supone que el proceso no ha sufrido cambios. Para la obtención de los límites de control es necesario tener en cuenta que estos han de estar condicionados a dicho ARL bajo control. En el momento que se produzca un cambio en el proceso es imperativo obtener los valores de ARL fuera de control para el gráfico que se desea desarrollar y así establecer su potencia; para ello son imprescindibles los valores de los límites de control y del ARL bajo control.

Teniendo en cuenta que en el gráfico RL_2 la fracción no conforme p es la probabilidad de que una unidad sea no conforme (Bourke, 1991), en el gráfico $\bar{X}$ - RL_2 esa probabilidad es reemplazada por la probabilidad P de que una muestra $\bar{X}$ supere los límites de control del subgráfico $\bar{X}$. Por tanto, de las ecuaciones 3.4 y 3.6 se obtiene $P = 1 - \Phi(Z - \delta\sqrt{n}) + \Phi(-Z - \delta\sqrt{n})$. Reemplazando el valor de la fracción no conforme p en la ecuación 3.33, por la probabilidad P del subgráfico $\bar{X}$ se calcula

$$ARL_{\bar{X}-RL_2} = \frac{1}{P} \times [E(NTNS_{\bar{X}})] \quad (4.1)$$

Utilizando la nomenclatura usada por Bourke (1991) se considera para el cálculo de la expresión 4.1 (y de aquí en adelante para el capítulo IV), el parámetro $TNS_{\bar{X}}$ (*Terminal Nonconformity Sequence*) como una racha de muestras conformes en el subgráfico $\bar{X}$ hasta una muestra no conforme. Así, se denomina $E(NTNS_{\bar{X}})$ como el número esperado de $TNS_{\bar{X}}$, el cual es calculado mediante un procedimiento basado en cadenas de Markov que se describe a continuación.

En el gráfico $\bar{X}$ - RL_2 una señal ocurre cuando la suma de las dos más recientes longitudes de racha $\bar{X}_{i-1} + \bar{X}_i$ del subgráfico $\bar{X}$ es menor que el límite de control inferior L del subgráfico RL_2 , es decir, cuando se presenta un cambio en la media del proceso. Los estados transitorios de la cadena de Markov estarán determinados por el $TNS_{\bar{X}}$ más reciente. El estado absorbente

corresponderá a la ocurrencia de una señal de salida de control. La matriz de transición $\mathbf{R}$ de la cadena de Markov en un gráfico de control $\bar{X}$ - RL_2 es representada así

$$\mathbf{R} = \begin{matrix} & & & & \textit{Estado} & & \textit{Actual} & & \\ & & & & 0 & 1 & 2 & \dots & (L-2) & (L-1) & (\geq L) \\ & & & & - & - & - & - & - & - & - \\ \textit{Estado} & 0 & \langle & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-F(L-1) \\ & 1 & \langle & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(L-1) & 1-F(L-1) \\ & 2 & \langle & 0 & 0 & 0 & \dots & f(L-2) & f(L-1) & 1-F(L-1) \\ \textit{Previo} & 3 & \langle & 0 & 0 & 0 & \dots & f(L-2) & f(L-1) & 1-F(L-1) \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & (L-2) & \langle & 0 & 0 & f(2) & \dots & f(L-2) & f(L-1) & 1-F(L-1) \\ & (L-1) & \langle & 0 & 0 & f(2) & \dots & f(L-2) & f(L-1) & 1-F(L-1) \\ & (\geq L) & \langle & f(0) & f(1) & f(2) & \dots & f(L-2) & f(L-1) & 1-F(L-1) \end{matrix} \quad (4.2)$$

Donde

$$f(r) = \Pr(X_i = r) = \left[(1-(P))^r * (P) \right] \text{ para } r = 0, 1, 2, \dots, (L-1)$$

$$y \quad F(L-1) = \sum_{r=0}^{L-1} f(r)$$

En la ecuación 3.19 se establece la matriz fundamental $\mathbf{F}$ para una cadena de Markov. Con la sumatoria de los elementos de la fila i de la matriz $\mathbf{F}$ se obtiene la media del número de iteraciones necesarias hasta que se llega a un estado absorbente, condicionado a que el proceso se haya iniciado en un estado transitorio i . Por tanto, análogamente a la ecuación 3.20, para el caso del gráfico $\bar{X}$ - RL_2 se obtiene el vector

$$\mathbf{E}(\mathbf{NTNS}\bar{\mathbf{X}}) = (\mathbf{I}-\mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{1} \quad (4.3)$$

Donde $\mathbf{1}$ es un vector columna de unos, $\mathbf{I}$ es una matriz identidad de tamaño $(L+1) \times (L+1)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{NTNS}\bar{X})$ es el vector que contiene los valores $E(\mathbf{NTNS}\bar{X})$ de cada uno de los estados transitorios i no absorbentes. Así, para obtener el valor $E(\mathbf{NTNS}\bar{X}S)$ de un determinado estado transitorio inicial i de la ecuación 3.21 se calcula

$$E(\mathbf{NTNS}_{\bar{X}S})_i = \mathbf{S}'(\mathbf{I}-\mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{1} \quad (4.4)$$

Al obtener el valor $E(\mathbf{NTNS}\bar{X})$ para calcular el ARL del gráfico $\bar{X}$ - RL_2 se debe considerar que el estado inicial debe ser mayor o igual a L . Así, el vector $\mathbf{S}'$ de tamaño $(L+1)$ tendrá la forma $\mathbf{S}' = \langle 0, 0, 0 \dots 0, 1 \rangle$ con lo cual el estado transitorio inicial estará en la última posición del vector.

Para ejemplificar las posibles transiciones en la cadena de Markov, considérese un gráfico $\bar{X}$ - RL_2 con límite de control inferior $L = 10$, entonces

- Si la primera longitud de racha es $RL_{2(i-1)} = 4$, se considera que la cadena de Markov estuvo en el estado 4.
- Si la segunda longitud de racha para este caso es $RL_{2(i)} < L - 5$, es decir $RL_{2(i)} < 5$ se produce una señal y el siguiente estado es absorbente.
- Si $RL_{2(i)} \geq L$ el siguiente estado será $\geq L$ y ninguna señal es producida.
- Si $RL_{2(i)} = L - 4$ tampoco se produce señal y el siguiente estado es $L-4$.

En apartados posteriores se usará este caso para ilustrar algunos cálculos.

4.5 Obtención de límites para un ARL bajo control

Cuando se asume un valor de ARL bajo control determinado se está estableciendo una tasa de falsas alarmas, por tanto se considera que ningún cambio ha ocurrido en el proceso, con lo cual el valor de δ es igual a cero. Los parámetros a obtener corresponden al valor del límite Z o distancia de la media en desviaciones típicas del subgráfico $\bar{X}$ y el valor del límite de control L del subgráfico RL_2 . Entonces los valores Z y L deben satisfacer la ecuación

$$ARL(\delta=0)_{\bar{X}-RL_2} = \frac{1}{2\Phi(-Z)} \times [E_0(\text{NTNS}_{\bar{X}})] \quad (4.5)$$

Donde $E_0(\text{NTNS}_{\bar{X}})$ representa el número esperado de $TNS_{\bar{X}}$ bajo control. La matriz de transición $\mathbf{R}$ necesaria para obtener el valor de $E_0(\text{NTNS}_{\bar{X}})$ utiliza la expresión $2\Phi(-Z)$ como probabilidad en los valores $f(r)$ para el respectivo cálculo. La expresión $2\Phi(-Z)$ proviene de la ecuación 3.4 donde el valor δ es cero. Para obtener el valor de los límites de control del gráfico $\bar{X}-RL_2$ con un ARL bajo control especificado, por ejemplo 370, se debe hallar los valores para los límites Z y L que satisfagan la igualdad

$$370 = \frac{1}{2\Phi(-Z)} \times [E_0(\text{NTNS}_{\bar{X}})]$$

En primer lugar se debe determinar la matriz de transición $\mathbf{R}$ necesaria para obtener el valor de $E_0(\text{NTNS}_{\bar{X}})$; como se mencionó, el tamaño de dicha matriz se establece mediante el valor del límite de control L del subgráfico RL_2 , así, el tamaño de la matriz será $(L+1) \times (L+1)$. Ejemplificando, si se asigna un límite de control L igual a 4 se calcula

$$E_0(\text{NTNS}_{\bar{X}})_i = \mathbf{S}'(\mathbf{I}-\mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{1}$$

Donde la matriz de transición $\mathbf{R}$ para $L = 4$ es

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1-F(L-1) \\ 0 & 0 & 0 & f(3) & 1-F(L-1) \\ 0 & 0 & f(2) & f(3) & 1-F(L-1) \\ 0 & f(1) & f(2) & f(3) & 1-F(L-1) \\ f(0) & f(1) & f(2) & f(3) & 1-F(L-1) \end{bmatrix}$$

Los valores $f(r)$ de la matriz se obtienen utilizando la distribución geométrica, así

$$f(r) = \Pr(X_i = r) = \left[1 - (2\Phi(-Z))\right]^r * [2\Phi(-Z)]$$

$$F(L-1) = \sum_{r=0}^{L-1} f(r)$$

Mediante el uso del programa Mathcad se resuelve numéricamente la ecuación 4.5 para encontrar un valor de Z que debe satisfacer para este caso un valor de ARL bajo control igual 370. El valor Z obtenido es de 1.7978, es decir que para un límite igual $L = 4$ del subgráfico RL_2 es necesario situar los límites del subgráfico $\bar{X}$ a 1.7978 desviaciones de la media. Algunos valores de Z para varios valores de L se observan en la tabla 4.1.

Tabla 4.1 Valor límites de control

L y Z $ARL(0) = 370$	
L	Z
2	1.625
3	1.726
4	1.798
5	1.853
13	2.083
19	2.170
53	2.388
80	2.467

Fuente: el autor

4.6 Cálculo del ARL fuera de control

El cálculo del ARL fuera de control consiste en determinar el desempeño del gráfico cuando se asume un cambio de δ_d . El valor δ_d es denominado como el cambio de diseño en la media del proceso. Teniendo en cuenta esta consideración, y con los valores L y Z obtenidos en el cálculo del ARL bajo control, se procede a encontrar el valor de ARL fuera de control utilizando la expresión

$$ARL(\delta_d)_{\bar{X}-RL_2} = \frac{1}{P(\delta_d)} * [E_\delta(NTNS_{\bar{X}})] \quad (4.6)$$

Donde $E_\delta(NTNS_{\bar{X}})$ representa el número esperado de $TNS_{\bar{X}}$ fuera de control. En este caso, la matriz de transición $\mathbf{R}$ necesaria para obtener el valor de $E_\delta(NTNS_{\bar{X}})$ utiliza la expresión $P(\delta_d) = 1 - \Phi(Z - \delta_d \sqrt{n}) + \Phi(-Z - \delta_d \sqrt{n})$ como probabilidad en los valores $f(r)$.

Los parámetros necesarios para calcular el ARL fuera de control son (asumiendo una distribución normal de los datos del proceso con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$) el tamaño de la muestra n , la magnitud del cambio δ_d y los límites L y Z de los subgráficos que permitan el ARL bajo control deseado. Suponiendo entonces:

- $n = 4$
- $\delta_d = 0.5$

Según la tabla 4.1 si $L = 4$ entonces $Z = 1.7978$ para un $ARL(0) = 370$

Inicialmente de calcula

$$P(\delta_d) = 1 - \Phi((1.7978) - (0.5)\sqrt{4}) + \Phi(-(1.7978) - (0.5)\sqrt{4})$$

Ahora obteniendo

$$E_\delta(NTNS_{\bar{X}})_i = \mathbf{S}'(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{1}$$

Donde la matriz de transición $\mathbf{R}$ es

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - F(L-1) \\ 0 & 0 & 0 & f(3) & 1 - F(L-1) \\ 0 & 0 & f(2) & f(3) & 1 - F(L-1) \\ 0 & f(1) & f(2) & f(3) & 1 - F(L-1) \\ f(0) & f(1) & f(2) & f(3) & 1 - F(L-1) \end{bmatrix}$$

Los valores $f(r)$ en el interior de la matriz se obtienen utilizando la distribución geométrica, así

$$f(r) = \Pr(X_i = r) = [1 - (P(\delta_d))]^r (P(\delta_d))$$

Y el valor correspondiente a $F(LCL - 1)$ se calcula

$$F(LCL - 1) = \sum_{r=0}^{L-1} f(r)$$

De la expresión 4.6 se obtiene

$$ARL(\delta_d = 0.5)_{\bar{X}-RL_2} = \frac{1}{P(\delta_d)} \times [S'(\mathbf{I}-\mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{1}]$$

La expresión anterior tiene como resultado $ARL(\delta_d = 0.5)_{\bar{X}-RL} = 24.132$

Algunos valores de $ARL(\delta_d)$ en el gráfico de control $\bar{X}$ - RL_2 para un ARL bajo control de 370 y magnitudes de cambio $\delta_d = 0.3, 0.5$ y 0.7 se presentan en la tabla 4.2.

4.7 Optimización

En la tabla 4.1 se observa que es posible obtener el mismo ARL bajo control para diferentes límites de control de los respectivos subgráficos. Ahora bien, cuando se asume un cambio en la media de tamaño δ_d , cada uno de los valores de límites generará diferentes ARL fuera de control como se aprecia en la tabla 4.2 para el mismo valor δ_d . Es posible, entonces, encontrar mediante el procedimiento adecuado los valores de L y Z que generen un ARL mínimo.

Esta es la premisa básica para la optimización del gráfico de control $\bar{X}$ - RL_2 . El procedimiento para encontrar este ARL óptimo consiste en:

1. Especificar los valores para la media μ , la desviación σ , el tamaño de muestra n , el cambio δ_d y $ARL_{\bar{X}-RL_2}(\delta=0)$ o bajo control.
2. Inicializar con el límite inferior para el subgráfico RL_2 en 2, es decir $L = 2$.
3. Obtener el valor de Z resolviendo numéricamente la ecuación 4.5.
4. Calcular el valor de ARL para un cambio δ_d usando la ecuación 4.6 con los valores L y Z actuales.
5. Si el valor de $ARL_{\bar{X}-RL_2}$ disminuye se incrementa el valor de L en una unidad y volver al paso 3. Si el valor de $ARL_{\bar{X}-RL_2}$ se incrementa, se detiene el procedimiento de búsqueda y se resta una unidad al valor de L con el que el $ARL_{\bar{X}-RL_2}$ aumentó y se continúa con el paso 6.
6. Tomar como parámetros de diseño el valor actual de L que corresponde al límite inferior del subgráfico RL_2 y Z con el cual se calculan los límites para el subgráfico $\bar{X}$.
7. El límite inferior de control del subgráfico RL_2 es L y los límites de control del subgráfico $\bar{X}$ de Shewhart son establecidos a Z desviaciones de la media.
8. Se concluye el proceso de búsqueda para el diseño óptimo del gráfico de control $\bar{X}$ - RL_2 .

En la tabla 4.3 se ejemplifica el proceso de optimización para el gráfico $\bar{X}$ - RL_2 . Aunque en realidad el procedimiento descrito usa cada posible valor entero de L desde 2, la tabla 4.3 muestra solo algunos valores.

Tabla 4.2 Valores ARL fuera de control: caso ARL bajo control 370, $n = 4$

Límites		Magnitud del cambio δ_d		
L	Z	0.3	0.5	0.7
2	1.625	103.98	29.09	10.46
3	1.726	95.84	25.91	9.38
4	1.798	90.74	24.13	8.86
5	1.853	87.21	23.01	8.59
13	2.083	76.39	20.68	8.72
19	2.170	74.11	28.86	9.34
53	2.388	74.41	25.01	12.36
80	2.467	77.75	28.29	13.97
100	2.507	80.50	30.41	14.91

Fuente: el autor

Tabla 4.3 Búsqueda de parámetros óptimos caso ARL bajo control 370, $n = 4$

$\delta_d = 0.3$			$\delta_d = 0.5$			$\delta_d = 0.7$		
L	Z	ARL	L	Z	ARL	L	Z	ARL
2	1.6250	103.98	2	1.6250	29.09	2	1.6250	10.46
3	1.7262	95.85	3	1.7262	25.91	3	1.7262	9.38
4	1.7978	90.74	4	1.7978	24.13	8	1.9681	8.43
5	1.8533	87.22	5	1.8533	23.01	9	1.9960	8.42
13	2.0833	76.39	14	2.1005	20.67	10	2.0215	8.48
31	2.2772	72.95	15	2.1160	20.66	13	2.0833	8.72
32	2.2840	72.94	16	2.1311	20.69	19	2.1702	9.34
33	2.2904	73.00	30	2.2702	22.01	30	2.2706	10.47
53	2.3875	74.42	42	2.3406	23.57	42	2.3406	11.54
80	2.4677	77.75	53	2.3875	25.01	53	2.3875	12.36
100	2.5073	80.50	60	2.6755	25.91	60	2.4667	12.83

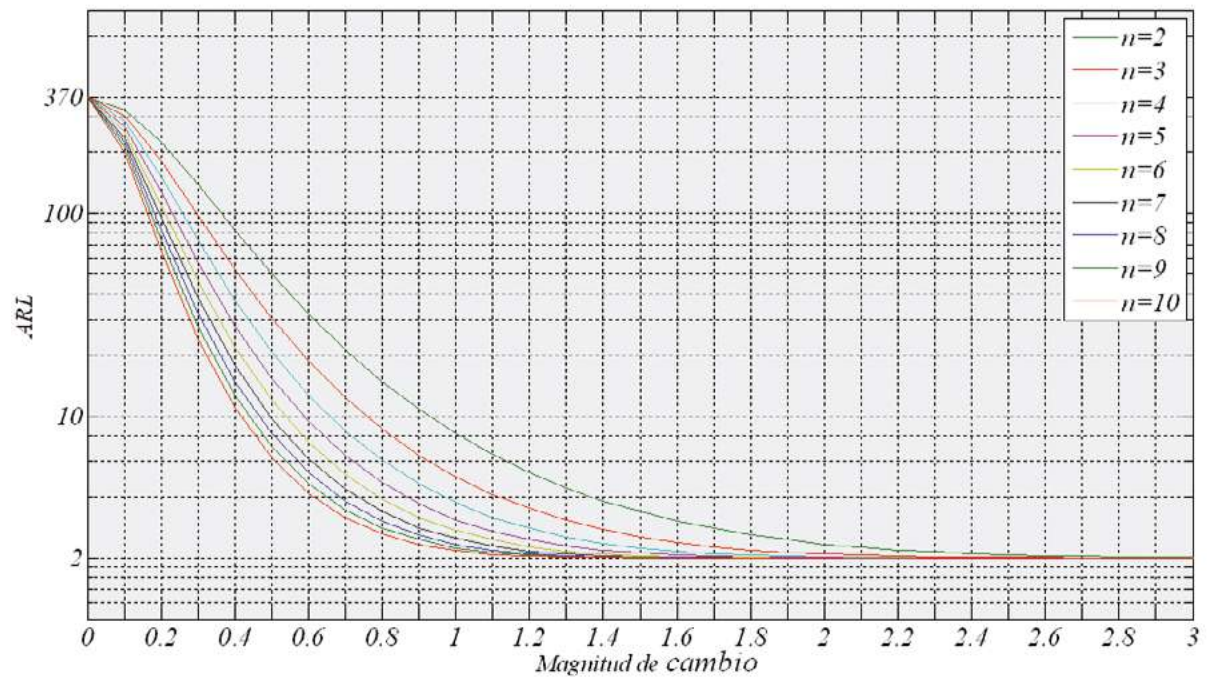
Fuente: el autor

La figura 4.3 muestra las diferentes curvas de $ARL(\delta_d)$ del gráfico de control $\bar{X}$ -RL₂ para un ARL bajo control de 370 y tamaños de muestra de 2 a 10. Asimismo, en la tabla 4.4 se presentan los valores óptimos del gráfico de control $\bar{X}$ -RL₂ para los mismos parámetros.

En el anexo I se presentan los valores óptimos para ARL bajo control de 200, 370, 500 y 1000; tamaño de muestra de 1 a 10 y magnitudes de cambio de 0.1 a 3.

Es de destacar que cuando los parámetros de diseño son elevados ($n > 5$ y $\delta_d > 1.3$) los límites de control obtenidos tienden a converger a un mismo valor, y el ARL fuera de control óptimo nunca será menor que 2.

Figura 4.3 Curvas de ARL del gráfico de control $\bar{X}-RL_2$ para tamaño de muestra 2 a 10



Fuente: el autor

Tabla 4.4 Valores óptimos de $ARL(\delta_d)$: caso ARL bajo control 370, δ_d 0.1 a 1

n	δ_d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
2	L	76	62	47	35	26	20	15	12	10	8
	Z	2.457	2.418	2.363	2.303	2.239	2.181	2.116	2.064	2.021	1.968
	$ARL(\delta_d)$	321.7	223.3	137.7	82.47	50.3	31.93	21.23	14.8	10.79	8.184
3	L	73	55	38	27	19	14	11	9	7	6
	Z	2.449	2.395	2.320	2.247	2.170	2.100	2.044	1.996	1.936	1.898
	$ARL(\delta_d)$	301.1	181.2	97.43	52.8	30.27	18.62	12.29	8.646	6.421	5.026
4	L	70	49	32	22	15	11	9	7	6	5
	Z	2.441	2.372	2.284	2.203	2.116	2.044	1.996	1.936	1.898	1.853
	$ARL(\delta_d)$	282.5	150.2	72.94	37.13	20.66	12.63	8.425	6.042	4.636	3.745
5	L	68	44	28	18	13	9	7	6	5	4
	Z	2.436	2.350	2.255	2.158	2.083	1.996	1.936	1.898	1.853	1.798
	$ARL(\delta_d)$	265.6	126.8	56.92	27.82	15.3	9.386	6.359	4.695	3.703	3.079
6	L	66	41	24	16	11	8	6	5	4	4
	Z	2.43	2.335	2.222	2.131	2.044	1.968	1.898	1.853	1.798	1.798
	$ARL(\delta_d)$	250.2	108.6	45.84	21.84	11.96	7.436	5.138	3.887	3.146	2.724
7	L	64	37	22	14	9	7	6	5	4	4
	Z	2.424	2.314	2.203	2.1	1.996	1.936	1.898	1.853	1.798	1.798
	$ARL(\delta_d)$	236.1	94.11	37.87	17.74	9.734	6.153	4.379	3.401	2.821	2.505
8	L	62	35	20	12	8	6	5	4	4	3
	Z	2.418	2.303	2.181	2.064	1.968	1.898	1.853	1.798	1.798	1.726
	$ARL(\delta_d)$	223.3	82.47	31.93	14.8	8.184	5.256	3.814	3.026	2.607	2.326
9	L	60	32	18	11	8	6	5	4	4	3
	Z	2.412	2.284	2.158	2.044	1.968	1.898	1.853	1.798	1.798	1.726
	$ARL(\delta_d)$	211.4	72.94	27.37	12.63	7.077	4.636	3.444	2.793	2.457	2.231
10	L	58	30	16	10	7	5	4	4	3	3
	Z	2.405	2.27	2.131	2.021	1.936	1.853	1.798	1.798	1.726	1.726
	$ARL(\delta_d)$	200.5	65.03	23.79	10.96	6.21	4.133	3.126	2.624	2.315	2.165
n	δ_d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1

Continúa

Tabla 4.4 Valores óptimos de $ARL(\delta_d)$: caso ARL bajo control 370, δ_d 1,1 a 2 (continuación)

n	δ_d	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
2	L	6	6	5	5	4	4	4	4	3	3
	Z	1.792	1.792	1.746	1.746	1.690	1.690	1.690	1.690	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	5.507	4.618	3.94	3.481	3.094	2.838	2.645	2.498	2.348	2.262
3	L	5	4	4	4	3	3	3	3	3	3
	Z	1.746	1.690	1.690	1.690	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	3.705	3.187	2.855	2.621	2.415	2.294	2.207	2.144	2.099	2.067
4	L	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.690	1.690	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	2.942	2.65	2.413	2.278	2.185	2.121	2.078	2.049	2.029	2.017
5	L	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.690	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	2.583	2.35	2.224	2.141	2.086	2.051	2.029	2.016	2.009	2.004
6	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	2.343	2.209	2.125	2.073	2.04	2.022	2.011	2.005	2.002	2.001
7	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	2.222	2.128	2.071	2.038	2.019	2.009	2.004	2.002	2.001	2
8	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	2.146	2.079	2.04	2.019	2.009	2.004	2.001	2.001	2	2
9	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	2.097	2.049	2.023	2.01	2.004	2.001	2	2	2	2
10	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	2.065	2.03	2.013	2.005	2.002	2.001	2	2	2	2
n	δ_d	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2

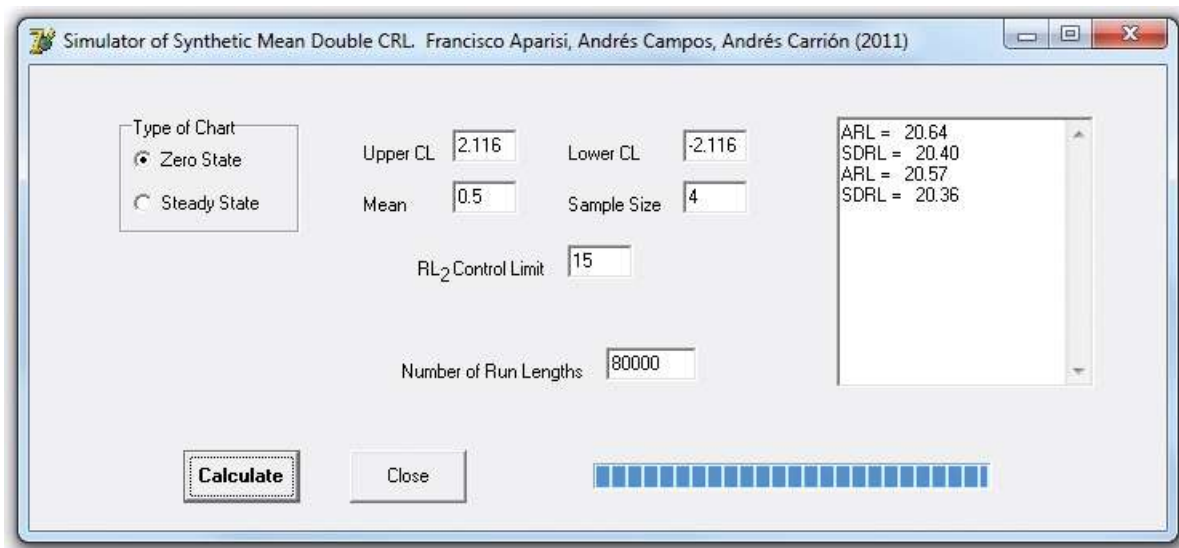
Fuente: el autor

4.8 Comprobación de parámetros y valores de ARL

Con el objetivo de corroborar la corrección del procedimiento desarrollado en los apartados anteriores para obtener el ARL óptimo del nuevo gráfico de control $\bar{X}-RL_2$ mediante el método analítico se desarrolló un programa informático en Delphi 7 para Windows® que, mediante simulación, calcula el desempeño del gráfico $\bar{X}-RL_2$.

La figura 4.4 presenta la interfaz del programa de simulación. Los datos de entrada para simular el desempeño del gráfico $\bar{X}-RL_2$ son los límites de control del subgráfico $\bar{X}$, el límite del subgráfico RL_2 , el cambio de diseño en la media, el tamaño de muestra y el número de rachas a simular.

Figura 4.4 Interfaz del simulador del gráfico $\bar{X}-RL_2$



Fuente: el autor

Con el programa desarrollado se obtiene el valor de ARL y la desviación típica de racha SDRL. La figura 4.4 muestra los resultados obtenidos para los siguientes parámetros:

- Límite de control del subgráfico $\bar{X}$ a ± 2.116 desviaciones de la media.

- Límite de control del subgráfico RL_2 de 15
- Cambio de diseño en la media a detectar de 0.5
- Tamaño de muestra de 4
- Número de rachas a simular 80 000

El valor obtenido de ARL con el método analítico y dichos parámetros se encuentra en la tabla 4.4 y es de 20.66. Con el simulador se han obtenido para la figura 4.4 valores de ARL para dos corridas realizadas, 20.64 y 20.57.

Para comprobar formalmente el error de estimación por simulación se ha establecido un nivel de confianza del 95 %; así, se tiene que para una distribución normal, las observaciones deben estar en un rango de ± 1.9599 desviaciones típicas de la media; por tanto:

$$|ARL_{analítico} - ARL_{simulado}| \leq \frac{1.9599 * SDRL}{\sqrt{80000}} \quad (4.7)$$

En la tabla 4.5 se presentan los valores de ARL bajo control simulados con diferentes parámetros para un ARL teórico de 370 y su respectiva distribución típica de racha SDRL. Como es posible observar, la diferencia obtenida nunca es mayor que la diferencia permitida a un nivel de confianza del 95 %.

Tabla 4.5 Comparación de ARL bajo control teórico y simulado

δ_d	L	Z	$ARL(0)$ Teórico	$ARL(0)$ Simulado	$SDRL$	Diferencia obtenida	Diferencia máxima permitida al 95 %
0.2	49	2.372	370	371.78	399.99	1.780	2.77165
0.4	22	2.203	370	369.09	392.24	0.910	2.71795
0.6	11	2.044	370	368.11	385.34	1.890	2.67013
0.8	7	1.936	370	371.50	383.45	1.500	2.65704
1	5	1.853	370	370.94	382.93	0.940	2.65343
1.2	4	1.798	370	369.34	377.07	0.660	2.61283
1.4	3	1.726	370	368.99	377.31	1.010	2.61449
1.6	3	1.726	370	370.84	379.79	0.840	2.63168
1.8	3	1.726	370	369.08	376.84	0.920	2.61123
2	3	1.726	370	370.42	376.28	0.420	2.60735

Fuente: el autor

En la tabla 4.6 se presentan los valores de ARL fuera de control tanto teóricos como simulados y su respectiva desviación típica de racha SDRL. Igualmente se observa que en ningún caso la diferencia obtenida supera la diferencia permitida.

Tabla 4.6 Comparación de ARL fuera de control teórico y simulado para $n = 4$

δ_d	L	Z	ARL(δ) Teórico	ARL(δ) Simulado	SDRL	Diferencia obtenida	Diferencia máxima permitida al 95 %
0.2	49	2.372	150.2	150.92	162.52	0.720	1.12615
0.4	22	2.203	37.13	37.27	38.34	0.140	0.26567
0.6	11	2.044	12.63	12.65	11.78	0.020	0.08163
0.8	7	1.936	6.042	6.04	4.67	0.002	0.03236
1	5	1.853	3.745	3.75	2.24	0.005	0.01552
1.2	4	1.798	2.793	2.79	1.19	0.003	0.00825
1.4	3	1.726	2.345	2.35	0.72	0.002	0.00499
1.6	3	1.726	2.153	2.15	0.42	0.001	0.00291
1.8	3	1.726	2.063	2.06	0.26	0.001	0.00180
2	3	1.726	2.023	2.02	0.15	0.001	0.00104

Fuente: el autor

4.9 Desempeño

El desempeño del gráfico de control $\bar{X}$ - RL_2 se compara con

- Gráfico $\bar{X}$ de Shewhart
- Gráfico sintético para la media
- Gráficos $\bar{X}$ de Shewhart con reglas adicionales
- Gráfico Cusum y EWMA

Para todos se utiliza la métrica del ARL.

4.9.1. El gráfico de control $\bar{X}$ -RL2 frente al gráfico $\bar{X}$ de Shewhart

Los parámetros de comparación utilizados para ambos gráficos son:

- Escenario *zero-state*
- Óptimos para un valor δ_d dado
- ARL bajo control 200, 370, 500, 1000
- Tamaño de muestra $n = 1, 2, \dots, 10$
- Magnitud de cambio de diseño $\delta_d = 0.1, 0.2, \dots, 3$

Las comparaciones son efectuadas mediante el uso del porcentaje de mejora dado por

$$\% \text{ mejora} = \frac{ARL_{\bar{X}}(\delta_d) - ARL_{\bar{X}-RL_2}(\delta_d)}{ARL_{\bar{X}}(\delta_d)} \times 100 \quad (4.8)$$

En primer lugar, en esta sección se presentarán algunos valores numéricos de porcentaje de mejora que se muestran en la tabla 4.7. Sin embargo, para la generación de las figuras 4.5 a 4.8 se usaron la totalidad de las combinaciones posibles de parámetros.

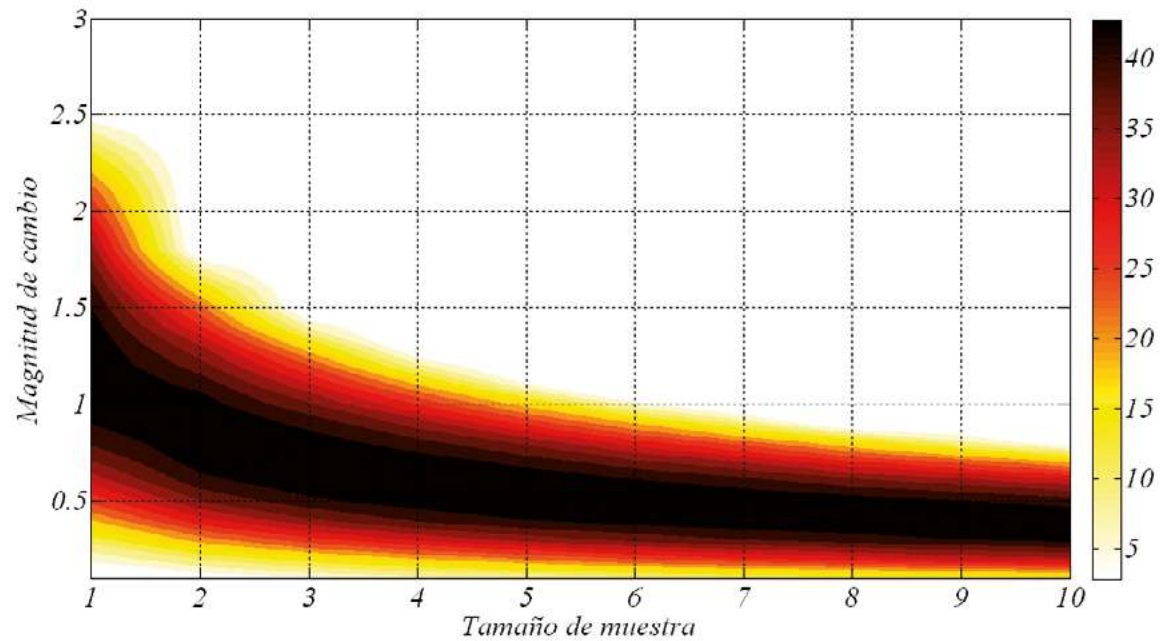
Para cambios importantes, cuando el gráfico de $\bar{X}$ Shewhart llega a tener valores de ARL cercanos a 1, el gráfico de control $\bar{X}$ -RL₂, por su construcción, tendrá valores de ARL cercanos a 2. Por ello, el “empeoramiento” del ARL en el gráfico $\bar{X}$ -RL₂ frente al de gráfico $\bar{X}$ se estabiliza en el 100 %.

En las figuras 4.5 a 4.8 se observan diagramas que mediante curvas de nivel representan los porcentajes de mejora del gráfico de control $\bar{X}$ -RL₂ frente al gráfico de control $\bar{X}$ de Shewhart. En las zonas más oscuras se encuentran los mayores porcentajes de mejora obtenidos. Por ejemplo, para un ARL bajo control de 370, los mayores porcentajes alcanzan valores del 50 %, como en el punto donde $n = 2$ y $\delta_d = 1$ (valor exacto 53.81 %). En la medida que la intensidad del color descende (negro-rojo-naranja-amarillo-blanco) el valor del porcentaje de mejora lo hace también. La zona blanca representa los valores donde el desempeño del gráfico de control $\bar{X}$ -RL₂ frente al gráfico $\bar{X}$ de Shewhart es igual o menor.

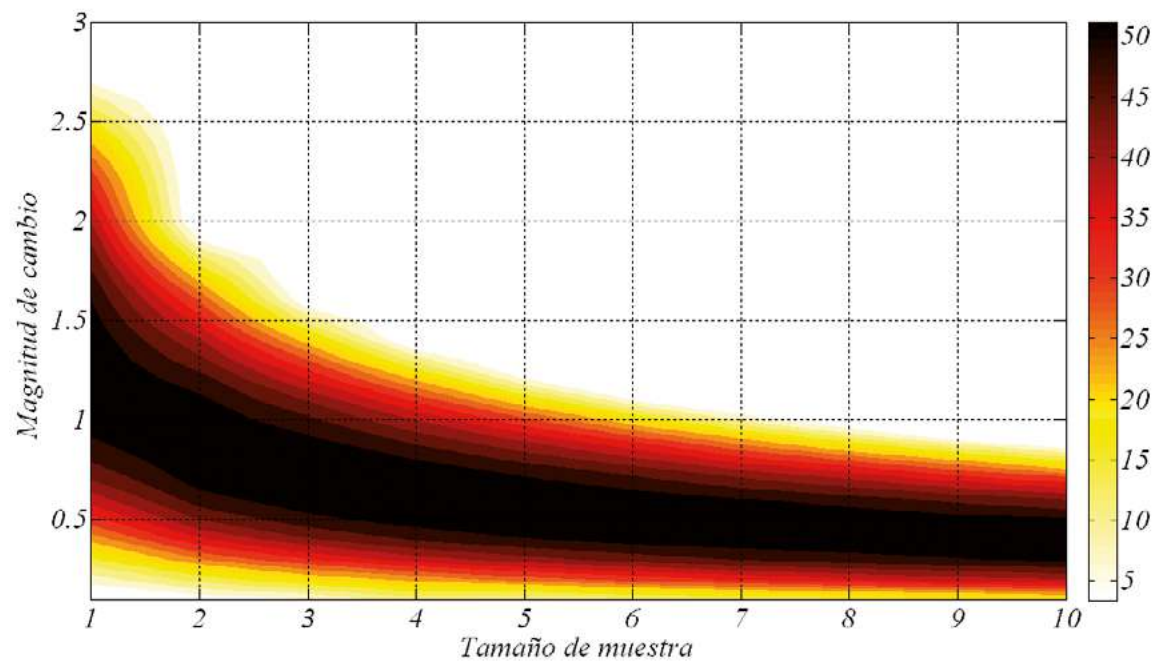
Tabla 4.7 Comparativa caso ARL bajo control 200 y 370

n	δ	$ARL(0) = 200$			$ARL(0) = 370$		
		$\bar{X}$	$\bar{X}$ - RL_2	% mejora	$\bar{X}$	$\bar{X}$ - RL_2	% mejora
2	0.1	183.85	177.70	3.34	336.53	321.70	4.41
	0.5	55.28	34.87	36.93	90.57	50.30	44.46
	1	12.22	6.82	44.20	17.72	8.18	53.81
	1.5	4.06	3.09	23.75	5.27	3.39	35.65
	2	1.97	2.26	-15.03	2.31	2.33	-0.49
	3	1.08	2.01	-85.72	1.12	2.01	-79.68
4	0.1	169.91	159.00	6.42	321.76	282.50	12.20
	0.5	28.21	15.67	44.45	43.86	20.66	52.90
	1	4.77	3.43	28.11	6.30	3.75	40.55
	1.5	1.73	2.19	-25.97	2.00	2.23	-11.58
	2	1.13	2.02	-78.21	1.19	2.02	-70.22
	3	1.00	2.00	-99.86	1.00	2.00	-99.73
7	0.1	152.25	136.30	10.47	272.71	236.10	13.43
	0.5	14.51	7.97	45.08	21.37	9.73	54.45
	1	2.29	2.38	-3.62	2.76	2.51	9.39
	1.5	1.14	2.02	-77.13	1.20	2.03	-68.83
	2	1.01	2.00	-98.70	1.01	2.00	-97.81
	3	1.00	2.00	-100.00	1.00	2.00	-100.00
10	0.1	137.61	118.30	14.03	243.89	200.50	17.79
	0.5	9.08	5.32	41.40	12.82	6.21	51.55
	1	1.57	2.13	-36.13	1.77	2.17	-22.23
	1.5	1.03	2.00	-94.91	1.04	2.00	-92.17
	2	1.00	2.00	-99.96	1.00	2.00	-99.91
	3	1.00	2.00	-100.00	1.00	2.00	-100.00

Fuente: el autor

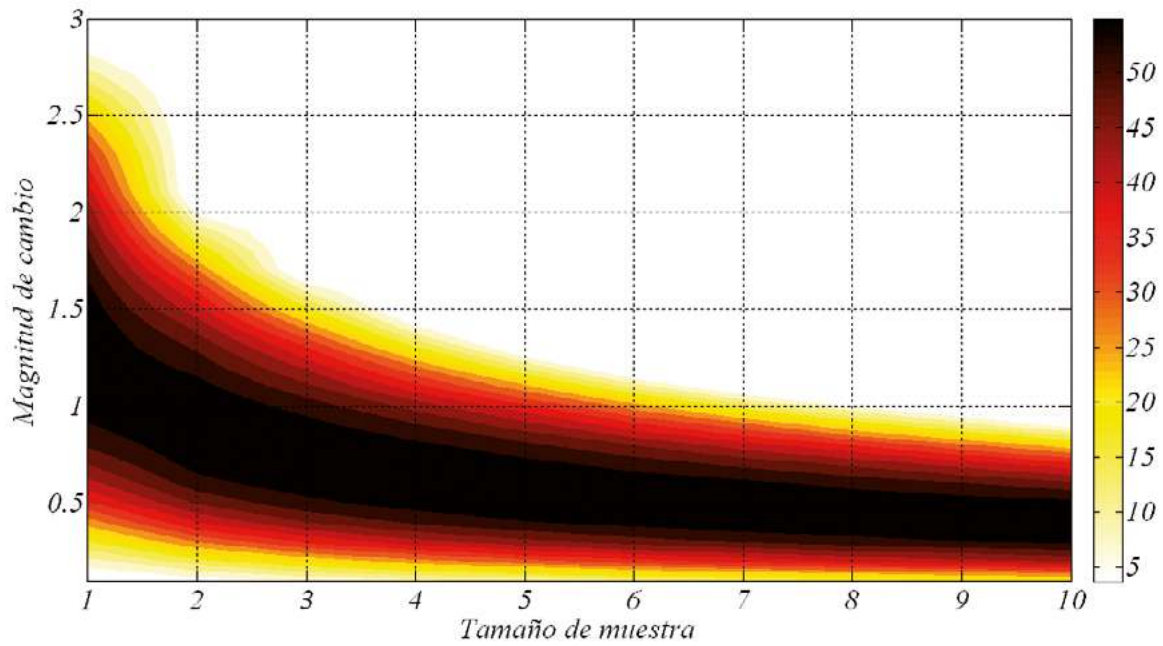
Figura 4.5 Porcentaje de mejora caso $ARL(0) = 200$ 

Fuente: el autor

Figura 4.6 Porcentaje de mejora caso $ARL(0) = 370$ 

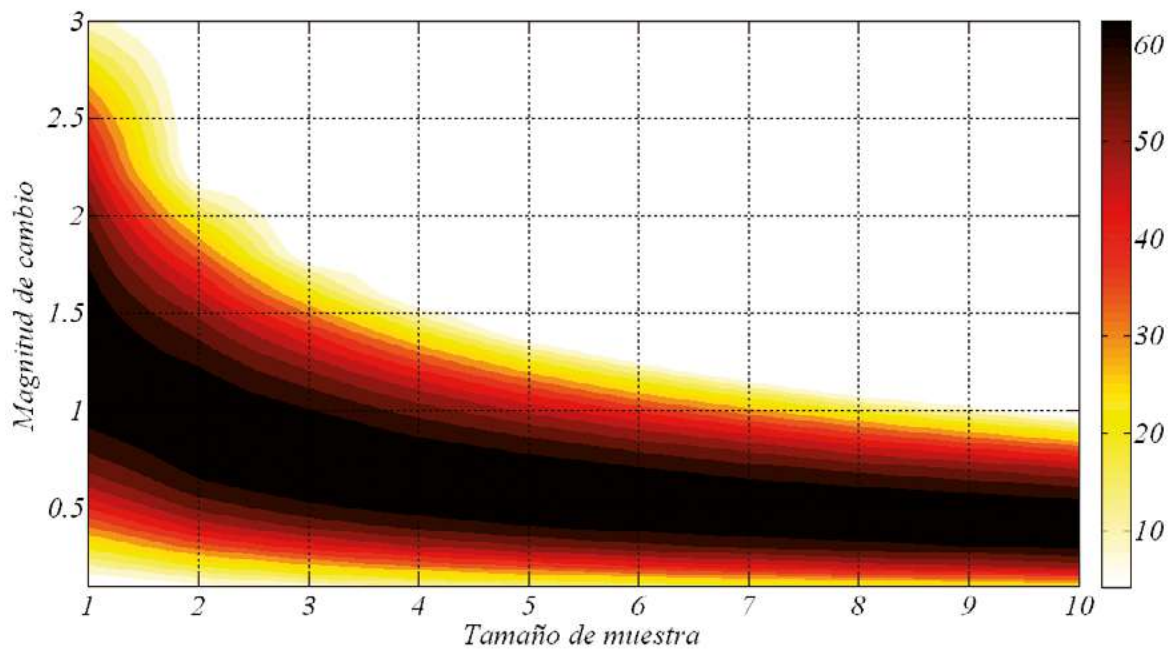
Fuente: el autor

Figura 4.7 Porcentaje de mejora caso $ARL(0) = 500$



Fuente: el autor

Figura 4.8 Porcentaje de mejora caso $ARL(0) = 1000$



Fuente: el autor

Algunas consideraciones importantes obtenidas de la comparación de los gráficos $\bar{X}-RL_2$ y $\bar{X}$ son:

El gráfico $\bar{X}-RL_2$ presenta mejoras significativas para los cuatro valores de ARL bajo control estudiados. Particularmente en valores de magnitud de cambio pequeño o moderado (entre 0.5 y 1.5) los porcentajes de mejora llegan a ser de más del 60 % para valores de ARL bajo control de 1000. En los tamaños de muestra más usados en la industria, con valores de $n = 5$ a $n = 8$, las mejoras son importantes cuando se asumen descorrecciones menores que 1. Adicionalmente, la amplitud de valores altos de porcentaje de mejora es mayor para tamaños de muestra pequeños. En la medida en que el tamaño de muestra aumenta, el número de buenas mejoras disminuye; por ejemplo, para un valor de tamaño muestra 10, los porcentajes mayores están entre 0.3 y 0.7 de magnitud de cambio.

El gráfico de control $\bar{X}-RL_2$ no presenta mejor desempeño frente al $\bar{X}$ para magnitudes de cambio y tamaños de muestra grandes. También se encuentran algunas mejoras para cambios grandes pero en tamaño de muestra 1 o 2.

Los valores máximos de porcentaje de mejora dependen del valor de ARL bajo control asumido. Así, para ARL bajo control de 200 el valor máximo de porcentaje de mejora es de 45.6 %; para 370 de 54.62 %; para 500 de 58.57 % y para 1000 de 66.6 %. Por tanto, en la medida que el ARL bajo control asumido es mayor, el desempeño del gráfico de control $\bar{X}-RL_2$ aumenta frente al gráfico $\bar{X}$.

4.9.2 El gráfico de control $\bar{X}-RL_2$ frente al gráfico sintético para la media

El desempeño del gráfico $\bar{X}-RL_2$ es comparado con el del gráfico sintético (*Synth*) para la media propuesto por Wu y Spedding (2000a) anteriormente descrito.

Los parámetros de comparación utilizados para ambos gráficos son:

- Escenario *zero-state*
 - Óptimos para un valor δ_d dado
 - ARL bajo control 370, 500, 1000
 - Tamaño de muestra $n = 1, 2, \dots, 10$
 - Magnitud de cambio de diseño $\delta_d = 0.1, 0.2, \dots, 1.5$
-

En esta sección solo se presentan algunos valores de ARL para ambos gráficos que se muestran en las tablas 4.8 a 4.10; sin embargo, para la generación de los valores de porcentaje de mejora presentados en las figuras 4.9 a 4.11 se usaron la totalidad de las combinaciones posibles de parámetros.

Tabla 4.8 Comparación de $ARL(\delta_d)$ caso $ARL(0) = 370$

n	δ_d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
2	Synth	321.9	223.7	138.6	83.15	50.51	31.67	20.64	14	9.866	7.202
	$\bar{X}$ -RL ₂	321.7	223.3	137.7	82.47	50.3	31.93	21.23	14.8	10.79	8.184
4	Synth	282.8	151.1	73.52	37.01	20.05	11.75	7.432	5.019	3.617	2.75
	$\bar{X}$ -RL ₂	282.5	150.2	72.94	37.13	20.66	12.63	8.425	6.042	4.636	3.745
7	Synth	236.6	94.89	37.78	17.02	8.792	5.15	3.359	2.386	1.837	1.522
	$\bar{X}$ -RL ₂	236.1	94.11	37.87	17.74	9.734	6.153	4.379	3.401	2.821	2.505
10	Synth	201.2	65.51	23.28	10.05	5.208	3.136	2.158	1.641	1.368	1.194
	$\bar{X}$ -RL ₂	200.5	65.03	23.79	10.96	6.21	4.133	3.126	2.624	2.315	2.165

Fuente: el autor

Tabla 4.9 Comparación de $ARL(\delta_d)$ caso $ARL(0) = 500$

n	δ_d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
2	Synth	431.1	293.5	177.5	104.0	61.87	38.06	24.37	16.27	11.29	8.137
	$\bar{X}$ -RL ₂	430.1	290.9	174.1	101.3	60.2	37.36	24.36	16.68	11.99	8.975
4	Synth	375.7	194.2	91.49	44.77	23.65	13.56	8.405	5.582	3.947	2.957
	$\bar{X}$ -RL ₂	374.1	190.9	88.98	43.76	23.68	14.13	9.219	6.501	4.913	3.921
7	Synth	311.3	119.4	45.73	19.94	10.01	5.714	3.648	2.568	1.952	1.579
	$\bar{X}$ -RL ₂	308.8	116.4	44.68	20.17	10.76	6.629	4.622	3.537	2.902	2.554
10	Synth	262.4	81.12	27.63	11.51	5.782	3.417	2.290	1.712	1.408	1.217
	$\bar{X}$ -RL ₂	259.4	78.86	27.45	12.19	6.73	4.398	3.284	2.685	2.348	2.184

Fuente: el autor

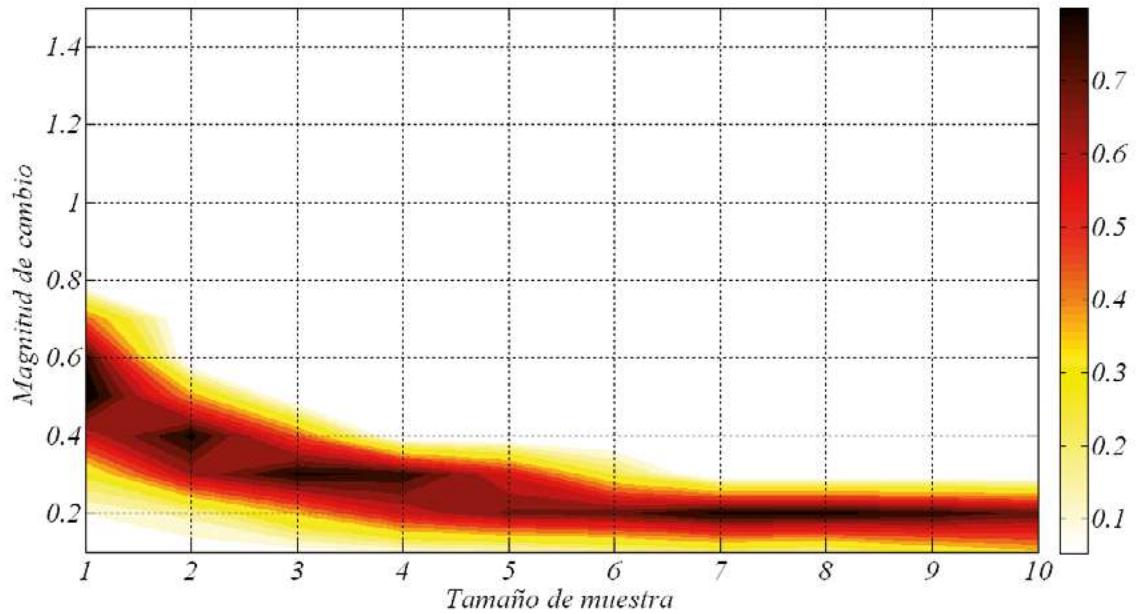
Tabla 4.10 Comparación de $ARL(\delta_d)$ caso $ARL(0) = 1000$

n	δ_d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
2	Synth	844.5	548.1	313.8	174.6	99.05	58.37	35.94	23.13	15.53	10.85
	$\bar{X}$ - RL_2	838.8	534.2	298.2	162.5	91.13	53.76	33.52	22.1	15.31	11.13
4	Synth	723.2	346.6	151.7	69.65	34.78	18.96	11.24	7.168	4.898	3.542
	$\bar{X}$ - RL_2	713.5	330.9	140.7	64.03	32.49	18.38	11.46	7.801	5.686	4.423
7	Synth	585.3	203	71.28	28.89	13.62	7.356	4.471	3.004	2.203	1.732
	$\bar{X}$ - RL_2	572.1	189.8	65.53	27.23	13.6	7.969	5.311	3.893	3.111	2.678
10	Synth	483.7	133.1	41.21	15.86	7.453	4.155	2.664	1.921	1.513	1.295
	$\bar{X}$ - RL_2	468.7	123	38.26	15.60	8.056	4.978	3.572	2.84	2.469	2.231

Fuente: el autor

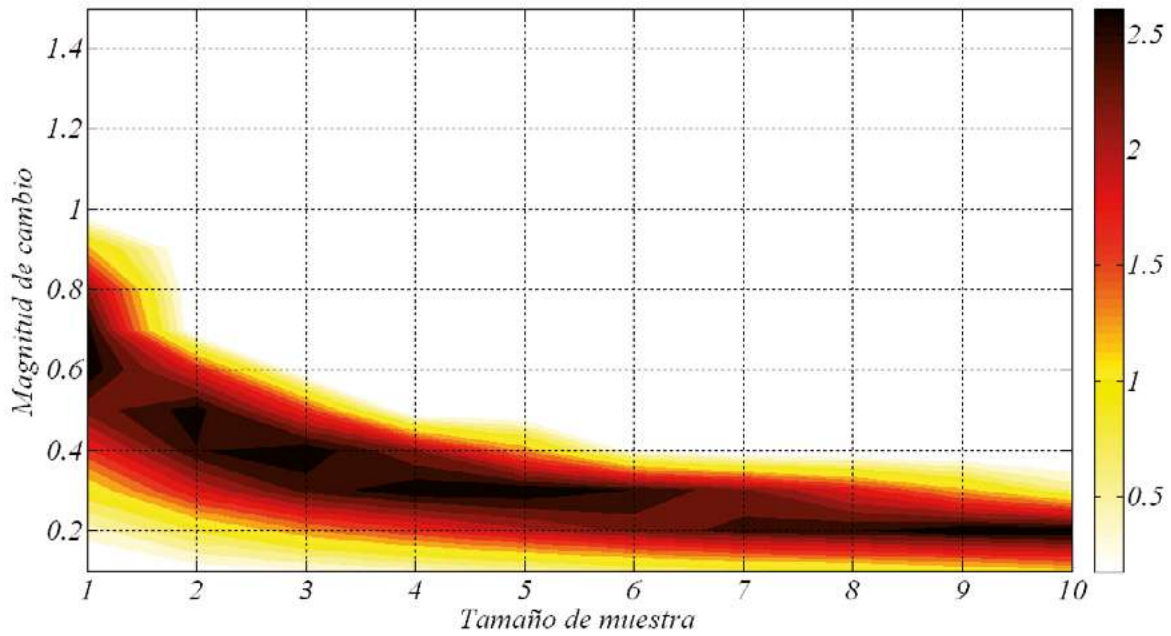
Los valores de porcentaje de mejora para las figuras 4.9 a 4.11 están dados por

$$\% \text{ mejora} = \frac{ARL_{\text{Synth}}(\delta_d) - ARL_{\bar{X}-RL_2}(\delta_d)}{ARL_{\text{Synth}}(\delta_d)} \times 100 \quad (4.9)$$

Figura 4.9 Porcentaje de mejora caso $ARL(0) = 370$ 

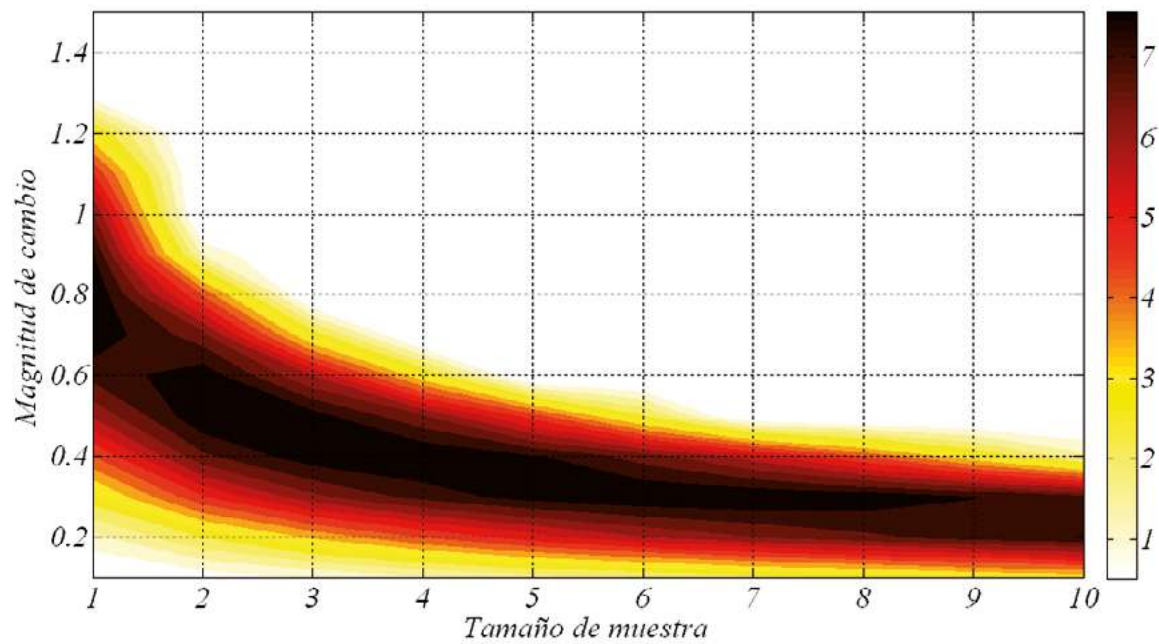
Fuente: el autor

Figura 4.10 Porcentaje de mejora caso $ARL(0) = 500$



Fuente: el autor

Figura 4.11 Porcentaje de mejora caso $ARL(0) = 1000$



Fuente: el autor

Algunas consideraciones importantes obtenidas de la comparación de los gráficos $\bar{X}$ - RL_2 y sintético para la media son:

Cuando el valor de ARL bajo control es igual a 200, el gráfico de control $\bar{X}$ - RL_2 no presenta mejora frente al gráfico sintético para la media. En la medida que ARL bajo control aumenta, el gráfico $\bar{X}$ - RL_2 genera porcentajes de mejora aunque de muy bajo valor, como es el caso de ARL bajo control de 370, donde los valores no superan el 1 %. Dichos porcentajes se ubican en magnitudes de cambio pequeñas, entre 0.2 y 0.7 para tamaños de muestra 1 y 2. Para tamaños de muestra mayores los porcentajes de mejora se encuentran entre valores de 0.1 y 0.3 de magnitud de cambio.

Para un ARL bajo control de 500, el gráfico de control $\bar{X}$ - RL_2 presenta mejoras frente al gráfico sintético de más de 2.5 % en casos concretos. El resto de porcentajes de mejora se ubican para valores de magnitud de cambio entre 0.2 y 0.8, reduciéndose paulatinamente entre 0.1 y 0.3 cuando el valor de tamaño de muestra aumenta.

Para ARL bajo control 1000, los porcentajes de mejora alcanzan valores máximos de 8 %, (tamaño de muestra 1 y magnitud de cambio 0.8). La totalidad de porcentajes de mejora se ubican entre un 0.2 y 1.2 de magnitud de cambio para un tamaño de muestra 1. Para valores mayores de tamaño de muestra, los porcentajes de mejora disminuyen paulatinamente llegando a ubicarse entre 0.1 y 0.5 de magnitud de cambio para un tamaño de muestra de 10.

4.9.3 El gráfico de control $\bar{X}$ - RL_2 frente al gráfico $\bar{X}$ con reglas adicionales

El desempeño del gráfico $\bar{X}$ - RL_2 es comparado con el del gráfico $\bar{X}$ de Shewhart con reglas adicionales en los esquemas 2 de 2, 2 de 3, 2 de 4 y 3 de 3 puntos más allá de límites. Los valores de ARL para los anteriores esquemas se obtienen de Khoo (2003).

Los parámetros de comparación utilizados son:

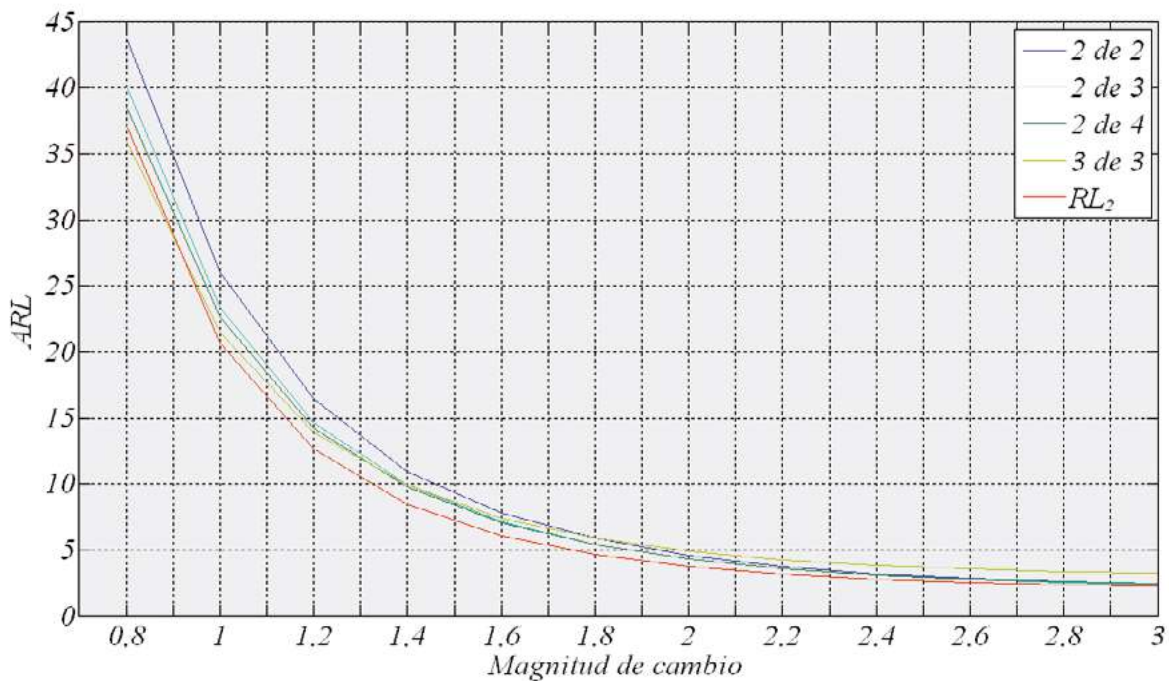
- Escenario *zero-state*
 - Óptimos para un valor δ_d dado
-

- ARL bajo control 370, 500, 1000
- Tamaño de muestra $n = 1$
- Magnitud de cambio de diseño $\delta_d = 0.2, 0.4, \dots, 3$

En la figura 4.12 se presentan curvas de ARL para un ARL bajo control de 370. En las tablas 4.11 a 4.13 se comparan los valores ARL en los casos de ARL bajo control 370, 500 y 1000.

El desempeño del gráfico de control $\bar{X}$ - RL_2 es menor frente al gráfico $\bar{X}$ con la regla adicional 3 de 3 para magnitudes de cambio menores que 1. Para magnitudes mayores de cambio, el gráfico de control $\bar{X}$ - RL_2 presenta una mayor potencia. Esto se evidencia para todos los valores de ARL bajo control analizados.

Figura 4.12 Curvas de ARL reglas adicionales $ARL(0) = 370$



Fuente: el autor

4.9.4 El gráfico de control $\bar{X}$ - RL_2 frente al gráfico Cusum y EWMA

El desempeño del gráfico $\bar{X}$ - RL_2 es comparado con el del gráfico Cusum y EWMA en la tabla 4.14. Para cambios pequeños, los gráficos Cusum y EWMA tienen un desempeño notablemente superior al gráfico $\bar{X}$ - RL_2 ; para cambios moderados, el gráfico propuesto tiene un desempeño similar o levemente inferior a los otros dos gráficos.

Tabla 4.11 Comparación con reglas adicionales caso $ARL(0) \cong 370$

δ_d	2 de 2	2 de 3	2 de 4	3 de 3	$\bar{X}$ - RL_2
0	369	370.954	367.946	370.926	370
0.2	278.098	267.877	265.006	260.107	282.5
0.4	152.411	141.800	139.232	130.885	150.2
0.6	79.732	72.889	70.302	65.316	72.94
0.8	43.754	40.096	38.519	35.954	37.13
1	26.035	23.369	22.595	21.436	20.66
1.2	16.433	14.615	14.201	13.922	12.63
1.4	10.898	9.943	9.740	9.900	8.425
1.6	7.793	7.165	7.056	7.367	6.042
1.8	5.889	5.414	5.402	5.863	4.636
2	4.59	4.304	4.330	4.901	3.745
2.2	3.756	3.595	3.623	4.280	3.156
2.4	3.214	3.104	3.124	3.869	2.793
2.6	2.837	2.767	2.796	3.570	2.549
2.8	2.575	2.519	2.564	3.378	2.345
3	2.392	2.357	2.391	3.241	2.231

Fuente: el autor

Tabla 4.12 Comparación con reglas adicionales caso $ARL(0) \cong 500$

δ_d	2 de 2	2 de 3	2 de 4	3 de 3	$\bar{X}$ -RL ₂
0	498.358	501.071	493.753	507.155	500
0.2	364.561	355.124	350.727	341.539	374.1
0.4	195.370	181.908	176.258	163.827	190.9
0.6	99.772	90.351	87.345	80.315	88.98
0.8	53.746	48.760	46.481	42.340	43.76
1	30.825	27.753	26.523	24.918	23.68
1.2	19.222	17.159	16.369	15.725	14.13
1.4	12.416	11.216	10.952	10.947	9.219
1.6	8.690	7.860	7.798	7.998	6.501
1.8	6.449	5.919	5.879	6.237	4.913
2	5.001	4.659	4.627	5.147	3.921
2.2	4.009	3.793	3.832	4.437	3.317
2.4	3.371	3.248	3.265	3.971	2.871
2.6	2.955	2.881	2.889	3.650	2.602
2.8	2.655	2.599	2.629	3.430	2.382
3	2.452	2.411	2.441	3.280	2.256

Fuente: el autor

Tabla 4.13 Comparación con reglas adicionales caso $ARL(0) \cong 1000$

δ_d	2 de 2	2 de 3	2 de 4	3 de 3	$\bar{X}$ -RL ₂
0	1008.33	999.483	990.629	1009.91	1000
0.2	700.116	693.934	675.690	651.613	713.5
0.4	349.075	321.958	312.312	285.771	330.9
0.6	169.042	150.539	146.184	130.384	140.7
0.8	85.865	75.774	72.346	64.384	64.03
1	46.802	41.729	39.227	35.331	32.49
1.2	27.524	24.064	23.024	21.089	18.38
1.4	17.155	15.087	14.442	13.748	11.46
1.6	11.315	10.126	9.901	9.818	7.801
1.8	8.037	7.260	7.145	7.313	5.686
2	6.048	5.449	5.462	5.832	4.423
2.2	4.705	4.086	4.368	4.877	3.613
2.4	3.825	3.588	3.643	4.267	3.072
2.6	3.260	3.070	3.142	3.859	2.737
2.8	2.870	2.782	2.807	3.566	2.511
3	2.600	2.529	2.572	3.370	2.32

Fuente: el autor

Tabla 4.14 Comparativa de ARL entre $Cusum$, $EWMA$ y $\bar{X}-RL_2$

$Cusum$			$EWMA$			$\bar{X}-RL_2$
k			λ			
	0.25	0.5	1	0.1	0.2	0.5
h	8.01	4.774	2.517	2.701	2.859	2.978
δ_d						
0	370	370	370	370	370	370
0,2	116.00	164.00	239.00	123.00	162.00	238.00
0,4	40.40	54.50	105.00	41.20	55.40	106.00
0,6	22.20	24.60	46.80	20.90	25.30	49.60
0,8	15.10	14.40	23.60	13.40	14.60	26.00
1	11.40	9.93	13.60	9.74	9.80	15.20
1,2	9.18	7.52	8.79	7.64	7.27	9.88
1,4	7.69	6.06	6.28	6.30	5.77	6.96
1,6	6.63	5.08	4.81	5.38	4.78	5.23
1,8	5.84	4.38	3.89	4.70	4.10	4.15
2	5.22	3.86	3.26	4.18	3.59	3.42
2,4	4.33	3.14	2.49	3.44	2.90	2.52
2,6	4.00	2.88	2.23	3.18	2.66	2.24
3	3.48	2.49	3.26	2.76	2.31	1.85

Fuente: el autor

Capítulo V

Diseño y optimización del gráfico $S\text{-}RL_2$ **5.1 Generalidades**

Debido a que el gráfico de control S de Shewhart para el control la dispersión es especialmente inapropiado para detectar cambios pequeños en la desviación del proceso, Huang y Chen (2005) presentaron el diseño óptimo de un gráfico de control sintético para controlar la variabilidad. Entre otras propuestas que también tienen como objetivo aumentar el desempeño del gráfico S se encuentran la de Crowder y Hamilton (1992) quienes presentan un gráfico EWMA para el control de la variabilidad demostrando una notable superioridad al detectar incrementos pequeños en la desviación. Chang y Gan (1995) proponen un gráfico Cusum basado en R y S la desviación; Lowry, Champ y Woodall (1995) incorporan señales adicionales.

Según conclusiones reportadas por Bourke (1991) el gráfico RL_2 presenta un mejor desempeño respecto al gráfico CRL para valores pequeños de la fracción no conforme. Bajo este supuesto, se ha decidido desarrollar un gráfico de control utilizando un gráfico S y un gráfico RL_2 con el fin de determinar su potencia utilizando como métrica el valor de ARL en el escenario *zero-state*.

El gráfico de control $S\text{-}RL_2$ es una combinación de un subgráfico S y un subgráfico RL_2 . Su objetivo es monitorear la dispersión de un proceso con una distribución normal, donde la media y la desviación del proceso bajo control son parámetros conocidos. La propuesta de este gráfico es análoga a la del gráfico $\bar{X}\text{-}RL_2$ salvo que el gráfico $\bar{X}$ de Shewhart es reemplazado por el gráfico S de Shewhart. Así pues, una unidad inspeccionada en el subgráfico RL_2 es en este caso una muestra de tamaño n en el subgráfico S .

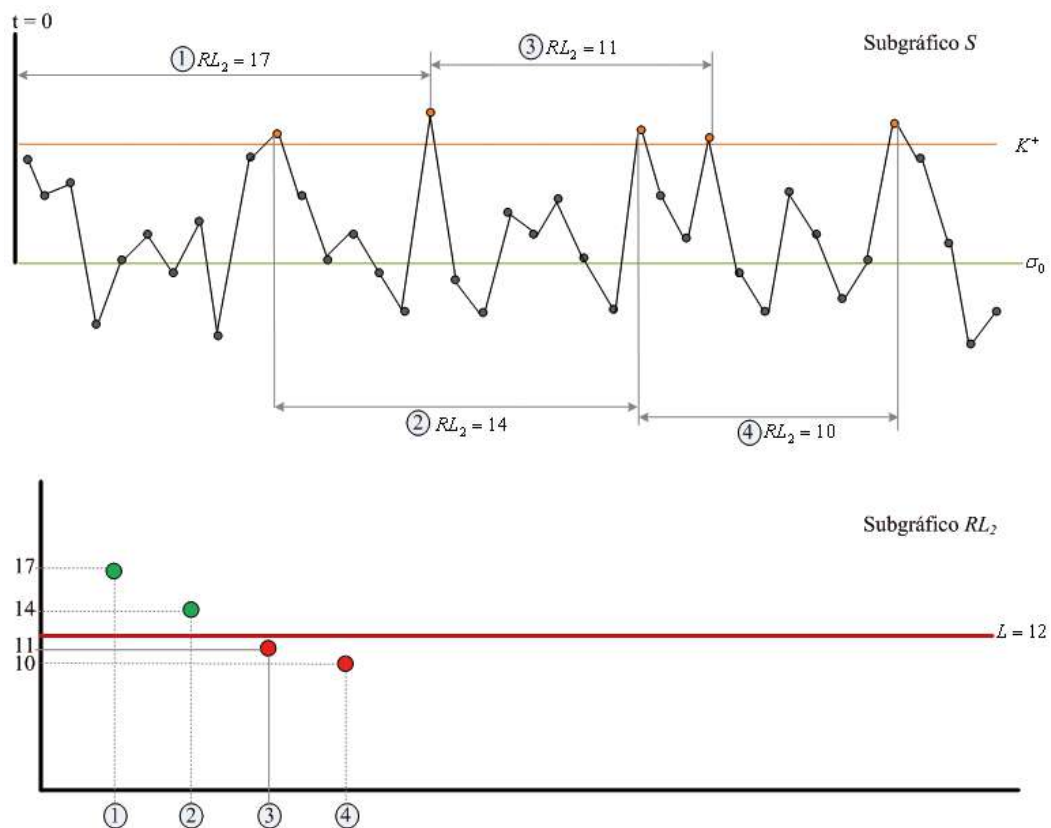
Para el diseño del gráfico $S\text{-}RL_2$ se analizaron separadamente estas tres situaciones:

- Detectar solo incrementos en la desviación típica.
 - Detectar solo decrementos en la desviación típica.
 - Detectar cambios en cualquier sentido de variación en la desviación típica.
-

5.2 Para incrementos: gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}U$

Para detectar solo incrementos en la desviación el gráfico control $S\text{-}RL_2\text{-}U$ presenta el siguiente funcionamiento: determinando un tiempo $t = 0$ en el proceso se contabiliza el número de muestras hasta que se detecte la segunda muestra no conforme en el subgráfico S , es decir, hasta que el estadístico S supere solo el límite K^+ por segunda vez, así, el primer estadístico es obtenido y es plasmado en el subgráfico RL_2 . Para la obtención de un segundo estadístico se inicia el conteo de muestras en el subgráfico S desde la primera muestra no conforme obtenida hasta la tercera, de igual manera es llevado el valor al gráfico RL_2 . Así sucesivamente se obtienen los valores de los estadísticos para el subgráfico RL_2 . En el momento en que el valor de un estadístico del subgráfico RL_2 es menor que el límite de control L se considera que existe una salida de control en el proceso. En la figura 5.1 se presenta un esquema que ejemplifica el modo de operar del gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}U$.

Figura 5.1 Esquemización del gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}U$



Fuente: el autor

5.2.1 Dinámica del gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}U$

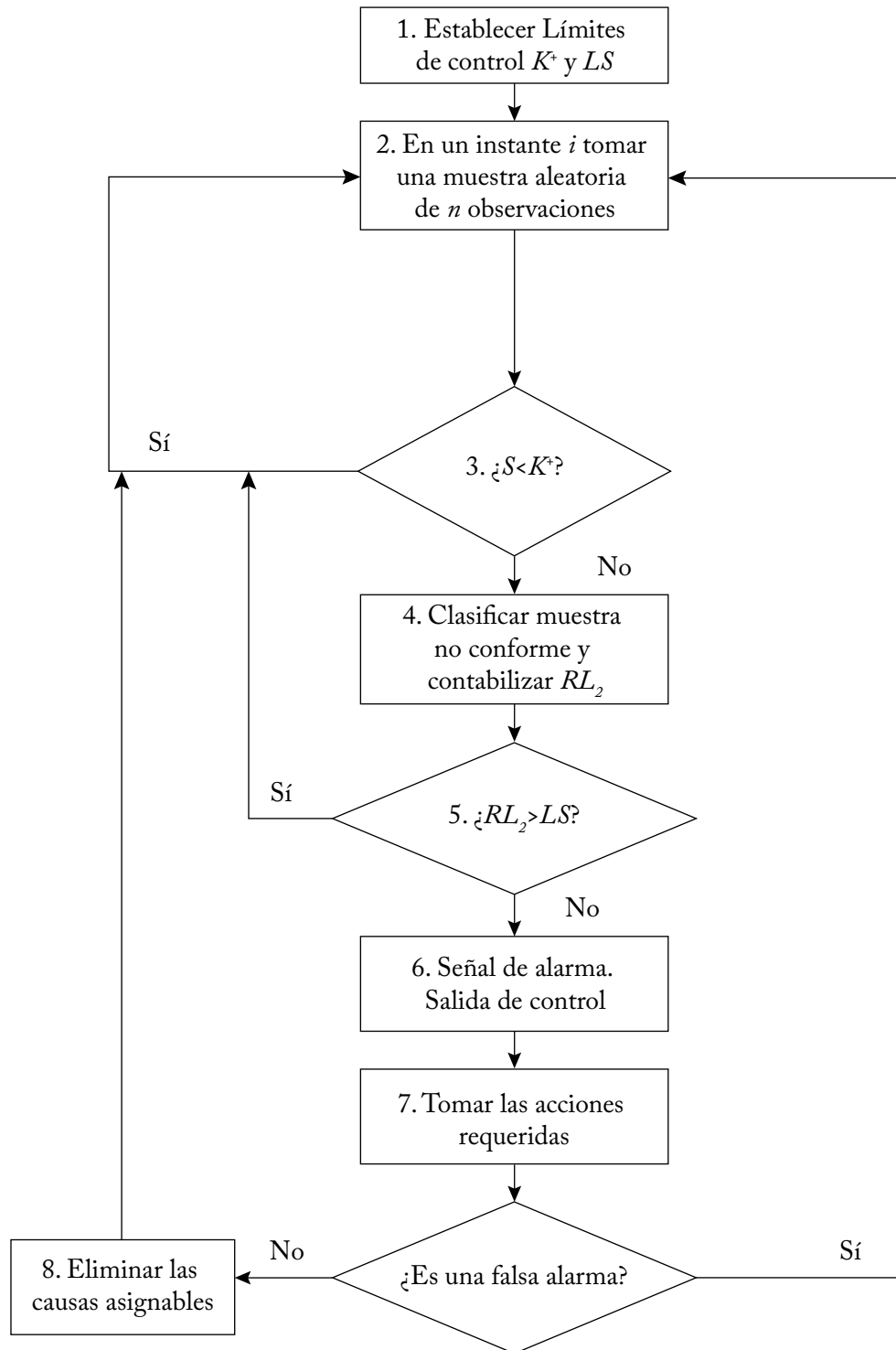
El modo de operar del gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}U$ se describe a continuación (figura 5.2):

1. Establecer el límite de control superior K^+ para el subgráfico S de Shewhart y el límite inferior LS del subgráfico de control RL_2 .
2. En un instante i tomar una muestra aleatoria de n observaciones y calcular la desviación S .
3. Si el estadístico S cumple las condiciones $S < K^+$ en el subgráfico de control S de Shewhart, entonces se afirma que la muestra es conforme y se vuelve al paso 2. De lo contrario la muestra es denominada no conforme y se prosigue con el paso 4.
4. Contabilizar el número de muestras en el gráfico S entre las dos más recientes muestras no conformes. Este número es contabilizado como una muestra para el subgráfico RL_2 .
5. Si la muestra es mayor que el límite de control LS especificado para el subgráfico RL_2 entonces se afirma que el proceso se encuentra bajo control y se debe volver al paso 2. En caso contrario se asume que el proceso se encuentra fuera de control y se continúa con el paso 6.
6. Se genera una señal de fuera de control.
7. Tomar las acciones requeridas para encontrar y eliminar las causas asignables de la salida de control y así volver al paso 2.

5.2.2 Obtención del ARL para el gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}U$

Retomando la ecuación 3.33 en la que se presentó la expresión para calcular el ANI de un gráfico RL_2 , para el cálculo del ARL del gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}U$ se modifica el primer elemento de dicha expresión por la expresión 3.14, así:

$$ARL_{S\text{-}RL_2\text{-}U} = \frac{1}{1 - F\left((n-1)\left(\frac{K^+}{\delta'}\right)^2\right)} \times [E(NTNS_U)] \quad (5.1)$$

Figura 5.2 Dinámica del gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}U$ 

Fuente: el autor

Para la obtención del segundo elemento de la expresión 5.1 y en concordancia con la nomenclatura presentada por Bourke(1991) se considera el parámetro TNS_sU como una racha de muestras conformes en el subgráfico S hasta una no conforme; el valor esperado de TNS_sU denominado $E(NTNS_sU)$ en las expresiones 5.1 es calculado mediante un procedimiento basado en cadenas de Markov que se describe a continuación:

En el gráfico $S-RL_2-U$ una señal ocurre cuando la suma de las dos más recientes longitudes de racha $S_{i-1} + S_i$ del subgráfico S es menor que el límite de control inferior LS del subgráfico RL_2 , es decir, cuando se presenta un cambio en la desviación del proceso. Los estados transitorios de la cadena de Markov estarán determinados por la longitud de racha del TNS_sU más reciente. El estado absorbente corresponderá a la ocurrencia de una señal de salida de control. La matriz de transición $\mathbf{RsU}$ de la cadena de Markov en un gráfico de control $S-RL_2-U$ se representa así:

$$\mathbf{RsU} = \begin{matrix} & & \begin{matrix} Estado & actual \end{matrix} \\ & & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \dots & (LS-2) & (LS-1) & (\geq LS) \end{matrix} \\ & & \begin{matrix} - & - & - & - & - & - & - \end{matrix} \\ \begin{matrix} Estado \\ previo \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ (LS-2) \\ (LS-1) \\ (\geq LS) \end{matrix} & \begin{matrix} \langle \\ \langle \\ \langle \\ \langle \\ \vdots \\ \langle \\ \langle \\ \langle \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-G(LS-1) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(LS-1) & 1-G(LS-1) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(LS-2) & f(LS-1) & 1-G(LS-1) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(LS-2) & f(LS-1) & 1-G(LS-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & f(2) & \dots & f(LS-2) & f(LS-1) & 1-G(LS-1) \\ 0 & f(1) & f(2) & \dots & f(LS-2) & f(LS-1) & 1-G(LS-1) \\ f(0) & f(1) & f(2) & \dots & f(LS-2) & f(LS-1) & 1-G(LS-1) \end{matrix} \end{matrix} \quad (5.2)$$

Donde

$$f(r) = \Pr(S_i = r) = \left[\left(1 - \left(1 - F \left((n-1) \left(\frac{K^+}{\delta'} \right)^2 \right) \right) \right)^r * \left(1 - F \left((n-1) \left(\frac{K^+}{\delta'} \right)^2 \right) \right) \right]$$

para $r = 0, 1, 2, \dots, (LS - 1)$

$$G(LS - 1) = \sum_{r=0}^{LS-1} f(r)$$

Las condiciones de la cadena de Markov para el gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}U$ son análogas a las del gráfico $\bar{X}\text{-}RL_2$. Por tanto, de la ecuación 3.21 para el caso del gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}U$ se obtiene el vector $E(\text{NTNSs}U)$ dado por:

$$E(\text{NTNSs}U) = (\mathbf{I} - \mathbf{R}_s U)^{-1} \cdot \mathbf{1} \quad (5.3)$$

Donde $\mathbf{1}$ es un vector columna de unos, $\mathbf{I}$ es una matriz identidad de tamaño $(LS + 1) \times (LS + 1)$ y $E(\text{NTNSs}U)$ es el vector que contiene el valor $E(\text{NTNSs}U)$ de cada uno de los estados transitorios i no absorbentes. Así pues, para obtener el valor $E(\text{NTNSs}U)$ de un determinado estado transitorio inicial i de la ecuación 3.22 se calcula:

$$E(\text{NTNSs}U)_i = \mathbf{S}' (\mathbf{I} - \mathbf{R}_s U)^{-1} \cdot \mathbf{1} \quad (5.4)$$

Al obtener el valor $E(\text{NTNSs}U)$ para calcular el ARL del gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}U$, se debe considerar que el estado inicial debe ser mayor o igual a LS . Así, el vector $\mathbf{S}'$ de tamaño $(LS + 1)$ tendrá la forma $\mathbf{S}' = \langle 0, 0, 0 \dots 0, 1 \rangle$ con lo cual el estado transitorio inicial estará en la última posición del vector.

Las posibles transiciones de la cadena de Markov del gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}U$ son equivalentes a las del gráfico $\bar{X}\text{-}RL_2$.

5.2.3 Obtención de límites del gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}U$ para un ARL bajo control

Como se ha mencionado, cuando el ARL bajo control es establecido se está asumiendo una tasa de falsas alarmas en el proceso, con lo que se considera que ningún cambio ha ocurrido en él. Bajo estas condiciones el valor de δ' es igual a 1. Los parámetros a obtener corresponden al valor del límite K^+ del subgráfico S y el valor del límite LS del subgráfico RL_2 . Por tanto, los valores de K^+ y LS deben satisfacer la igualdad:

$$ARL(\delta' = 1)_{S-RL_2-U} = \frac{1}{1 - F\left((n-1)(K^+)^2\right)} \times [E_1(NTNS_S U)] \quad (5.5)$$

Los valores $f(r)$ de la matriz de transición **RsU** necesaria para calcular $E_1(NTNS_S U)$ también son modificados con la condición $\delta' = 1$.

Con la ecuación 5.5 es posible obtener para el mismo valor de ARL bajo control diferentes valores de K^+ y LS . Cabe recordar que el valor LS en estas expresiones condiciona el tamaño de la matriz **RsU** que es $(LS + 1) \times (LS + 1)$. Por ejemplo, para incrementos en la desviación, un $ARL(\delta' = 1)$ bajo control de 500 y tamaño de muestra $n = 5$ se obtienen algunos los valores de la tabla 5.1.

Tabla 5.1 Valores límites de control LS y K^+

LS	K^+
2	1.410
5	1.514
10	1.591
20	1.664
37	1.725
49	1.751
62	1.772
75	1.789
90	1.805
100	1.814

Fuente: el autor

5.2.4 Cálculo del ARL fuera de control para el gráfico de control **S-RL₂U**

Si se asume que un cambio ha ocurrido en el proceso es posible determinar el ARL en esas condiciones, es decir, el ARL cuando el proceso está fuera de control o $ARL(\delta' \neq 1)$; así, se considera que el valor de la desviación σ_0 pasa a ser $\delta'\sigma_0$. Estableciendo un valor de cambio de diseño δ'_d para el gráfico **S-RL₂** y con los valores de límites de control K^+ y LS obtenidos para un ARL bajo control determinado se calcula el ARL fuera de control mediante

$$ARL(\delta'_d)_{S-RL_2-U} = \frac{1}{1 - F\left((n-1)\left(\frac{K^+}{\delta'_d}\right)^2\right)} \times [E_\delta(NTNS_U)] \quad (5.6)$$

Para el cálculo de los valores de $E_\delta(NTNS_U)$ se utiliza la expresión 5.4 donde se asume que el valor $\delta' = \delta'_d$.

Los parámetros necesarios para calcular el ARL fuera de control son (asumiendo una distribución normal de los datos del proceso con $\mu_0 = 0$ y $\sigma_0 = 1$) el tamaño de la muestra n , la magnitud del cambio δ'_d y los límites K^+ y LS de los subgráficos que permitan el ARL bajo control deseado, suponiendo entonces

- $n = 5$
- $\delta'_d = 1.05$
- Según la tabla 5.1 si $LS = 5$ entonces $K^+ = 1.5139$ para un ARL bajo control de 500

Mediante el uso del programa Mathcad se resuelve la expresión 5.6 para los parámetros mencionados y se obtiene un valor de ARL fuera de control de 200.36.

Algunos valores de $ARL(\delta_d)$ en el gráfico de control $S-RL_2-U$ para un ARL bajo control de 500 y magnitudes de cambio $\delta_d = 1.05, 1.1$ y 1.15 se presentan en la tabla 5.2.

5.2.5 Optimización

Este es el procedimiento de optimización para el gráfico $S-RL_2-U$:

1. Especificar δ' , n y ARL bajo control
2. Inicializar con el límite inferior para el subgráfico RL_2 en 2, $LS = 2$
3. Obtener el valor de K^+ resolviendo numéricamente la ecuación 5.5

Tabla 5.2 Valores ARL fuera de control caso ARL bajo control 500, $n = 5$

Límites		Magnitud del cambio δ_d		
L	K^+	1.05	1.1	1.15
2	1.410	222.12	113.14	64.42
5	1.514	200.36	94.86	51.46
10	1.591	186.98	85.10	45.34
26	1.690	175.81	78.52	42.40
35	1.725	174.02	78.19	42.83
49	1.751	173.60	79.08	44.34
62	1.772	174.17	80.33	45.95
75	1.789	175.07	81.93	47.69

Fuente: el autor

4. Calcular el valor de ARL_{S-RL_2-U} con el valor actual de K^+ y LS utilizando la ecuación 5.6.
5. Si el valor de ARL_{S-RL_2-U} disminuye, se incrementa el valor de LS en una unidad y volver al paso 3. Si el valor de ARL_{S-RL_2-U} se incrementa, se detiene el procedimiento de búsqueda y se resta una unidad al valor de LS con el que el ARL_{S-RL_2-U} aumentó y se continúa con el paso 6.
6. Los valores de K^+ y LS actuales son establecidos como parámetros de diseño del gráfico de control $S-RL_2-U$.
7. Se concluye el proceso de búsqueda para el diseño óptimo para el gráfico de control $S-RL_2-U$.

En la tabla 5.2 se resaltaron los valores óptimos para cada magnitud de cambio presentada. En la tabla 5.3 se presentan algunos valores óptimos de ARL para diferentes magnitudes de cambio, tamaños de muestra y ARL bajo control de 200, 370, 500 y 1000.

Tabla 5.3 Valores óptimos de $ARL(\delta'_d)$ para el gráfico $S-RL_2-U$

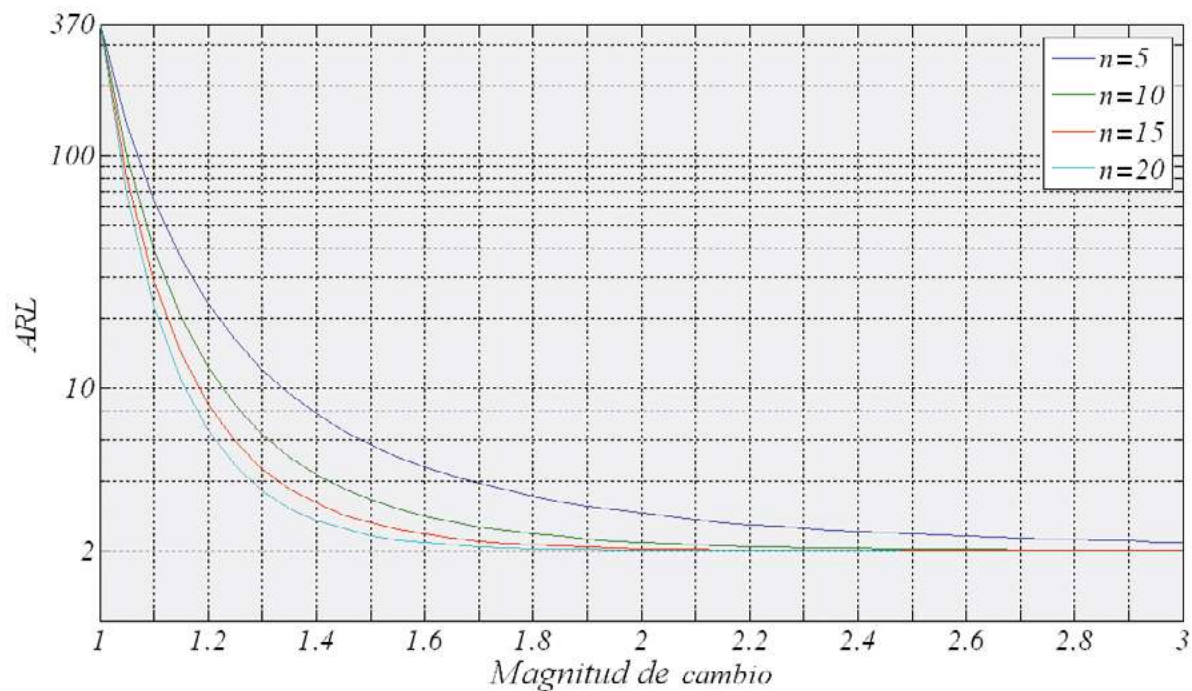
n	$\delta'_d > 1$	200			370			500			1000		
		LS	K^*	ARL	LS	K^*	ARL	LS	K^*	ARL	LS	K^*	ARL
5	1.05	29	1.631	84.02	41	1.712	136.80	49	1.751	173.60	73	1.835	299.60
	1.1	22	1.604	43.47	30	1.682	64.53	35	1.719	78.19	49	1.798	121.40
	1.15	17	1.577	26.12	23	1.656	36.19	26	1.690	42.40	35	1.767	60.86
	1.2	14	1.557	17.49	18	1.631	23.00	20	1.664	26.27	26	1.737	35.56
10	1.05	22	1.412	63.40	31	1.464	100.50	37	1.489	125.80	54	1.542	210.90
	1.1	16	1.391	27.91	21	1.439	39.72	24	1.462	47.18	32	1.511	70.06
	1.15	12	1.371	15.36	15	1.417	20.25	17	1.440	23.18	22	1.487	31.60
	1.2	9	1.351	9.85	11	1.396	12.28	12	1.416	13.68	15	1.462	17.53
15	1.05	19	1.325	52.16	27	1.367	81.04	31	1.385	100.50	45	1.427	165.00
	1.1	13	1.305	20.86	17	1.344	28.85	19	1.360	33.80	25	1.398	48.67
	1.15	10	1.291	11.06	12	1.325	14.09	13	1.340	15.87	16	1.376	20.89
	1.2	7	1.270	7.02	9	1.309	8.48	9	1.320	9.27	11	1.356	11.46
20	1.05	18	1.278	44.68	24	1.311	68.31	28	1.327	84.09	39	1.361	135.70
	1.1	11	1.256	16.72	14	1.287	22.60	16	1.303	26.21	21	1.335	36.83
	1.15	8	1.240	8.68	10	1.272	10.82	11	1.286	12.04	13	1.314	15.42
	1.2	6	1.226	5.56	7	1.255	6.53	8	1.271	7.08	9	1.297	8.50

n	$\delta'_d < 1$	200			370			500			1000		
		LS	K^*	ARL	LS	K^*	ARL	LS	K^*	ARL	LS	K^*	ARL
5	0.9	4	0.501	82.15	4	0.468	144.60	5	0.438	191.50	5	0.407	365.90
	0.8	4	0.501	33.69	4	0.468	55.59	4	0.454	71.42	5	0.407	129.00
	0.7	3	0.525	14.03	4	0.468	21.63	4	0.454	26.76	4	0.422	44.54
	0.5	3	0.525	3.42	3	0.490	4.15	3	0.475	4.62	3	0.442	6.11
	0.3	2	0.559	2.02	2	0.522	2.04	2	0.506	2.05	2	0.470	2.10
10	0.9	6	0.646	45.13	7	0.613	74.50	8	0.595	95.57	10	0.561	170.80
	0.8	5	0.656	12.60	5	0.632	18.19	6	0.611	22.01	7	0.579	34.41
	0.7	4	0.670	4.80	4	0.645	6.00	4	0.633	6.76	5	0.597	9.16
	0.5	3	0.687	2.10	3	0.661	2.16	3	0.649	2.19	3	0.624	2.29
	0.3	2	0.713	2.00	2	0.685	2.00	2	0.673	2.00	2	0.646	2.00
15	0.9	7	0.710	30.26	8	0.684	47.53	9	0.669	59.54	12	0.638	100.90
	0.8	4	0.737	7.29	5	0.705	9.73	6	0.688	11.31	7	0.661	16.03
	0.7	3	0.752	3.07	4	0.716	3.57	4	0.706	3.82	4	0.685	4.55
	0.5	2	0.773	2.01	2	0.750	2.01	2	0.740	2.01	3	0.698	2.04
	0.3	2	0.773	2.00	2	0.750	2.00	2	0.740	2.00	2	0.717	2.00
20	0.9	7	0.751	22.37	8	0.728	33.79	9	0.716	41.54	12	0.688	67.45
	0.8	4	0.775	5.18	5	0.747	6.52	5	0.739	7.30	6	0.714	9.68
	0.7	3	0.788	2.52	3	0.769	2.72	3	0.760	2.83	4	0.730	3.23
	0.5	2	0.806	2.00	2	0.787	2.00	2	0.778	2.00	2	0.758	2.00
	0.3	2	0.806	2.00	2	0.787	2.00	2	0.778	2.00	2	0.758	2.00

Fuente: el autor

La figura 5.3 presenta las curvas con los ARL óptimos para magnitudes de cambio entre 1 y 3, con un ARL bajo control de 370. En el anexo II se presentan los valores óptimos para el ARL bajo control de 200, 370, 500 y 1000; tamaño de muestra 2 a 20 y magnitud de cambio de 1.01 a 1.2.

Figura 5.3 Curvas de ARL del gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}U$ caso $ARL(1) = 370$



Fuente: el autor

5.2.6 Desempeño

- Gráfico S de Shewhart para incrementos en la desviación típica
- Gráfico sintético para incrementos en S
- Gráfico EWMA S para incrementos
- Gráfico Cusum S para incrementos

5.2.6.1 Gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}U$ frente al gráfico S de Shewhart

Los parámetros de comparación para ambos gráficos son

- Escenario *zero-state*
- Óptimos para un valor δ_d' dado
- ARL bajo control 200, 370, 500, 1000
- Tamaño de muestra $n = 2, 3, \dots, 20$
- Magnitud de cambio de diseño $\delta_d' = 1.05, 1.15, \dots, 3$

Las comparaciones se efectúan mediante el uso del porcentaje de mejora dado por

$$\% \text{ mejora} = \frac{ARL_S(\delta_d) - ARL_{S\text{-}RL_2\text{-}U}(\delta_d)}{ARL_S(\delta_d)} \times 100 \quad (5.7)$$

En la tabla 5.4 se presentan a modo de comparación algunos valores de ARL para ambos gráficos. En las figuras 5.4 a 5.7 se presentan los porcentajes de mejora del gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}U$ frente al gráfico S para incrementos mediante curvas de nivel; la interpretación de estas figuras es igual que para el gráfico $\bar{X}\text{-}RL_2$. Se evidencia la superioridad del gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}U$ para incrementos pequeños de magnitud de cambio en la desviación del proceso. La franja más amplia en porcentajes de mejora se presenta en tamaños de muestra con valor 2 y 3, a medida que se aumenta el tamaño de muestra la franja de porcentajes de mejora se hace más estrecha, aunque es notorio que los mayores porcentajes de mejora se concentran en tamaños de muestra superiores a 10 para los cuatro casos estudiados. Dichos porcentajes alcanzan valores máximos de entre el 40 y 60 %.

Tabla 5.4 Comparación de ARL entre gráfico S para incrementos y $S\text{-}RL_2\text{-}U$

ARL(1) = 200										
n	2		5		10		15		20	
δ'_d	S	$S\text{-}RL_2$	S	$S\text{-}RL_2$	S	$S\text{-}RL_2$	S	$S\text{-}RL_2$	S	$S\text{-}RL_2$
1.05	133.17	115.50	109.18	84.02	90.89	63.40	79.65	52.16	71.50	44.68
1.1	93.32	74.12	65.03	43.47	46.96	27.91	37.34	20.86	31.07	16.72
1.15	68.26	51.55	41.61	26.12	26.94	15.36	19.98	11.06	15.80	8.68
1.2	51.75	38.13	28.27	17.49	16.85	9.85	11.92	7.02	9.13	5.56
1.5	16.31	12.90	6.32	5.06	3.20	3.10	2.19	2.53	1.72	2.26
2	6.23	6.22	2.24	2.76	1.33	2.14	1.11	2.04	1.04	2.01
2.5	3.82	4.49	1.50	2.32	1.08	2.03	1.01	2.00	1.00	2.00
3	2.86	3.74	1.25	2.15	1.02	2.01	1.00	2.00	1.00	2.00

ARL(1) = 370										
n	2		5		10		15		20	
δ'_d	S	$S\text{-}RL_2$	S	$S\text{-}RL_2$	S	$S\text{-}RL_2$	S	$S\text{-}RL_2$	S	$S\text{-}RL_2$
1.05	233.70	193.60	189.54	136.80	155.99	100.50	135.52	81.04	120.79	68.31
1.1	156.45	115.20	106.84	64.53	75.55	39.72	59.14	28.85	48.55	22.60
1.15	109.93	75.57	65.18	36.19	41.00	20.25	29.75	14.09	23.10	10.82
1.2	80.46	53.35	42.46	23.00	24.43	12.28	16.82	8.48	12.60	6.53
1.5	21.97	15.57	8.02	5.71	3.84	3.31	2.53	2.63	1.93	2.32
2	7.48	6.89	2.51	2.90	1.41	2.17	1.15	2.04	1.05	2.01
2.5	4.34	4.80	1.60	2.36	1.10	2.04	1.02	2.00	1.00	2.00
3	3.15	3.93	1.30	2.17	1.03	2.01	1.00	2.00	1.00	2.00

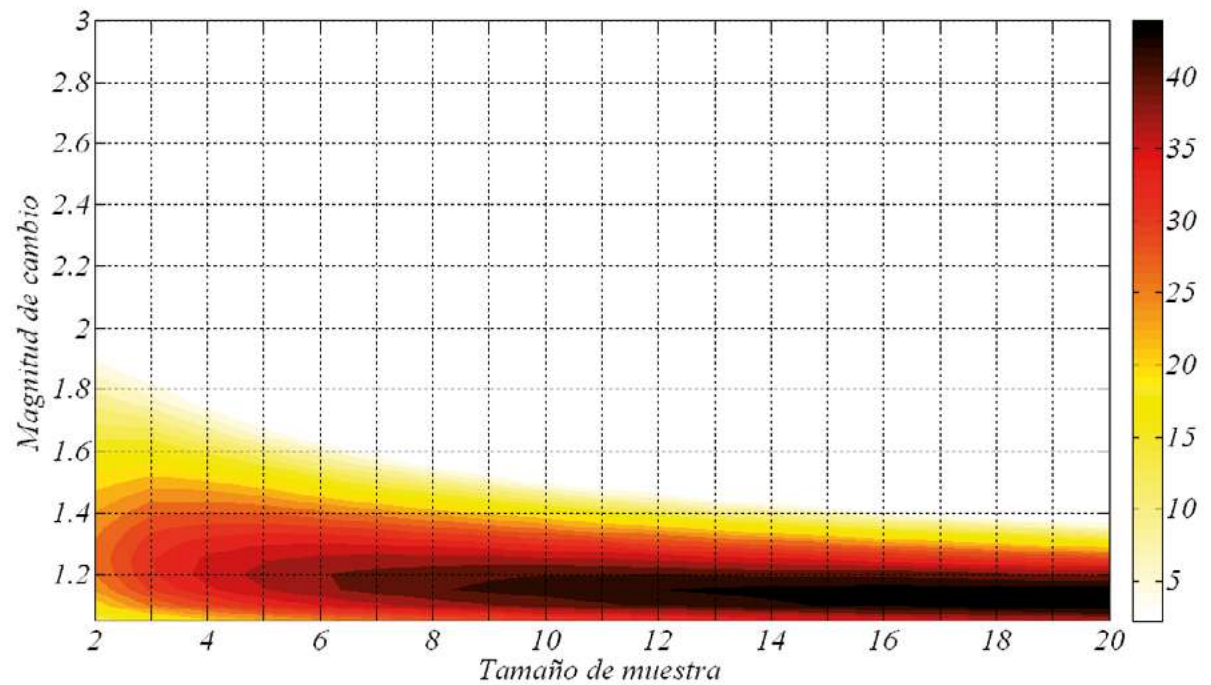
ARL(1) = 500										
n	2		5		10		15		20	
δ'_d	S	$S\text{-}RL_2$	S	$S\text{-}RL_2$	S	$S\text{-}RL_2$	S	$S\text{-}RL_2$	S	$S\text{-}RL_2$
1.05	307.72	249.00	248.32	173.60	203.29	125.80	175.90	100.50	156.25	84.09
1.1	201.41	142.70	136.28	78.19	95.44	47.18	74.14	33.80	60.50	26.21
1.15	138.77	90.90	81.22	42.40	50.40	23.18	36.20	15.87	27.87	12.04
1.2	99.82	62.71	51.84	26.27	29.33	13.68	19.94	9.27	14.78	7.08
1.5	25.39	17.01	9.03	6.03	4.20	3.41	2.72	2.68	2.04	2.38
2	8.18	7.22	2.66	2.96	1.45	2.18	1.16	2.05	1.06	2.01
2.5	4.62	4.97	1.65	2.38	1.11	2.04	1.02	2.01	1.00	2.00
3	3.30	4.02	1.32	2.18	1.03	2.01	1.00	2.00	1.00	2.00

Continúa

Tabla 5.4 Comparación de ARL entre gráfico S para incrementos y $S\text{-}RL_2\text{-}U$ (continuación)

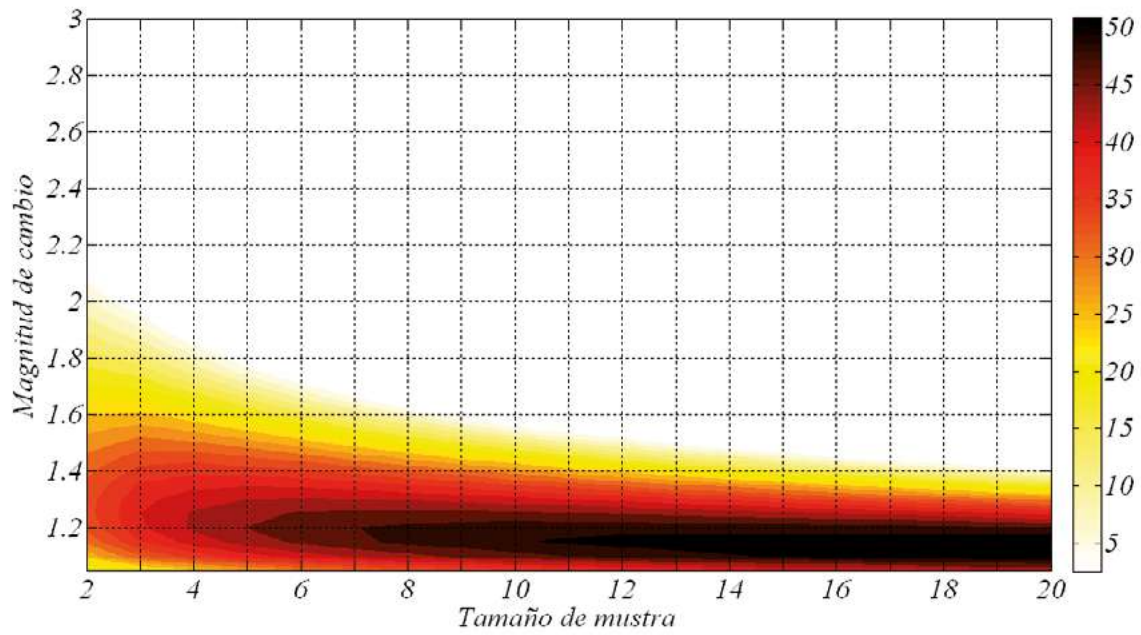
n	ARL(1) = 1000									
	2		5		10		15		20	
δ'_d	S	$S\text{-}RL_2$	S	$S\text{-}RL_2$	S	$S\text{-}RL_2$	S	$S\text{-}RL_2$	S	$S\text{-}RL_2$
1.05	579.58	442.90	462.63	299.60	374.37	210.90	321.08	165.00	283.07	135.70
1.1	360.08	232.40	238.79	121.40	163.68	70.06	125.11	48.67	100.69	36.83
1.15	237.04	138.30	134.91	60.86	81.28	31.60	57.08	20.89	43.11	15.42
1.2	163.81	90.43	82.19	35.56	44.83	17.53	29.65	11.46	21.47	8.50
1.5	35.39	20.77	11.87	6.88	5.20	3.72	3.23	2.81	2.34	2.45
2	10.01	8.05	3.04	3.10	1.56	2.22	1.21	2.06	1.08	2.02
2.5	5.32	5.34	1.77	2.43	1.14	2.05	1.03	2.01	1.01	2.00
3	3.67	4.25	1.38	2.22	1.04	2.01	1.00	2.00	1.00	2.00

Fuente: el autor

Figura 5.4 Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 200$ 

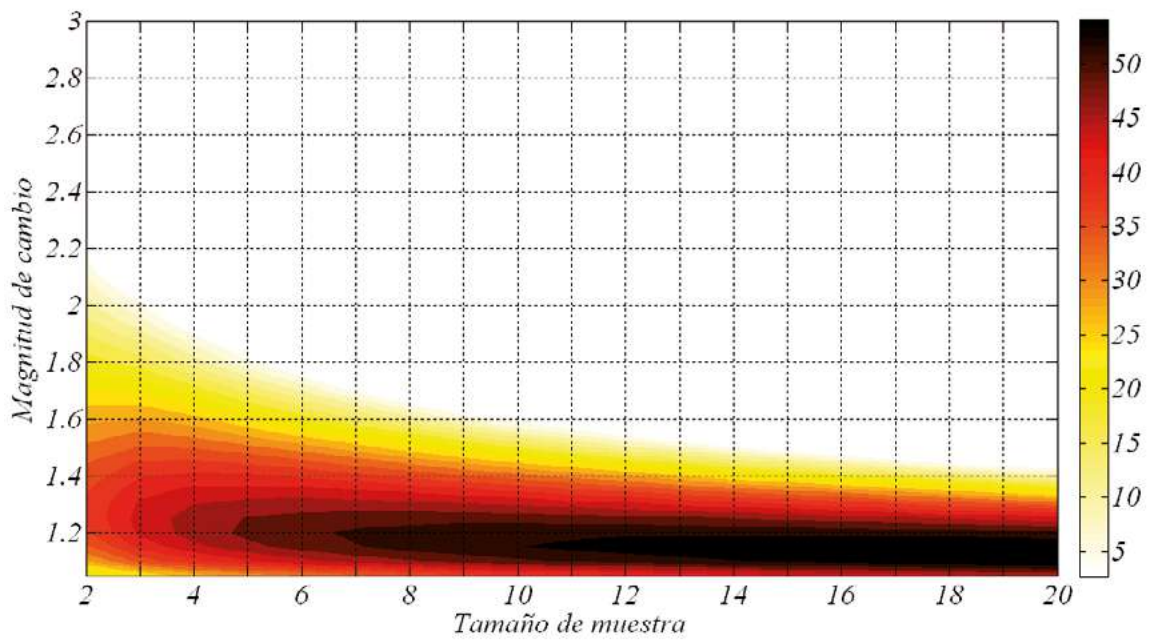
Fuente: el autor

Figura 5.5 Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 370$

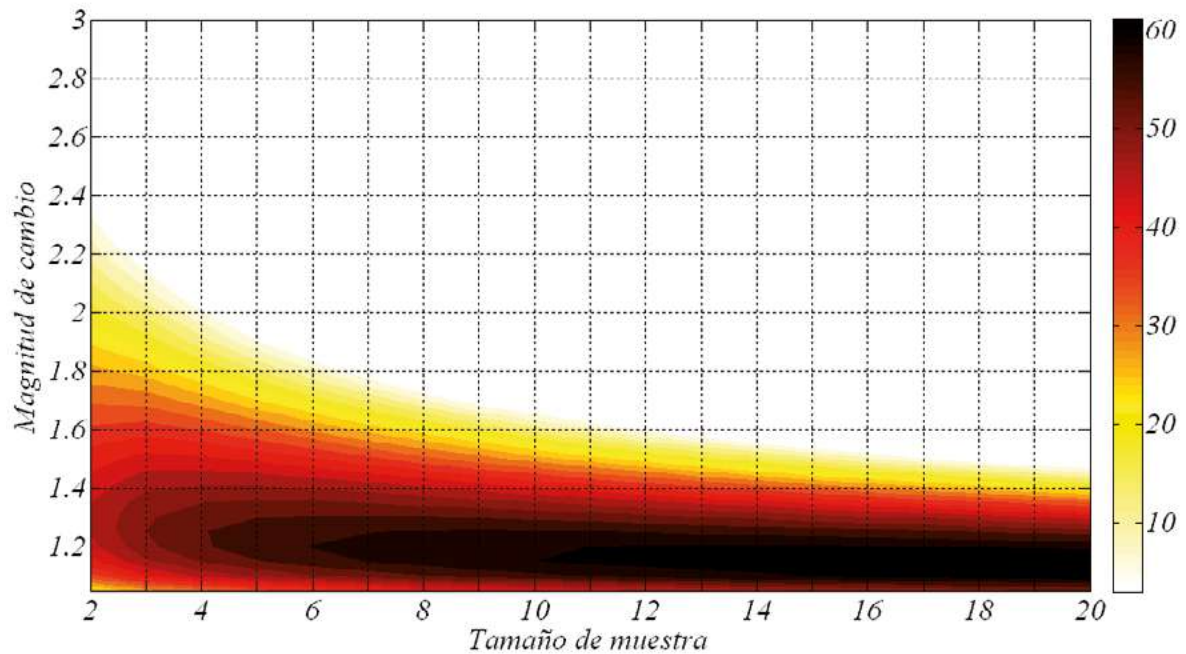


Fuente: el autor

Figura 5.6 Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 500$



Fuente: el autor

Figura 5.7 Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 1000$ 

Fuente: el autor

5.2.6.2 Gráfico $S-RL_2-U$ frente al gráfico sintético para incrementos en la desviación

El desempeño del gráfico $S-RL_2-U$ es comparado con el gráfico del sintético para incrementos en la desviación propuesto por Huang y Chen (2005) descrito anteriormente.

Los parámetros de comparación utilizados son:

- Escenario *zero-state*
- Óptimos para un valor δ'_d dado
- ARL bajo control 200, 370, 500, 1000
- Tamaño de muestra $n = 1, 2, \dots, 20$
- Magnitud de cambio de diseño $\delta'_d = 1.05, 1.15, \dots, 3$ para incrementos de σ

En las tablas 5.5 y 5.6 se presentan algunas comparaciones de los valores de ARL para ambos gráficos. Los parámetros presentados en dicha tabla son para incrementos en la desviación

de 1.05 a 1.2 y tamaños de muestra de 5, 10, 15 y 20. Para la obtención de las figuras 5.8 a 5.11 también se usaron todas las combinaciones posibles de parámetros. En dichas figuras se presenta el porcentaje de mejora del gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}U$ frente al gráfico sintético para detectar incrementos en la desviación dado por la expresión:

$$\% \text{ mejora} = \frac{ARL_{SSynth}(\delta_d) - ARL_{S\text{-}RL_2\text{-}U}(\delta_d)}{ARL_{SSynth}(\delta_d)} \times 100 \quad (5.8)$$

El gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}U$ presenta porcentajes de mejora frente al gráfico sintético para incrementos en la desviación en cambios muy pequeños, que en ningún caso de ARL bajo control estudiado llega a superar un valor de $\delta_d' 1.2$. Las mayores mejoras se encuentran en tamaños de muestra grandes, siendo el gráfico $S\text{-}RL_2$ más efectivo cuando el valor de ARL bajo control asumido es mayor. Así, como se observa en las curvas de nivel presentadas en las figuras 5.8 a 5.11, los máximos porcentajes de mejora alcanzados son de 1.6 % cuando el ARL(0) es de 200, del 5 % para un ARL(1) igual a 370, levemente superior a 6 % con un ARL(1) de 500 y de 10 % cuando el ARL(1) es igual a 1000.

Tabla 5.5 Comparación de ARL entre el gráfico sintético para incrementos en la desviación y gráfico $S-RL_2-U$

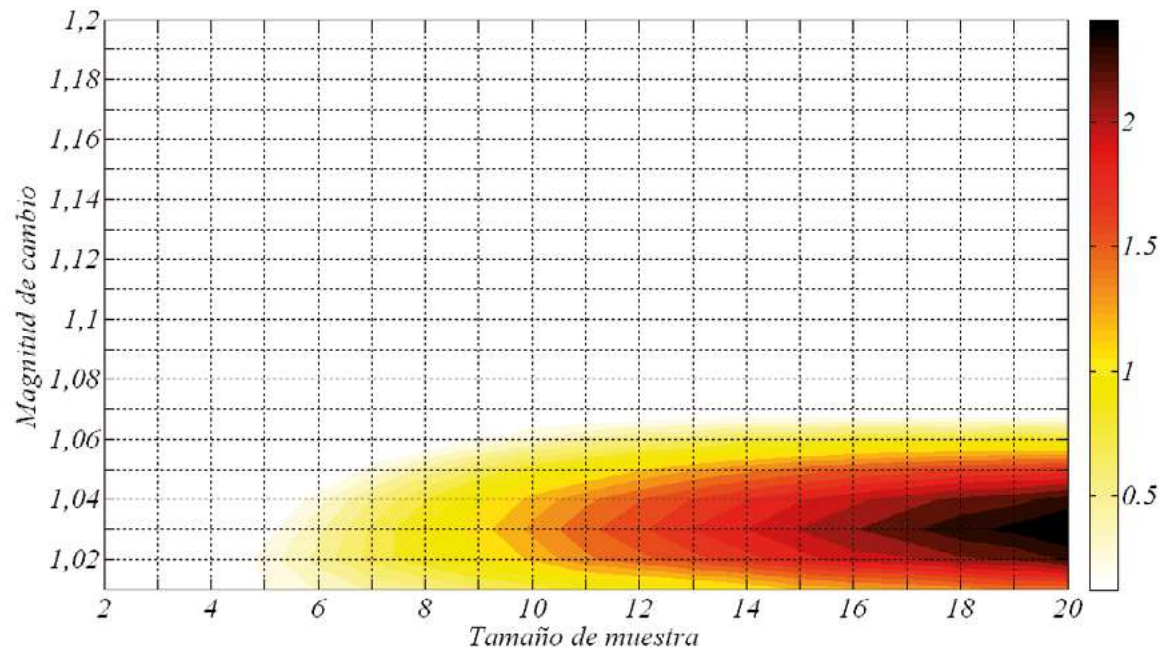
n	δ_d'	200			370		δ_d'	n
		SynthS	$S-RL_2-U$		SynthS	$S-RL_2-U$		
5	1.05	83.71	84.02		139.40	136.80	1.05	5
	1.1	42.06	43.47		64.54	64.53	1.1	
	1.15	24.26	26.12		34.92	36.19	1.15	
	1.2	15.54	17.49		21.27	23.00	1.2	
10	1.05	63.99	63.40		104.40	100.50	1.05	10
	1.1	27.06	27.91		40.16	39.72	1.1	
	1.15	14.03	15.36		19.38	20.25	1.15	
	1.2	8.45	9.85		11.04	12.28	1.2	
15	1.05	52.95	52.16		85.06	81.04	1.05	15
	1.1	20.10	20.86		29.11	28.85	1.1	
	1.15	9.85	11.06		13.22	14.09	1.15	
	1.2	5.79	7.02		7.33	8.48	1.2	
20	1.05	45.47	44.68		72.15	68.31	1.05	20
	1.1	15.95	16.72		22.66	22.60	1.1	
	1.15	7.56	8.68		9.91	10.82	1.15	
	1.2	4.42	5.56		5.44	6.53	1.2	
n	δ_d'	500			1000		δ_d'	n
		SynthS	$S-RL_2-U$		SynthS	$S-RL_2-U$		
5	1.05	178.90	173.60		317.40	299.60	1.05	5
	1.1	79.56	78.19		128.70	121.40	1.1	
	1.15	41.73	42.40		62.84	60.86	1.15	
	1.2	24.79	26.27		35.27	35.56	1.2	
10	1.05	132.60	125.80		230.40	210.90	1.05	10
	1.1	48.73	47.18		76.11	70.06	1.1	
	1.15	22.70	23.18		32.73	31.60	1.15	
	1.2	12.59	13.68		17.05	17.53	1.2	
15	1.05	107.30	100.50		183.50	165.00	1.05	15
	1.1	34.92	33.80		53.17	48.67	1.1	
	1.15	15.27	15.87		21.34	20.89	1.15	
	1.2	8.23	9.27		10.78	11.46	1.2	
20	1.05	90.49	84.09		152.70	135.70	1.05	20
	1.1	26.93	26.21		40.17	36.83	1.1	
	1.15	11.33	12.04		15.43	15.42	1.15	
	1.2	6.04	7.08		7.69	8.50	1.2	

Fuente: el autor

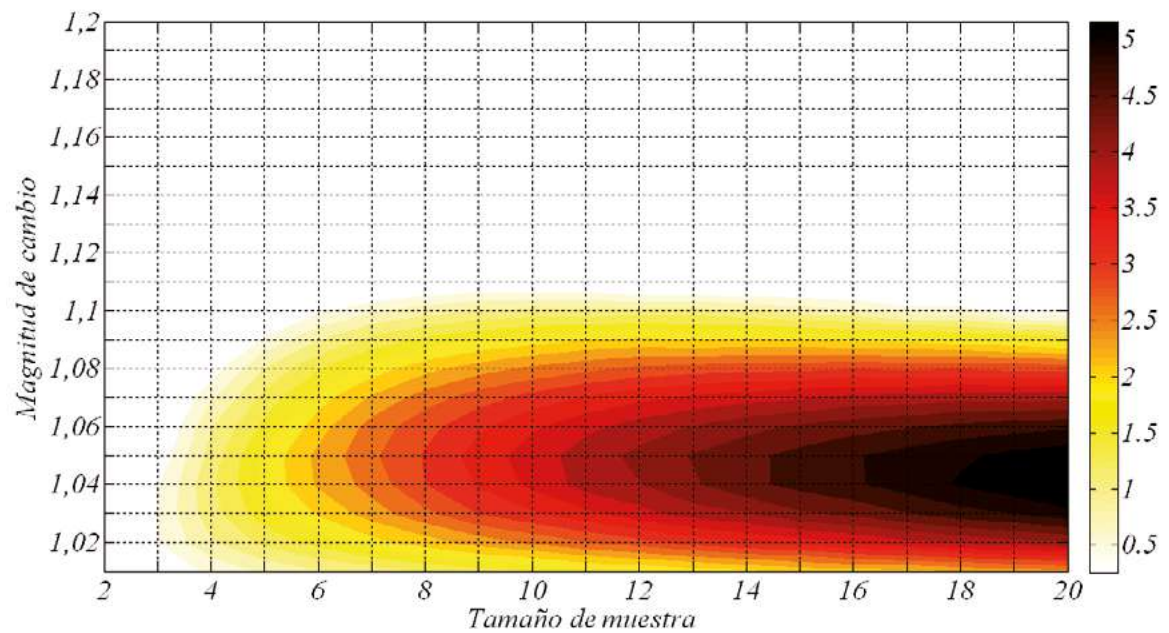
Tabla 5.6 Comparación de ARL entre el gráfico sintético para incrementos en la desviación y gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}U$

n	δ'	200			370		δ'	n
		SynthS	$S\text{-}RL_2\text{-}U$		SynthS	$S\text{-}RL_2\text{-}U$		
5	0.9	96.63	82.15		175.06	144.60	0.9	5
	0.8	44.45	33.69		78.23	55.59	0.8	
	0.5	3.60	3.42		5.25	4.15	0.5	
	0.3	1.10	2.02		1.20	2.04	0.3	
10	0.9	54.16	45.13		93.86	74.50	0.9	10
	0.8	15.44	12.60		24.54	18.19	0.8	
	0.5	1.20	2.10		1.31	2.16	0.5	
	0.3	1.00	2.00		1.00	2.00	0.3	
15	0.9	36.02	30.26		60.13	47.53	0.9	15
	0.8	8.07	7.29		11.88	9.73	0.8	
	0.5	1.02	2.01		1.04	2.01	0.5	
	0.3	1.00	2.00		1.00	2.00	0.3	
20	0.9	26.21	22.37		41.41	33.79	0.9	20
	0.8	5.17	5.18		7.17	6.52	0.8	
	0.5	1.00	2.00		1.01	2.00	0.5	
	0.3	1.00	2.00		1.00	2.00	0.3	
n	δ'	500			1000		δ'	n
		SynthS	$S\text{-}RL_2\text{-}U$		SynthS	$S\text{-}RL_2\text{-}U$		
5	0.9	234.48	191.50		460.92	365.90	0.9	5
	0.8	103.51	71.42		198.55	129.00	0.8	
	0.5	6.40	4.62		10.33	6.11	0.5	
	0.3	1.28	2.05		1.50	2.10	0.3	
10	0.9	123.19	95.57		231.76	170.80	0.9	10
	0.8	30.98	22.01		53.64	34.41	0.8	
	0.5	1.39	2.19		1.61	2.29	0.5	
	0.3	1.00	2.00		1.00	2.00	0.3	
15	0.9	77.54	59.54		140.27	100.90	0.9	15
	0.8	14.45	11.31		23.00	16.03	0.8	
	0.5	1.05	2.01		1.09	2.04	0.5	
	0.3	1.00	2.00		1.00	2.00	0.3	
20	0.9	53.87	41.54		94.24	67.45	0.9	20
	0.8	8.46	7.30		12.61	9.68	0.8	
	0.5	1.01	2.00		1.01	2.00	0.5	
	0.3	1.00	2.00		1.00	2.00	0.3	

Fuente: el autor

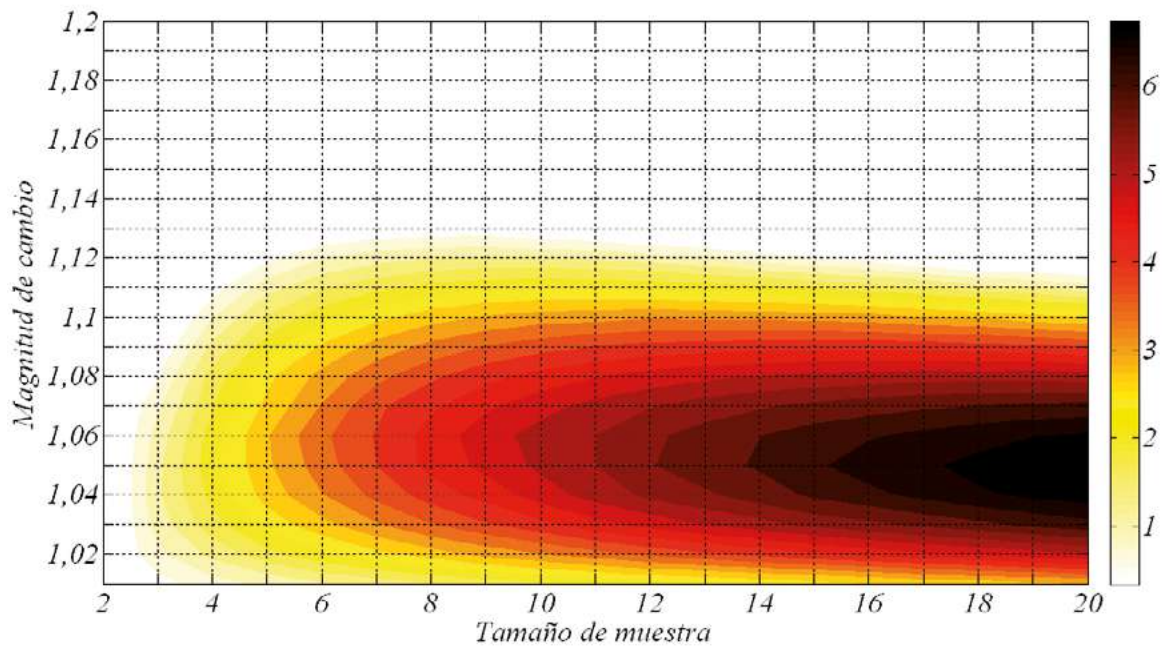
Figura 5.8 Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 200$ 

Fuente: el autor

Figura 5.9 Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 370$ 

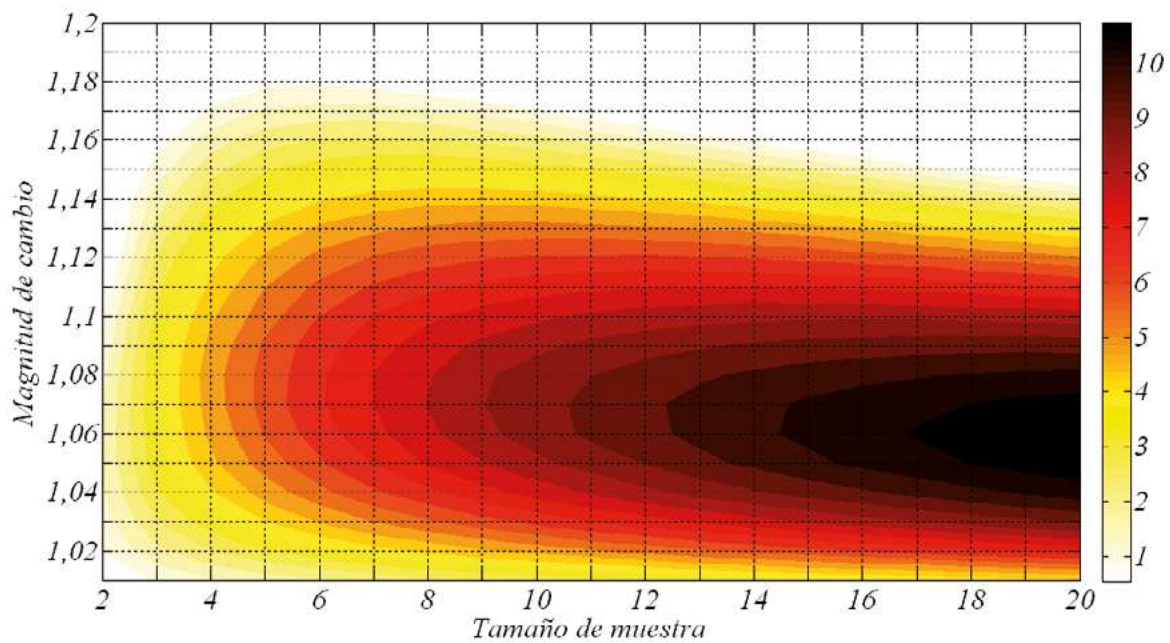
Fuente: el autor

Figura 5.10 Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 500$



Fuente: el autor

Figura 5.11 Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 1000$



Fuente: el autor

5.2.6.3 Gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}U$ frente al gráfico Cusum S y EWMA S para detectar incrementos en la desviación n

El gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}U$ es comparado con el desempeño de los gráficos Cusum S y EWMA S para detectar incrementos en la desviación y algunas de sus variantes encontradas en la literatura.

En el trabajo realizado por Lowry, Champ y Woodall (1995) se presenta el desempeño de un gráfico Cusum para la desviación en el proceso, denominado como gráfico Cusum S . De dicho trabajo se obtiene la tabla 5.7, donde se presentan los valores de ARL para tamaños de muestra 5, 10, 15 y 20; incrementos en la desviación con valores entre 1.1 y 2; y ARL bajo control de 200. Los parámetros del gráfico Cusum S son seleccionados para un valor óptimo de incremento en la desviación de 1.5.

Tabla 5.7 Comparación entre Cusum S y $S\text{-}RL_2\text{-}U$ caso $ARL(1) \cong 200$

	Cusum S	$S\text{-}RL_2\text{-}U$	Cusum S	$S\text{-}RL_2\text{-}U$	Cusum S	$S\text{-}RL_2\text{-}U$	Cusum S	$S\text{-}RL_2\text{-}U$
	k 1,18	K^* 1,48	k 1,22	K^* 1,308	k 1,23	K^* 1,237	k 1,23	K^* 1,191
	h 1,03	LS 7	h 0,462	LS 5	h 0,29	LS 4	h 0,205	LS 3
n	5		10		15		20	
δ'_d								
1,1	46.72	46.45	35.03	30.25	30.51	22.89	25.99	18.94
1,2	18.75	18.17	11.80	10.14	8.99	7.21	7.30	5.78
1,3	9.82	9.88	5.85	5.45	4.26	3.99	3.47	3.30
1,4	6.63	6.62	3.73	3.82	2.72	2.96	2.20	2.55
1,5	5.05	5.06	2.72	3.10	1.99	2.52	1.65	2.26
1,6	3.95	4.19	2.18	2.71	1.63	2.30	1.37	2.13
1,7	3.29	3.66	1.84	2.48	1.41	2.18	1.21	2.06
1,8	2.80	3.30	1.63	2.33	1.27	2.10	1.12	2.03
1,9	2.53	3.04	1.48	2.23	1.18	2.06	1.07	2.01
2	2.28	2.85	1.36	2.17	1.12	2.04	1.04	2.00

Fuente: el autor

Es posible observar que para los cuatro tamaños de muestra estudiados, el gráfico de control $S\text{-}RL_2$ es superior al gráfico Cusum S en valores de incrementos pequeños de la desviación del proceso.

Lowry, Champ y Woodall (1995) también presentan una comparativa teniendo en cuenta un gráfico Cusum basado en $(n-1)S^2 / \sigma_0^2$ presentado por Howell (1987) denominado Cusum S^2 . En este caso son considerados tamaños de muestra de 5 y 10; un ARL bajo control de 500 e incrementos en la desviación entre 1.1 y 2. La comparación con el gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}U$ se puede ver en la tabla 5.8. Fueron seleccionados parámetros que optimizan el valor de ARL para un cambio de 1.5.

Tabla 5.8 Comparación entre Cusum S , Cusum S^2 y $S\text{-}RL_2\text{-}U$ caso $ARL(1) 500$

	Cusum S	Cusum S^2	$S\text{-}RL_2\text{-}U$	Cusum S	Cusum S^2	$S\text{-}RL_2\text{-}U$
	k 1.18	1.46	$K+$ 1.566	k 1.22	1.46	$K+$ 1.354
	h 0.275	3.728	LS 8	h 0.579	1.726	LS 5
n	5	5	5	10	10	10
δ'_d						
1.10	82.01	81.85	78.68	60.55	57.85	54.88
1.20	25.89	25.96	26.38	16.09	15.23	14.79
1.30	13.14	12.95	13.25	7.32	6.99	6.88
1.40	8.32	8.13	8.34	4.39	4.45	4.42
1.50	5.98	5.93	6.04	3.18	3.16	3.41
1.60	4.75	4.60	4.79	2.51	2.52	2.90
1.70	3.89	3.77	4.03	2.11	2.09	2.60
1.80	3.32	3.22	3.55	1.84	1.81	2.42
1.90	2.92	2.81	3.19	1.62	1.63	2.29
2.00	2.62	2.52	2.96	1.49	1.48	2.21

Fuente: el autor

De nuevo el gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}U$ presenta mejoras en valores de incrementos pequeños de la desviación del proceso; para cambios moderados el gráfico tiene un desempeño similar aunque no mejor al Cusum S^2 y Cusum S .

Chang y Gan (1995) presentan el desempeño del gráfico Cusum S y del gráfico EWMA S . En la tabla 5.9 son comparados los valores de ARL de estos dos gráficos con el ARL del gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}U$. Los cambios en el incremento de la desviación en este caso incluyen valores muy pequeños, entre 1.02 y 1.1 hasta 2. El tamaño de muestra es de 5, y el ARL bajo control es de 500. Fueron seleccionados los parámetros que optimizan los valores de ARL para tres tipos de cambio 1.3, 1.4, y 1.6.

Se observa que el gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}U$ presenta un desempeño similar al del gráfico Cusum S y EWMA S . Cuando los parámetros utilizados optimizan el ARL en un incremento de la desviación de 1.6, el gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}U$ es superior en cambios de desviación pequeños. Para los parámetros que optimizan en incrementos de 1.3 y 1.4, el gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}U$ es levemente superior para cambios mayores a 1.1. En este aspecto el gráfico EWMA S es el que presenta mejor desempeño para cambios pequeños. Los valores menores de ARL son resaltados en la tabla 5.9.

Tabla 5.9 Comparación entre Cusum S , EWMA S y $SRL_2\text{-}U$ caso $ARL(0) = 500$, $n = 5$

	Cusum S			EWMA S			$S\text{-}RL_2\text{-}U$		
	k			λ			K^+		
	0.159	0.291	0.541	0.088	0.194	0.462	1.627	1.591	1.551
h	2.599	1.887	1.106	0.256	0.454	0.809	LS 14	10	7
opt	1,3	1,4	1,6	1,3	1,4	1,6	1,3	1,4	1,6
δ'_d									
1	500	500	500	500	500	500	500	500	500
1.02	316.4	328.1	344.9	314.6	326.3	344.3	324.4	328.6	333.6
1.04	209.4	223.3	244.4	207.4	221.1	243.8	218.8	223.8	230.0
1.06	144.5	157.1	177.5	142.8	155.2	177.1	152.8	157.5	163.5
1.08	103.5	114.1	132.0	102.2	112.5	131.8	110.2	114.2	119.5
1.1	76.8	85.2	100.3	75.9	84.0	100.3	81.8	85.1	89.5
1.2	26.0	28.2	33.4	25.9	28.0	33.7	26.5	27.4	29.0
1.3	13.7	14.0	15.7	13.8	14.1	16.0	13.2	13.2	13.7
1.4	9.1	8.9	9.3	9.2	9.0	9.5	8.5	8.3	8.4
1.6	5.5	5.1	4.8	5.7	5.2	5.0	5.1	4.9	4.7
1.8	4.1	3.7	3.2	4.2	3.8	3.4	3.8	3.7	3.6
2	3.4	2.9	2.5	3.5	3.1	2.6	3.2	3.1	3.0

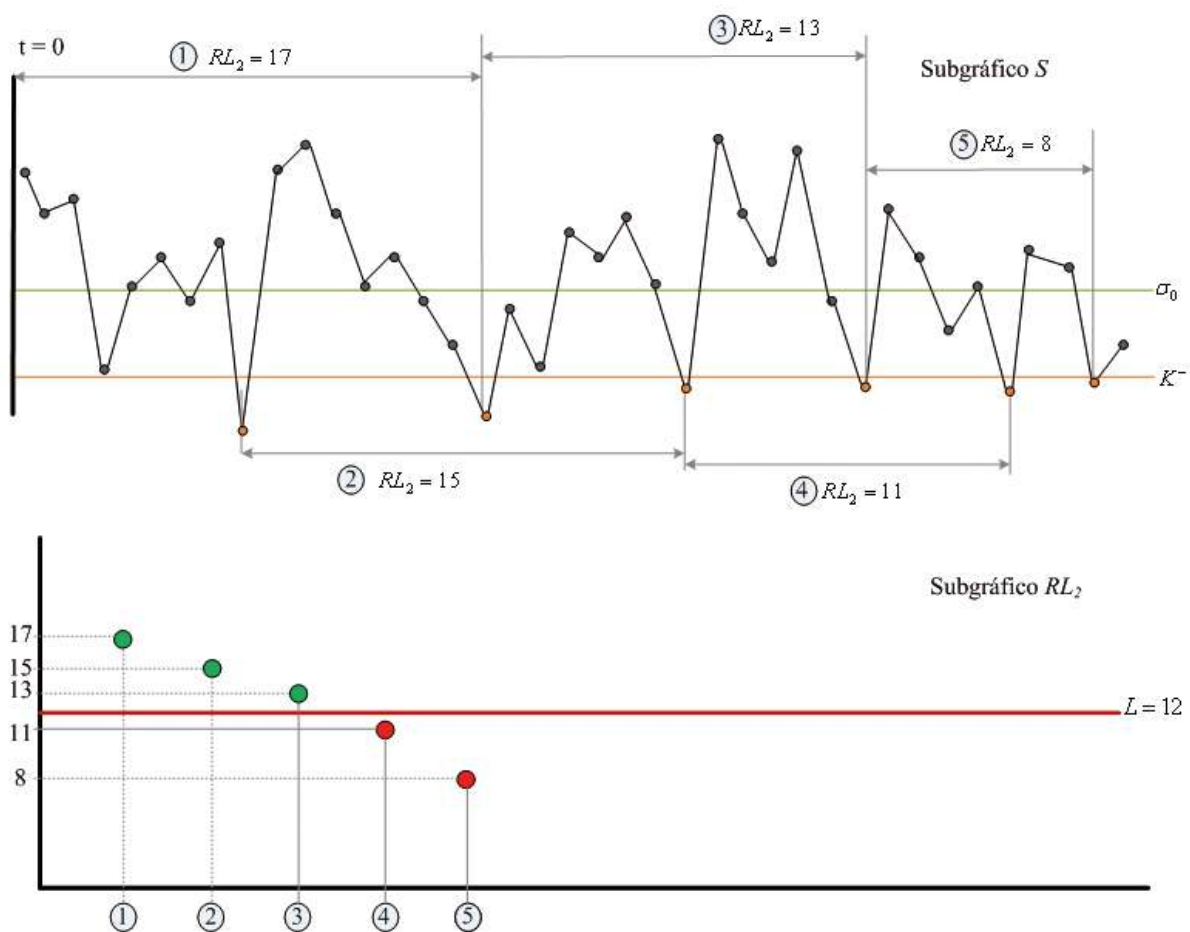
Fuente: el autor

5.3 Diseño del gráfico $S\text{-}RL_2$ para decrementos: gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}L$

El modo de funcionamiento del gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}L$ para detectar decrementos en la desviación presenta la siguiente estructura: al iniciar el control del proceso, en el subgráfico S se contabiliza el número de muestras hasta que se detecte la segunda muestra no conforme, es decir, hasta que el estadístico S supere solo el límite K^- por segunda vez, así, el primer estadístico es obtenido y es plasmado en el subgráfico RL_2 . Para la obtención de un segundo estadístico

se inicia el conteo de muestras en el subgráfico S desde la primera muestra no conforme obtenida hasta la tercera, de igual manera es llevado el valor al gráfico RL_2 . Así se obtienen, sucesivamente, los valores de los estadísticos para el subgráfico RL_2 . En el momento en el que el valor de un estadístico del subgráfico RL_2 es menor que el límite de control L se considera que existe una salida de control en el proceso. La manera de operar del gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}L$ puede observarse en la figura 5.12.

Figura 5.12 Esquematzación del gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}L$



Fuente: el autor

5.3.1 *Dinámica del gráfico de control S - RL_2 - L*

El modo de operar del gráfico de control S - RL_2 - L se describe a continuación (figura 5.13):

1. Establecer el límite de control inferior K^- para el subgráfico S de Shewhart y el límite inferior LS del subgráfico de control RL_2 .
2. En un instante i tomar una muestra aleatoria de n observaciones y calcular la desviación S .
3. Si el estadístico S cumple la condición $S > K^-$ en el subgráfico de control S de Shewhart, entonces se afirma que la muestra es conforme y se vuelve al paso 2. De lo contrario la muestra es denominada no conforme y se prosigue con el paso 4.
4. Contabilizar el número de muestras en el gráfico S entre las dos más recientes muestras no conformes. Este número es contabilizado como una muestra para el subgráfico RL_2 .
5. Si la muestra es mayor que el límite de control LS especificado para el subgráfico RL_2 entonces se afirma que el proceso se encuentra bajo control y se debe volver al paso 2. En caso contrario se asume que el proceso se encuentra fuera de control y se continúa con el paso 6.
6. Se genera una señal de fuera de control.
7. Tomar las acciones requeridas para encontrar y eliminar las causas asignables de la salida de control y así volver al paso 2.

5.3.2 *Obtención del ARL para el gráfico de control S - RL_2 - L*

Retomando la ecuación 3.33 en la que se presentó la expresión para calcular el ANI de un gráfico RL_2 , para el cálculo del ARL del gráfico de control S - RL_2 - L se modifica el primer elemento de dicha expresión por la expresión 3.16, así:

$$ARL_{S-RL_2-L} = \frac{1}{F\left((n-1)\left(\frac{K^-}{\delta'}\right)^2\right)} \times [E(NTNS_sL)] \quad (5.9)$$

Para la obtención del segundo elemento de la expresión 5.9 y en concordancia con la nomenclatura presentada por Bourke (1991) se considera el parámetro TNS_sL como una racha de muestras conformes en el subgráfico S hasta una no conforme; el valor esperado de TNS_sL denominado $E(NTNS_sL)$ en la expresión 5.9 se calcula mediante un procedimiento basado en cadenas de Markov que se describe a continuación:

En el gráfico $S-RL_2-L$ una señal ocurre cuando la suma de las dos más recientes longitudes de racha $S_{i-1} + S_i$ del subgráfico S es menor que el límite de control inferior LS del subgráfico RL_2 , es decir, cuando se presenta un cambio en la desviación del proceso. Los estados transitorios de la cadena de Markov estarán determinados por la longitud de racha del TNS_sL más reciente. El estado absorbente corresponderá a la ocurrencia de una señal de salida de control. La matriz de transición **RsL** de la cadena de Markov en un gráfico de control $S-RL_2-L$ se representa así:

$$\mathbf{RsL} = \begin{matrix} & & \begin{matrix} Estado & actual \end{matrix} \\ & & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \dots & (LS-2) & (LS-1) & (\geq LS) \end{matrix} \\ & & \begin{matrix} - & - & - & - & - & - & - \end{matrix} \\ Estado & 0 & \langle & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-G(LS-1) \\ & 1 & \langle & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(LS-1) & 1-G(LS-1) \\ & 2 & \langle & 0 & 0 & 0 & \dots & f(LS-2) & f(LS-1) & 1-G(LS-1) \\ previo & 3 & \langle & 0 & 0 & 0 & \dots & f(LS-2) & f(LS-1) & 1-G(LS-1) \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & (LS-2) & \langle & 0 & 0 & f(2) & \dots & f(LS-2) & f(LS-1) & 1-G(LS-1) \\ & (LS-1) & \langle & 0 & f(1) & f(2) & \dots & f(LS-2) & f(LS-1) & 1-G(LS-1) \\ & (\geq LS) & \langle & f(0) & f(1) & f(2) & \dots & f(LS-2) & f(LS-1) & 1-G(LS-1) \end{matrix} \quad (5.10)$$

Donde

Si $\delta' > 1$

$$f(r) = \Pr(S_i = r) = \left[\left(1 - \left(F \left((n-1) \left(\frac{K^-}{\delta'} \right)^2 \right) \right)^r \right) * F \left((n-1) \left(\frac{K^-}{\delta'} \right)^2 \right) \right]$$

para $r = 0, 1, 2, \dots, (LS-1)$

$$G(LS-1) = \sum_{r=0}^{LS-1} f(r)$$

Las condiciones de la cadena de Markov para el gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}L$ son análogas a las del gráfico $\bar{X}\text{-}RL_2$. Por tanto, de la ecuación 3.21 para el caso del gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}L$ se obtiene el vector $E(\text{NTNSs}L)$ dado por

$$E(\text{NTNSs}L) = (\mathbf{I} - \mathbf{R}_sL)^{-1} \cdot \mathbf{1} \quad (5.11)$$

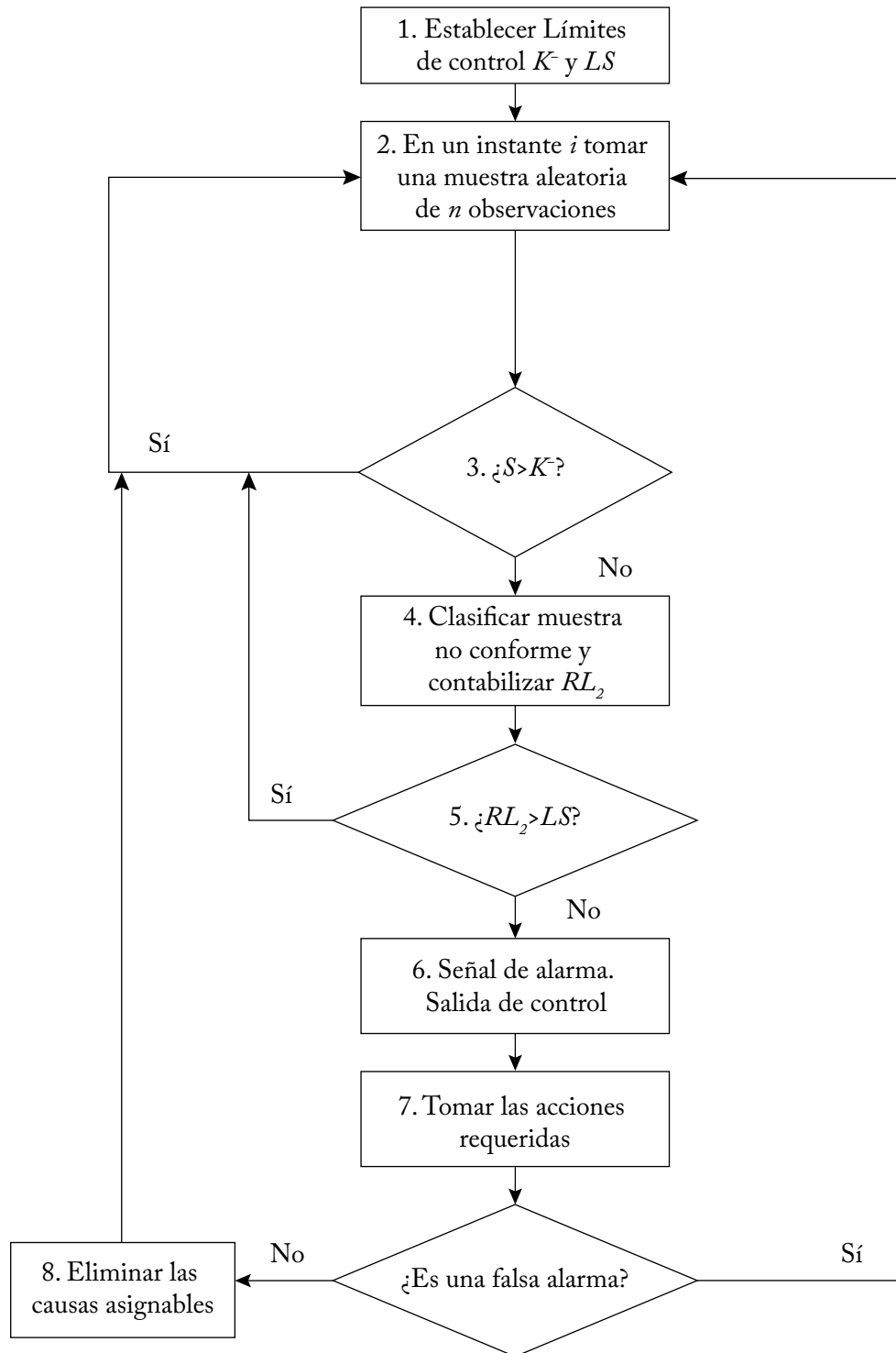
Donde $\mathbf{1}$ es un vector columna de unos, $\mathbf{I}$ es una matriz identidad de tamaño $(LS+1) \times (LS+1)$ y $E(\text{NTNSs}L)$ es el vector que contiene el valor $E(\text{NTNSs}L)$ de cada uno de los estados transitorios i no absorbentes. Así pues, para obtener el valor $E(\text{NTNSs}L)$ de un determinado estado transitorio inicial i de la ecuación 3.22 se calcula:

$$E(\text{NTNSs}L) = \mathbf{S}'(\mathbf{I} - \mathbf{R}_sL)^{-1} \cdot \mathbf{1} \quad (5.12)$$

Al obtener el valor $E(\text{NTNSs}L)$ para calcular el ARL del gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}L$ se debe considerar que el estado inicial debe ser mayor o igual a LS . Así, el vector de tamaño $(LS+1)$ tendrá la forma $\mathbf{S}' = \langle 0, 0, 0 \dots 0, 1 \rangle$ con lo cual el estado transitorio inicial estará en la última posición del vector.

Las posibles transiciones de la cadena de Markov del gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}L$ son equivalentes a las del gráfico $\bar{X}\text{-}RL_2$.

Figura 5.13 Dinámica del gráfico de control $S-RL_2-L$



Fuente: el autor

5.3.3 Obtención del ARL para el gráfico de control S - RL_2 - L

Los parámetros a obtener corresponden al valor del límite K^- del subgráfico S y el valor del límite LS del subgráfico RL_2 . Por tanto, los valores de K^- y LS deben satisfacer la igualdad:

$$ARL(\delta' = 1)_{S-RL_2-L} = \frac{1}{F\left((n-1)(K^-)^2\right)} \times [E_1(NTNS_sL)] \quad (5.13)$$

Los valores $f(r)$ de la matriz de transición $\mathbf{Rs}L$ necesaria para calcular $E_1(NTNS_sL)$ también se modifican con la condición $\delta' = 1$.

Con la ecuación 5.13 es posible obtener para el mismo valor de ARL bajo control diferentes valores de K^- y LS . El tamaño de la matriz $\mathbf{Rs}L$ viene dado por el valor de límite de control LS dado por $(LS+1) \times (LS+1)$. Ejemplificando, para incrementos en la desviación, un $ARL(\delta' = 1)$ bajo control de 370 y tamaño de muestra $n = 10$ se obtienen los valores de la tabla 5.10.

Tabla 5.10 Valores límites de control LS y K^-

LS	K^-
2	0.6850
4	0.6445
7	0.6132
15	0.5740
24	0.5518
50	0.5206
67	0.5092
88	0.4993
100	0.4948

Fuente: el autor

5.3.4 Cálculo del ARL fuera de control para el gráfico de control S-RL₂-L

Si se asume que un cambio ha ocurrido en el proceso es posible determinar el ARL en esas condiciones, es decir, el ARL cuando el proceso está fuera de control o $ARL(\delta' \neq 1)$; así, se considera que el valor de la desviación σ_0 pasa a ser $\delta'\sigma_0$. Estableciendo un valor de cambio de diseño δ'_d para el gráfico S-RL₂-L y con los valores de límites de control K^- y LS obtenidos para un ARL bajo control determinado, se calcula el ARL fuera de control mediante:

$$ARL(\delta'_d)_{S-RL_2-L} = \frac{1}{F\left((n-1)\left(\frac{K^-}{\delta'_d}\right)^2\right)} \times [E_\delta(NTNSsL)] \quad (5.14)$$

Para la el cálculo de los valores de $E_\delta(NTNSsL)$ se utiliza la expresión 5.12 donde se asume que el valor $\delta' = \delta'_d$.

Los parámetros necesarios para calcular el ARL fuera de control son (asumiendo una distribución normal de los datos del proceso con $\mu_0 = 0$ y $\sigma_0 = 1$) el tamaño de la muestra n , la magnitud del cambio δ'_d y los límites K^- y LS de los subgráficos que permitan el ARL bajo control deseado. Suponiendo entonces:

- $n = 10$
- $\delta'_d = 0.9$
- Según la tabla 5.10 si $LS = 7$ entonces $K^- = 0.6132$ para un ARL bajo control de 370

Mediante el uso del programa Mathcad se resuelve la expresión 5.14 para los parámetros mencionados y se obtiene un valor de ARL fuera de control de 74.4987.

Algunos valores de $ARL(\delta_d)$ en el gráfico de control S-RL₂-L para un ARL bajo control de 500 y magnitudes de cambio $\delta_d = 1.05, 1.1$ y 1.15 se presentan en la tabla 5.11.

Tabla 5.11 Valores ARL fuera de control caso ARL bajo control 370, $n = 10$

Límites		Magnitud del cambio δ_d		
LS	K^-	0,7	0,8	0,9
3	0.661	5.999	18.33	75.73
4	0.644	5.999	18.20	74.98
5	0.632	6.12	18.19	74.63
6	0.622	6.26	18.29	74.499
7	0.613	6.43	18.44	74.499
15	0.574	7.80	20.19	76.16
50	0.521	12.23	27.86	85.95
88	0.499	15.32	34.48	94.90

Fuente: el autor

5.3.5 Optimización

El procedimiento de optimización para el gráfico $S-RL_2-L$ es:

1. Especificar δ' , n y ARL bajo control.
2. Inicializar con el límite inferior para el subgráfico RL_2 en 2, $LS = 2$.
3. Obtener el valor de K^- resolviendo numéricamente la ecuación 5.13.
4. Calcular el valor de ARL_{S-RL_2-L} con el valor actual de K^- y LS utilizando la ecuación 5.14.
5. Si el valor de ARL_{S-RL_2-L} disminuye, se incrementa el valor de LS en una unidad y volver al paso 3. Si el valor de ARL_{S-RL_2-L} se incrementa, se detiene el procedimiento de búsqueda y se resta una unidad al valor de LS con el que el ARL_{S-RL_2-L} aumentó y se continúa con el paso 6.
6. Los valores de K^- y LS actuales son establecidos como parámetros de diseño del gráfico de control $S-RL_2-L$.
7. Se concluye el proceso de búsqueda para el diseño óptimo para el gráfico de control $S-RL_2-L$.

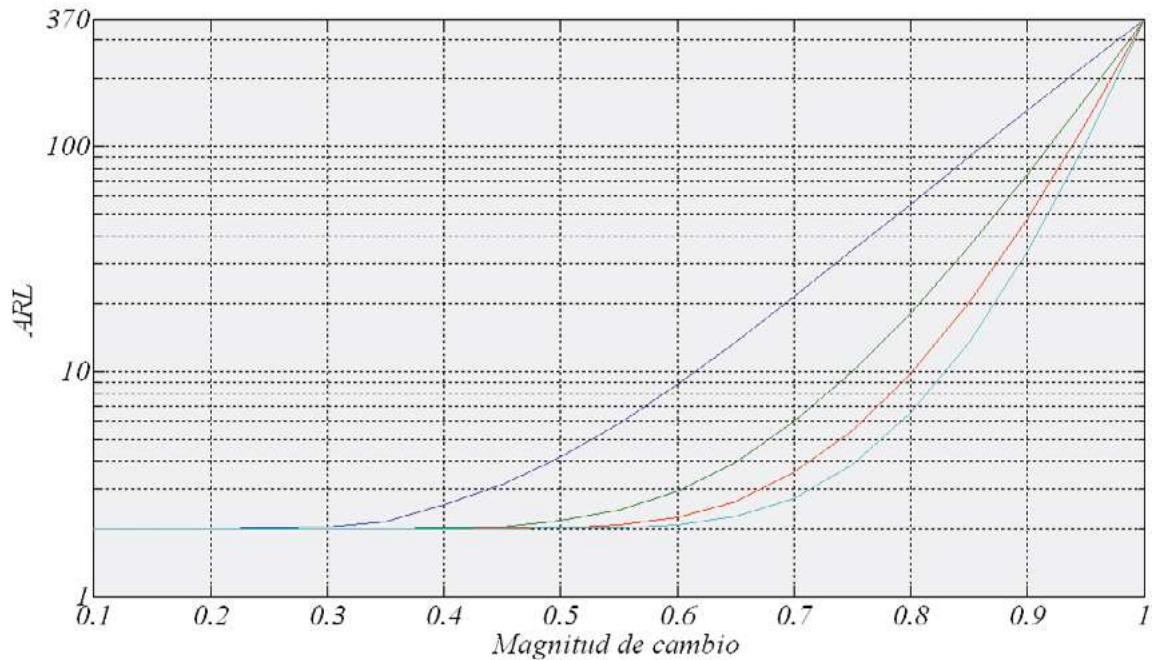
En la tabla 5.11 se resaltan los valores óptimos para cada magnitud de cambio presentada. En la tabla 5.12 se presentan algunos valores óptimos de ARL para diferentes magnitudes de cambio, tamaños de muestra y ARL bajo control de 200, 370, 500 y 1000. En el anexo II se presentan los valores óptimos para el ARL bajo control de 200, 370, 500 y 1000; tamaño de muestra 2 a 20 y magnitud de cambio de 0.1 a 0.9.

Tabla 5.12 Valores óptimos de $ARL(\delta'_d)$ para el gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}L$

n	$\delta'_d < 1$	200			370			500			1000		
		LS	K	ARL	LS	K	ARL	LS	K	ARL	LS	K	ARL
5	0.9	4	0.501	82.15	4	0.468	144.60	5	0.438	191.50	5	0.407	365.90
	0.8	4	0.501	33.69	4	0.468	55.59	4	0.454	71.42	5	0.407	129.00
	0.7	3	0.525	14.03	4	0.468	21.63	4	0.454	26.76	4	0.422	44.54
	0.5	3	0.525	3.42	3	0.490	4.15	3	0.475	4.62	3	0.442	6.11
	0.3	2	0.559	2.02	2	0.522	2.04	2	0.506	2.05	2	0.470	2.10
10	0.9	6	0.646	45.13	7	0.613	74.50	8	0.595	95.57	10	0.561	170.80
	0.8	5	0.656	12.60	5	0.632	18.19	6	0.611	22.01	7	0.579	34.41
	0.7	4	0.670	4.80	4	0.645	5.99	4	0.633	6.76	5	0.597	9.16
	0.5	3	0.687	2.10	3	0.661	2.16	3	0.649	2.19	3	0.624	2.29
	0.3	2	0.713	2.00	2	0.685	2.00	2	0.673	2.00	2	0.646	2.00
15	0.9	7	0.710	30.26	8	0.684	47.53	9	0.669	59.54	12	0.638	100.90
	0.8	4	0.737	7.29	5	0.705	9.73	6	0.688	11.31	7	0.661	16.03
	0.7	3	0.752	3.07	4	0.716	3.57	4	0.706	3.82	4	0.685	4.55
	0.5	2	0.773	2.01	2	0.750	2.01	2	0.740	2.01	3	0.698	2.04
	0.3	2	0.773	2.00	2	0.750	2.00	2	0.740	2.00	2	0.717	2.00
20	0.9	7	0.751	22.37	8	0.728	33.79	9	0.716	41.54	12	0.688	67.45
	0.8	4	0.775	5.18	5	0.747	6.52	5	0.739	7.30	6	0.714	9.68
	0.7	3	0.788	2.52	3	0.769	2.72	3	0.760	2.83	4	0.730	3.23
	0.5	2	0.806	2.00	2	0.787	2.00	2	0.778	2.00	2	0.758	2.00
	0.3	2	0.806	2.00	2	0.787	2.00	2	0.778	2.00	2	0.758	2.00

Fuente: el autor

Figura 5.14 Curvas de ARL del gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}L$ caso $ARL(1) = 370$



Fuente: el autor

5.3.6 Desempeño

El desempeño del gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}L$ será comparado con el de:

- Gráfico S de Shewhart para decrementos en la desviación típica
- Gráfico sintético para decrementos en S
- Gráfico EWMA S para decrementos
- Gráfico Cusum S para decrementos

5.3.6.1 Gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}L$ frente al gráfico S de Shewhart para detectar decrementos

Los parámetros de comparación utilizados son:

- Escenario *zero-state*
- Óptimos para un valor δ'_d dado
- ARL bajo control 200, 370, 500, 1000
- Tamaño de muestra $n = 2, 3, \dots, 20$
- Magnitud de cambio de diseño $\delta'_d = 0.1, 0.15, \dots, 0.95$ para decrementos de σ

Las comparaciones son efectuadas mediante el uso del porcentaje de mejora dado por:

$$\% \text{ mejora} = \frac{ARL_S(\delta_d) - ARL_{S-RL_2-L}(\delta_d)}{ARL_S(\delta_d)} \times 100 \quad (5.15)$$

La tabla 5.13 presenta algunos valores de ARL fuera de control para ambos gráficos comparados. Para la obtención de las curvas de nivel de las figuras 5.14 a 5.17 si que se usaron la totalidad de combinaciones de parámetros.

Tabla 5.13 Comparación de ARL entre gráfico S y $S\text{-}RL_2\text{-}L$

n	5		10		15		20	
δ_d^*	S	$S\text{-}RL_2\text{-}L$	S	$S\text{-}RL_2\text{-}L$	S	$S\text{-}RL_2\text{-}L$	S	$S\text{-}RL_2\text{-}L$
0.1	1.00	2.00	1.00	2.00	1.00	2.00	1.00	2.00
0.3	3.13	2.02	1.02	2.00	1.00	2.00	1.00	2.00
0.5	15.31	3.42	2.80	2.10	1.42	2.01	1.11	2.00
0.7	51.55	14.03	16.39	4.80	7.83	3.07	4.66	2.52
0.8	85.13	33.69	39.47	12.60	22.93	7.29	15.09	5.18
0.9	133.34	82.15	91.07	45.13	68.42	30.26	54.20	22.37

n	5		10		15		20	
δ_d^*	S	$S\text{-}RL_2\text{-}L$	S	$S\text{-}RL_2\text{-}L$	S	$S\text{-}RL_2\text{-}L$	S	$S\text{-}RL_2\text{-}L$
0.1	1.01	2.00	1.00	2.00	1.00	2.00	1.00	2.00
0.3	4.88	2.04	1.06	2.00	1.00	2.00	1.00	2.00
0.5	26.82	4.15	3.97	2.16	1.70	2.01	1.19	2.00
0.7	93.56	21.63	27.42	6.00	12.12	3.57	6.76	2.72
0.8	155.86	55.59	69.12	18.19	38.43	9.73	24.33	6.52
0.9	245.62	144.60	164.63	74.50	121.39	47.53	94.57	33.79

n	5		10		15		20	
δ_d^*	S	$S\text{-}RL_2\text{-}L$	S	$S\text{-}RL_2\text{-}L$	S	$S\text{-}RL_2\text{-}L$	S	$S\text{-}RL_2\text{-}L$
0.1	1.01	2.00	1.00	2.00	1.00	2.00	1.00	2.00
0.3	6.17	2.05	1.09	2.00	1.00	2.00	1.00	2.00
0.5	35.50	4.62	4.77	2.19	1.88	2.01	1.25	2.00
0.7	125.51	26.76	35.49	6.76	15.14	3.82	8.18	2.83
0.8	209.79	71.42	91.22	22.01	49.72	11.31	30.90	7.30
0.9	331.36	191.50	220.27	95.57	161.04	59.54	124.48	41.54

Continúa

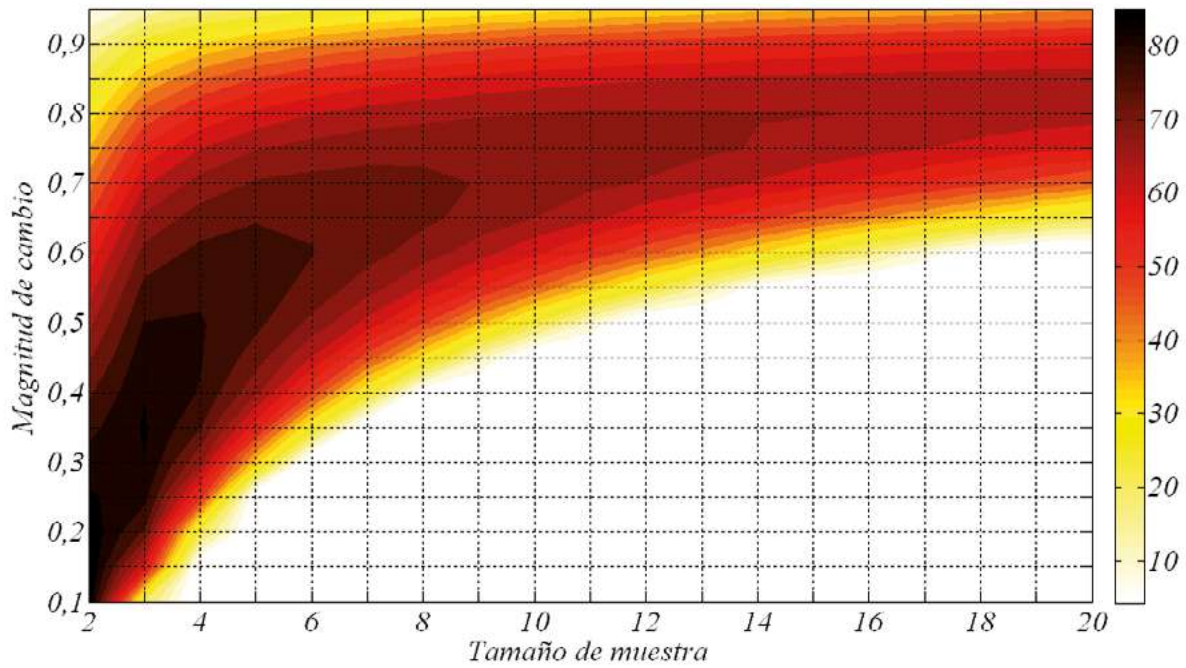
Tabla 5.13 Comparación de ARL entre gráfico S y $S-RL_2-L$ (continuación)

n	5		10		15		20	
δ'_d	S	$S-RL_2-L$	S	$S-RL_2-L$	S	$S-RL_2-L$	S	$S-RL_2-L$
0.1	1.06	2.00	1.00	2.00	1.00	2.00	1.00	2.00
0.3	10.92	2.10	1.21	2.00	1.00	2.00	1.00	2.00
0.5	68.38	6.11	7.52	2.29	2.46	2.04	1.44	2.00
0.7	247.74	44.54	65.05	9.16	25.67	4.55	12.93	3.23
0.8	416.60	129.00	173.94	34.41	90.78	16.03	54.25	9.68
0.9	660.76	365.90	431.79	170.80	309.93	100.90	235.57	67.45

Fuente: el autor

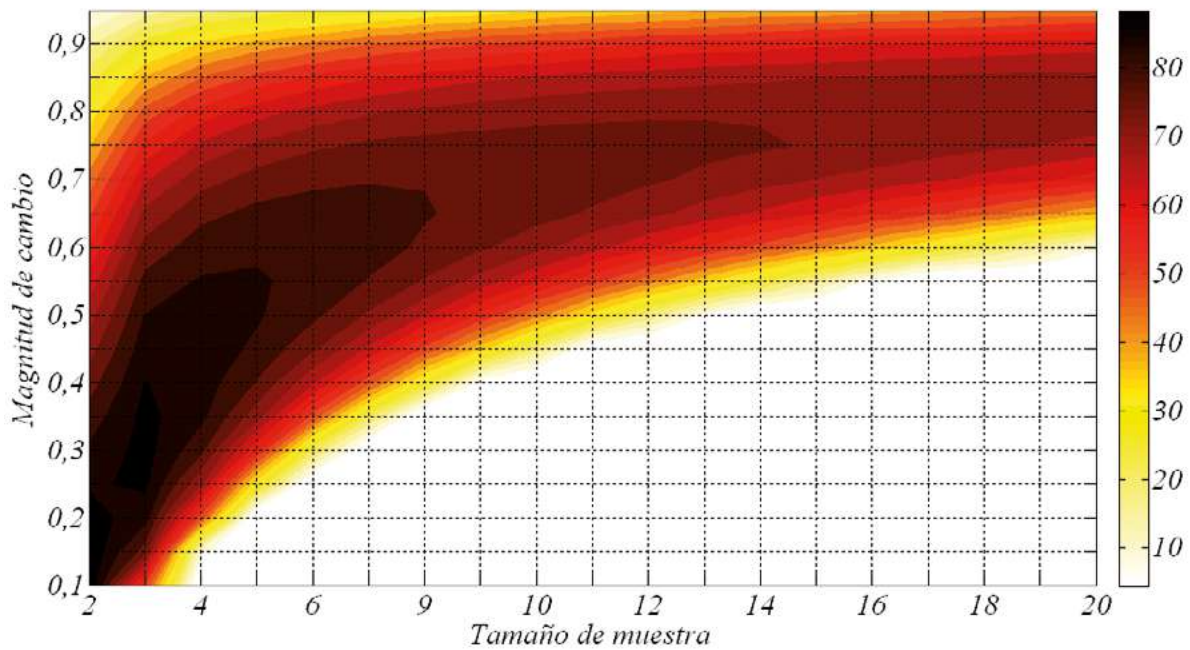
En las figuras 5.15 a 5.18 se presentan los porcentajes de mejora del gráfico $S-RL_2-L$ frente al gráfico S cuando se controlan decrementos en la desviación del proceso mediante curvas de nivel. La interpretación de estas figuras es igual que para el gráfico $\bar{X}-RL_2$. En este caso se asume como un valor de decremento pequeño cuando este es cercano a uno, ya que uno es el valor cuando la varianza del proceso no presenta cambios. Para todos los casos estudiados, el gráfico $S-RL_2-L$ presenta mejoras muy significativas frente al gráfico S , alcanzando valores superiores al 80 % para tamaño de muestra pequeño pero magnitud de cambio grande, es decir magnitud de cambio alejada de 1. Concretamente, el gráfico $S-RL_2-L$ presenta gran desempeño cuando los valores de tamaño de muestra están entre 2 y 4, y de decrementos en la desviación entre 0.1 y 0.5. Sin embargo, existen mejoras significativas para valores pequeños en el decremento de la desviación, es decir entre 0.5 y 0.9, pero para tamaños de muestra superiores a 8. En la medida que se asume un ARL bajo control mayor, la eficacia del gráfico de control $S-RL_2-L$ frente al gráfico S aumenta. Para valores de tamaño de muestra grandes y decrementos grandes en la desviación el gráfico $S-RL_2-L$ no presenta mejora frente al gráfico S .

Figura 5.15 Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 200$

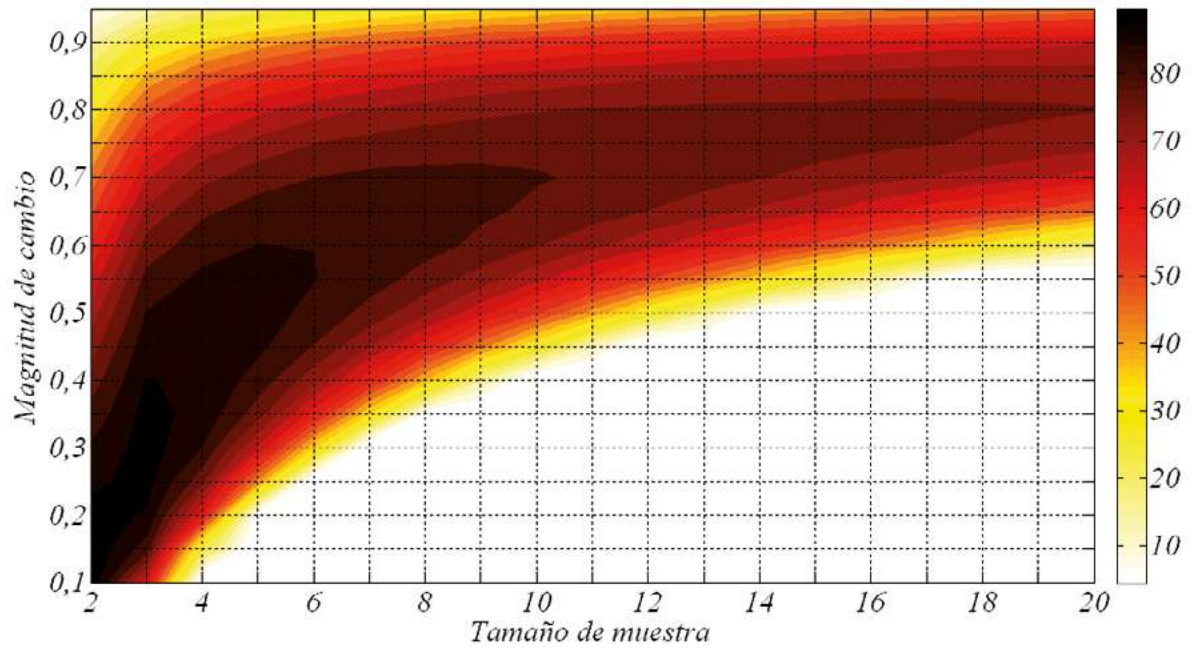


Fuente: el autor

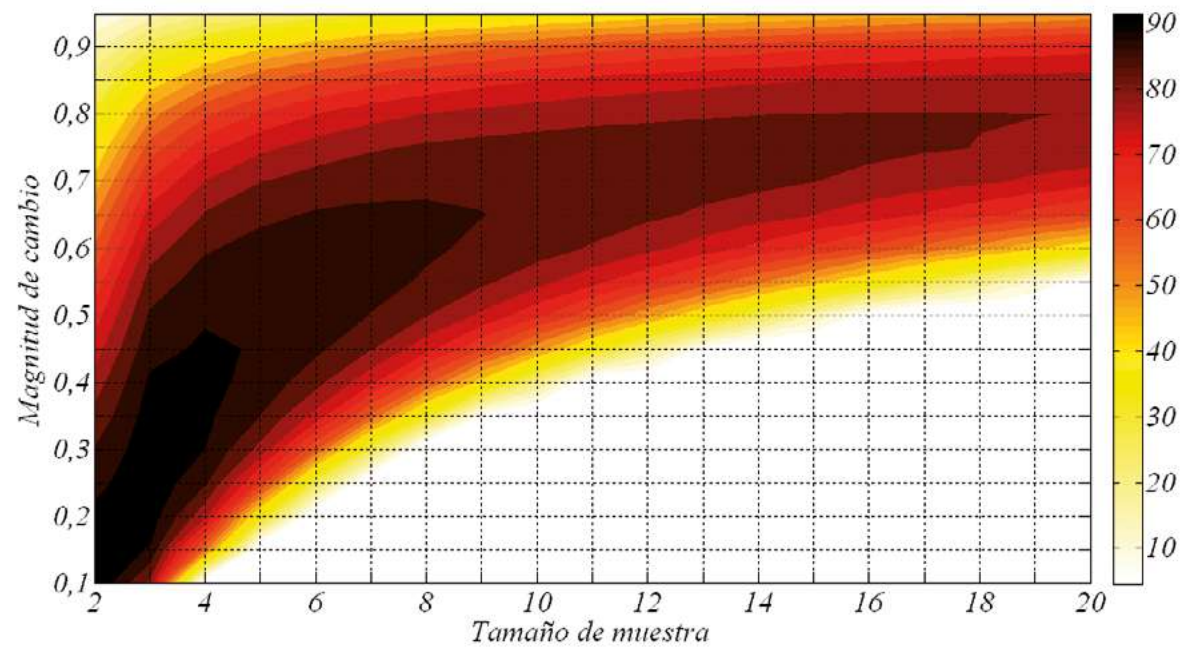
Figura 5.16 Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 370$



Fuente: el autor

Figura 5.17 Porcentaje de mejora caso $ARL(1)=500$ 

Fuente: el autor

Figura 5.18 Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 1000$ 

Fuente: el autor

5.3.6.2 Gráfico $S-RL_2-L$ frente al gráfico sintético para decrementos en la desviación

El desempeño del gráfico $S-RL_2-L$ es comparado con el del gráfico sintético para decrementos en la desviación propuesto por Huang y Chen (2005) que se describió anteriormente.

Los parámetros de comparación utilizados son:

- Escenario *zero-state*
- Óptimos para un valor δ'_d dado
- ARL bajo control 200, 370, 500, 1000
- Tamaño de muestra $n = 1, 2, \dots, 20$
- Magnitud de cambio de diseño $\delta'_d = 0.1, 0.15, \dots, 0.95$ para decrementos de σ

Tabla 5.14 Comparación de ARL entre los gráficos sintético para decrementos en la desviación y gráfico $S-RL_2-L$

n	δ'_d	200		370		δ'	n
		SynthS	$S-RL_2-L$	SynthS	$S-RL_2-L$		
5	0.9	96.63	82.15	175.06	144.60	0.9	5
	0.8	44.45	33.69	78.23	55.59	0.8	
	0.5	3.60	3.42	5.25	4.15	0.5	
	0.3	1.10	2.02	1.20	2.04	0.3	
10	0.9	54.16	45.13	93.86	74.50	0.9	10
	0.8	15.44	12.60	24.54	18.19	0.8	
	0.5	1.20	2.10	1.31	2.16	0.5	
	0.3	1.00	2.00	1.00	2.00	0.3	
15	0.9	36.02	30.26	60.13	47.53	0.9	15
	0.8	8.07	7.29	11.88	9.73	0.8	
	0.5	1.02	2.01	1.04	2.01	0.5	
	0.3	1.00	2.00	1.00	2.00	0.3	
20	0.9	26.21	22.37	41.41	33.79	0.9	20
	0.8	5.17	5.18	7.17	6.52	0.8	
	0.5	1.00	2.00	1.01	2.00	0.5	
	0.3	1.00	2.00	1.00	2.00	0.3	

Continúa

Tabla 5.14 Comparación de ARL entre los gráficos sintético para decrementos en la desviación y gráfico $S-RL_2-L$

n	δ'_d	500		1000		δ'	n
		SynthS	$S-RL_2-L$	SynthS	$S-RL_2-L$		
5	0.9	234.48	191.50	460.92	365.90	0.9	5
	0.8	103.51	71.42	198.55	129.00	0.8	
	0.5	6.40	4.62	10.33	6.11	0.5	
	0.3	1.28	2.05	1.50	2.10	0.3	
10	0.9	123.19	95.57	231.76	170.80	0.9	10
	0.8	30.98	22.01	53.64	34.41	0.8	
	0.5	1.39	2.19	1.61	2.29	0.5	
	0.3	1.00	2.00	1.00	2.00	0.3	
15	0.9	77.54	59.54	140.27	100.90	0.9	15
	0.8	14.45	11.31	23.00	16.03	0.8	
	0.5	1.05	2.01	1.09	2.04	0.5	
	0.3	1.00	2.00	1.00	2.00	0.3	
20	0.9	53.87	41.54	94.24	67.45	0.9	20
	0.8	8.46	7.30	12.61	9.68	0.8	
	0.5	1.01	2.00	1.01	2.00	0.5	
	0.3	1.00	2.00	1.00	2.00	0.3	

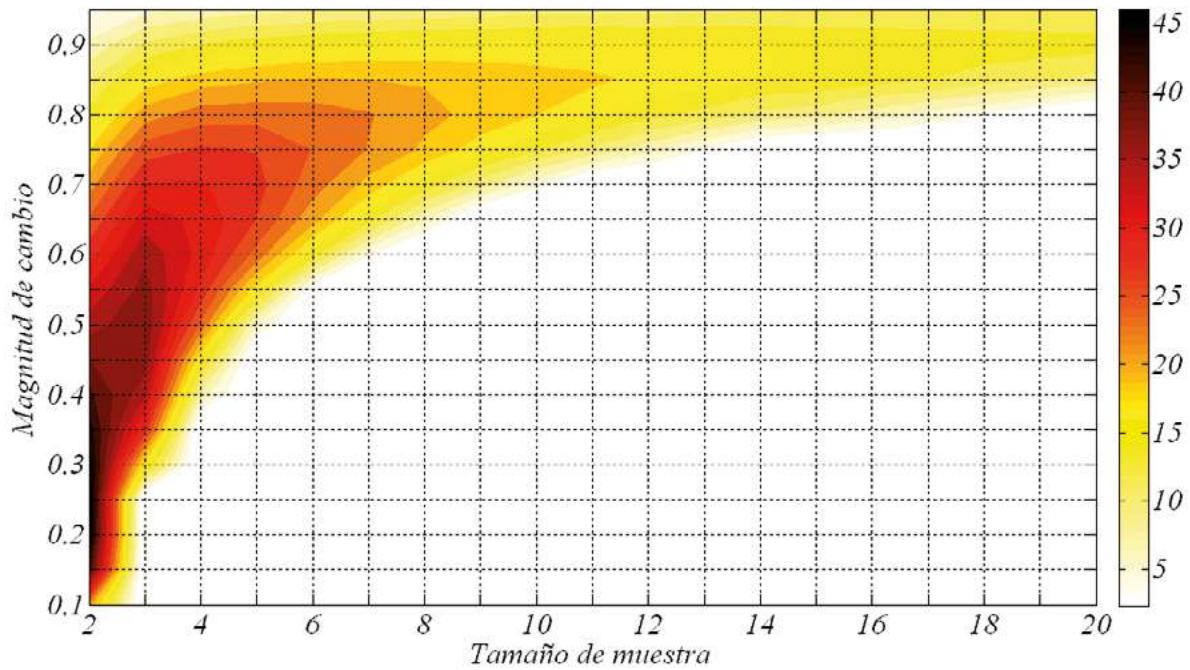
Fuente: el autor

De las figuras 5.19 a 5.22 es posible observar que el gráfico $S-RL_2-L$ presenta considerables mejoras frente al gráfico sintético para decrementos en la desviación. Los mayores porcentajes de mejoras se encuentran en valores de tamaño de muestra pequeños, pero en valores de magnitud de cambio en δ'_d alejados del valor bajo control, que en este caso es 1. Para la mayoría de valores de tamaño de muestra pequeños, menor que 4, el gráfico $S-RL_2$ es superior al gráfico sintético para la desviación.

Se observa también que para magnitudes de cambio cercanas a 1, el gráfico de control $S-RL_2-L$ es superior al sintético para todo los valores de tamaño de muestra y valores de ARL bajo control estudiados, aunque es notorio que en esta región no se encuentran los mayores porcentajes de mejora.

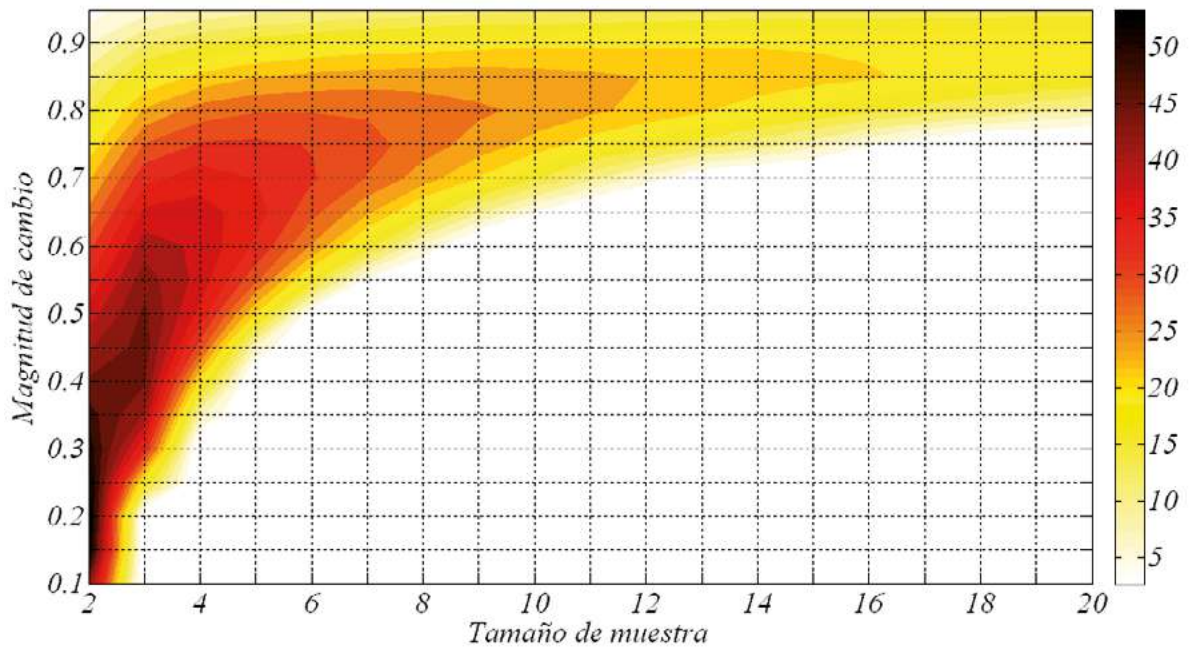
Los valores de porcentaje de mejora aumentan en la medida que el parámetro de ARL bajo control se incrementa. Se observa que dichos valores para este caso están entre el 45 y 60 %.

Figura 5.19 Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 200$

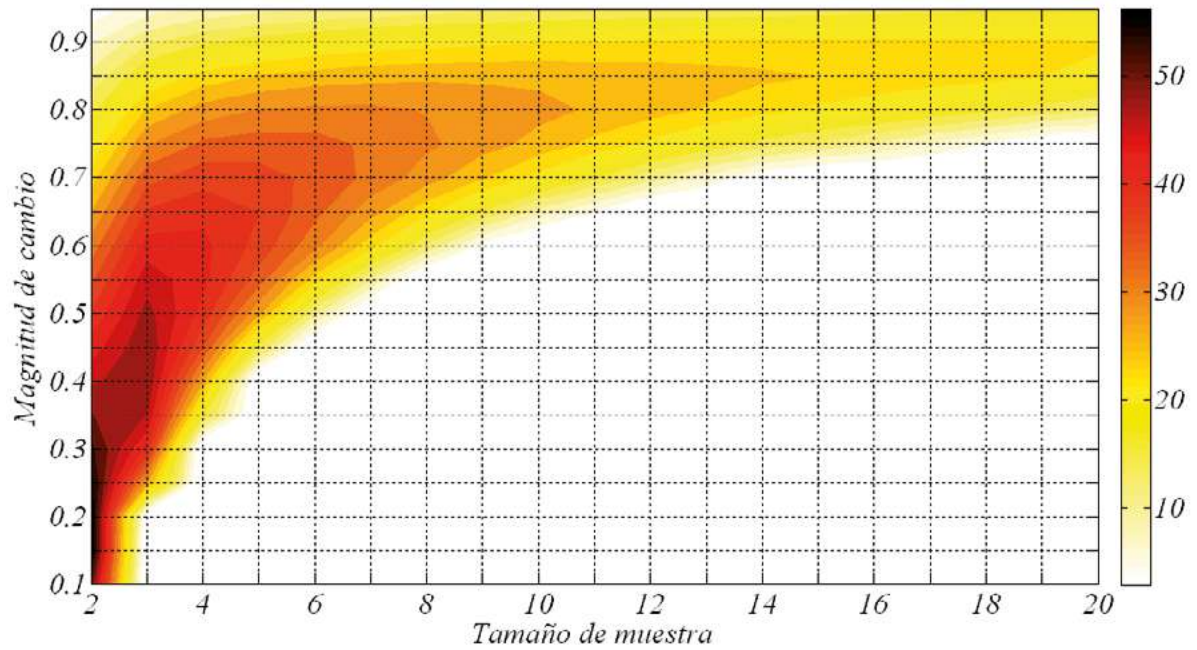


Fuente: el autor

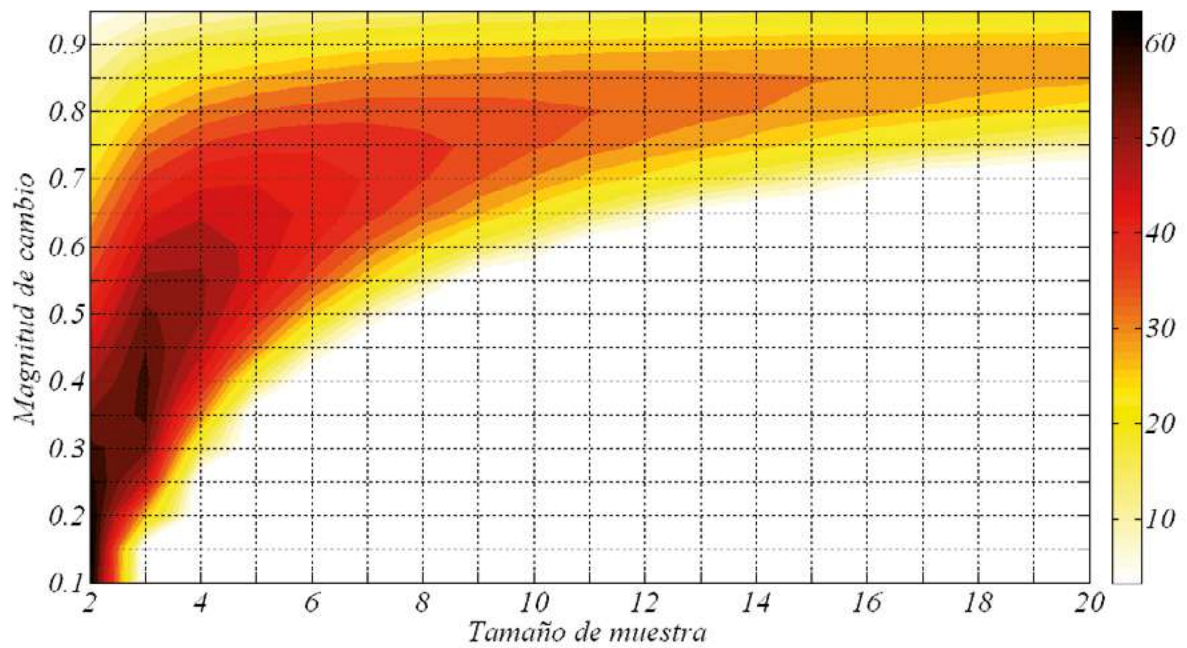
Figura 5.20 Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 370$



Fuente: el autor

Figura 5.21 Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 500$ 

Fuente: el autor

Figura 5.22 Porcentaje de mejora caso $ARL(1) = 1000$ 

Fuente: el autor

5.3.6.3 Gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}L$ frente al gráfico $Cusum\ S$ y $EWMA\ S$ para detectar decrementos en la desviación

Huang y Chen (2005) presentan el desempeño de varios gráficos de control para decrementos en la desviación los cuales se observan en la tabla 5.15. Los parámetros para dichos valores fueron seleccionados para optimizar un decremento de 0.8 en la desviación. El tamaño de muestra para los valores de ARL obtenidos es de 5 y el ARL bajo control de 200.

Para decrementos pequeños en la desviación, el gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}L$ no es competidor frente a los tres tipos gráficos $Cusum$ presentados ni para el gráfico $EWMA\ S^2$. Para decrementos de tamaño moderado, en este caso 0.6 y 0.5, el gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}L$ presenta una leve ventaja frente a los otros gráficos estudiados.

Tabla 5.15 Comparación ARL, $Cusum$, $EWMA$ y $S\text{-}RL_2\text{-}L$ ARL(1) $\cong$ 200

	$Cusum\ ln\ S_2$	$Cusum\ S$	$CP\ Cusum$	$EWMA\ ln\ S_2$	$Synth\ S$	$S\text{-}RL_2\text{-}L$
	k			λ	K	
	0.43	2.093	0.846	0.1	0.386	0.501
h	5.49	4.32	1.7	0.69	LS 5	4
δ'_d						
1	199.82	199.71	199.55	199.58	200	200
0.9	47.08	44.61	43.03	45.08	96.63	82.14
0.8	18.99	16.92	16.62	17.18	44.45	33.69
0.7	10.75	9.65	9.75	9.13	19.58	14.24
0.6	7.13	6.68	7.07	5.87	8.43	6.56
0.5	5.17	5.11	5.7	4.11	3.74	3.57

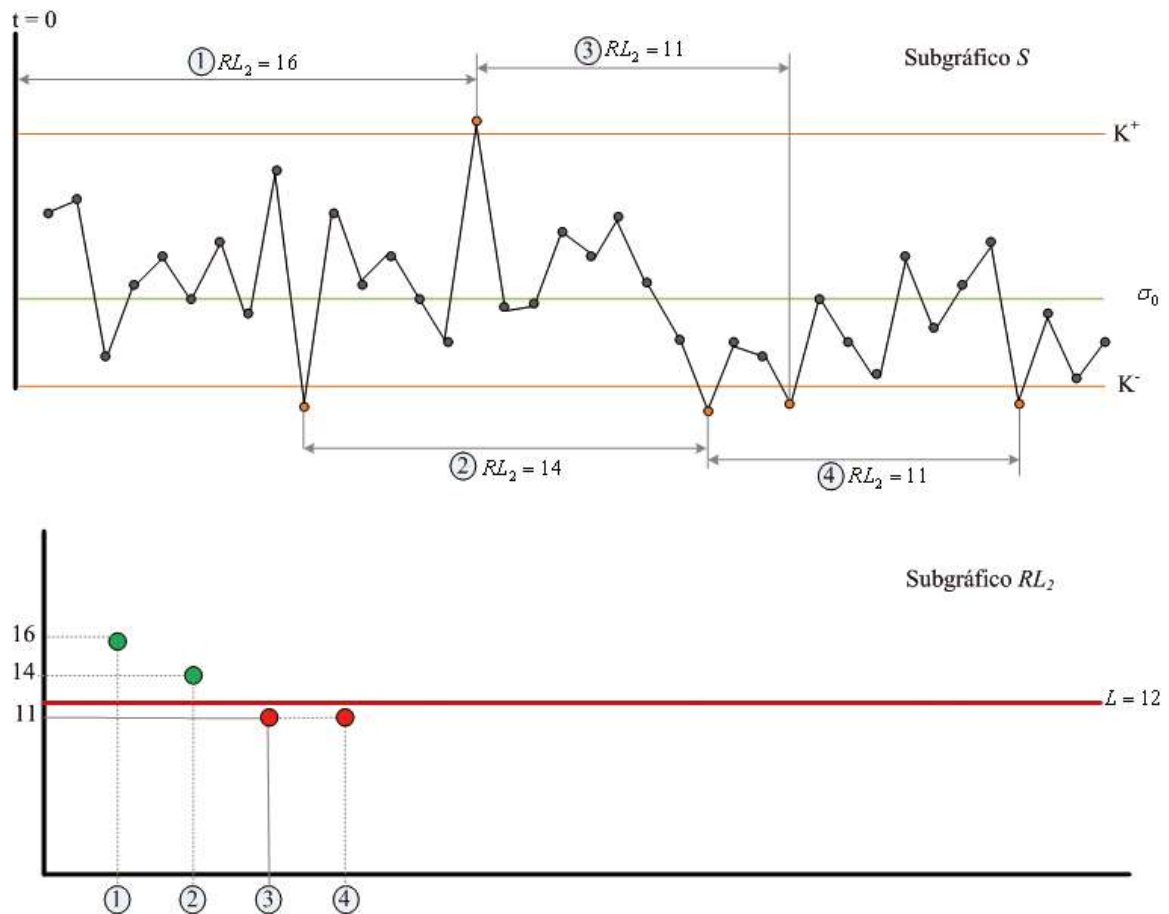
Fuente: el autor

5.4 Diseño bilateral: gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}C$

Con el objetivo de detectar en solo un gráfico tanto incrementos como decrementos en la desviación de un proceso se desarrolla el denominado gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}C$ (bilateral). Así, cuando inicia el control del proceso productivo se contabiliza el número de muestras para el subgráfico S de Shewhart bilateral hasta que se detecte la segunda muestra no conforme, es decir, hasta que el estadístico S supere el límite K^+ o K^- por segunda vez, así, el primer estadístico

se obtiene y plasma en el subgráfico RL_2 . Para la obtención de un segundo estadístico se inicia el conteo de muestras en el subgráfico S desde la primera muestra no conforme obtenida hasta la tercera, de igual manera es llevado el valor al gráfico RL_2 . Sucesivamente se obtienen los valores de los estadísticos para el subgráfico RL_2 . En el momento en el que el valor de un estadístico del subgráfico RL_2 es menor que el límite de control LS se considera que existe una salida de control en el proceso. En la figura 5.23 se ejemplifica el modo de operar del gráfico de control S - RL_2 - C .

Figura 5.23 Esquematización del gráfico de control S - RL_2 - C

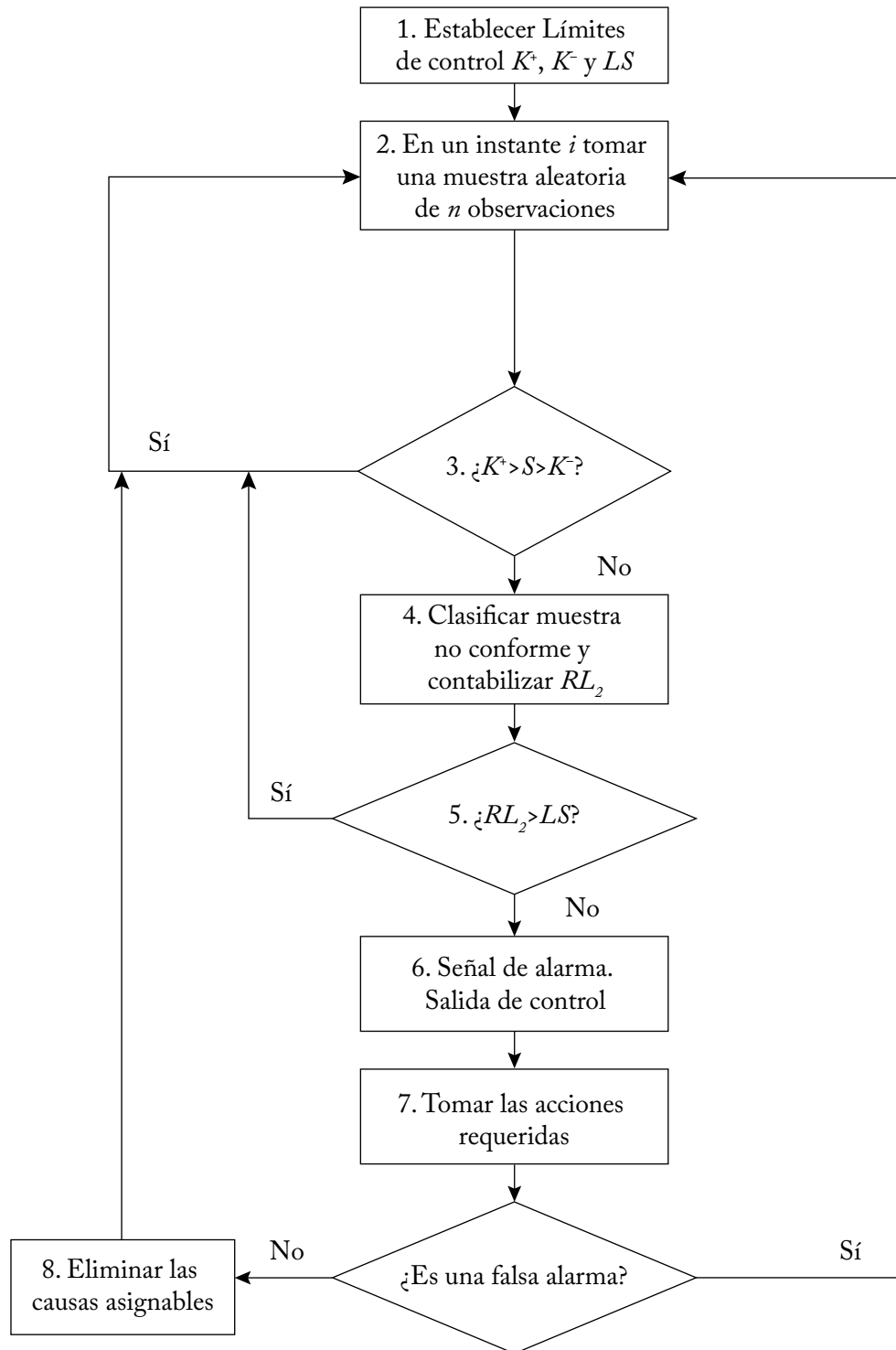


Fuente: el autor

5.4.1 Dinámica

El modo de operar del gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}C$ se describe a continuación:

1. Establecer los límites de control K^+ y K^- para el subgráfico S de Shewhart y el límite inferior LS del subgráfico de control RL_2 .
 2. En un instante i tomar una muestra aleatoria de n observaciones y calcular la desviación S .
 3. Si el estadístico S cumple la condición $S < K^+$ o $S < K^-$ en el subgráfico de control S de Shewhart, entonces se afirma que la muestra es conforme y se vuelve al paso 2. De lo contrario la muestra es denominada no conforme y se prosigue con el paso 4.
 4. Contabilizar el número de muestras en el gráfico S entre las dos más recientes muestras no conformes. Este número es contabilizado como una muestra para el subgráfico RL_2 .
 5. Si la muestra es mayor que el límite de control LS especificado para el subgráfico RL_2 entonces se afirma que el proceso se encuentra bajo control y se debe volver al paso 2. En caso contrario se asume que el proceso se encuentra fuera de control y se continúa con el paso 6.
 6. Se genera una señal de fuera de control.
 7. Tomar las acciones requeridas para encontrar y eliminar las causas asignables de la salida de control y así volver al paso 2.
-

Figura 5.24 Dinámica del gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}C$ 

Fuente: el autor

5.4.2 Obtención del ARL

Teniendo en cuenta la expresión 3.33 donde se calcula el ANI de un gráfico RL_2 , es posible calcular el ARL para el gráfico $S-RL_2-C$ reemplazando el primer elemento de dicha expresión por la ecuación 3.17, así:

$$ARL_{S-RL_2-C} = \frac{1}{1 - F\left((n-1)\left(\frac{K^+}{\delta'}\right)^2\right) + F\left((n-1)\left(\frac{K^-}{\delta'}\right)^2\right)} \times [E(NTNS_sC)] \quad (5.16)$$

Para la obtención del segundo elemento de la expresión 5.16 como en los dos casos anteriores se considera el parámetro TNS_sC como una racha de muestras conformes en el subgráfico S hasta una no conforme; el valor esperado de TNS_sC denominado $E(NTNS_sC)$ en la expresión 5.16 es calculado mediante un procedimiento basado en cadenas de Markov que se describe a continuación:

En el gráfico $S-RL_2-C$ una señal ocurre cuando la suma de las dos más recientes longitudes de racha $S_{i-1} + S_i$ del subgráfico S es menor que el límite de control inferior LS del subgráfico RL_2 , es decir, cuando se presenta un cambio en la desviación del proceso. Los estados transitorios de la cadena de Markov estarán determinados por la longitud de racha del TNS_sC más reciente. El estado absorbente corresponderá a la ocurrencia de una señal de salida de control. La matriz de transición **RsC** de la cadena de Markov en un gráfico de control $S-RL_2-C$ se representa así:

$$\mathbf{RsC} = \begin{matrix} & & \begin{matrix} Estado & actual \end{matrix} \\ & & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \dots & (LS-2) & (LS-1) & (\geq LS) \end{matrix} \\ & & \begin{matrix} - & - & - & - & - & - & - \end{matrix} \\ \begin{matrix} Estado \\ previo \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ (LS-2) \\ (LS-1) \\ (\geq LS) \end{matrix} & \begin{matrix} \langle \\ \langle \\ \langle \\ \langle \\ \vdots \\ \langle \\ \langle \\ \langle \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-G(LS-1) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(LS-1) & 1-G(LS-1) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(LS-2) & f(LS-1) & 1-G(LS-1) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(LS-2) & f(LS-1) & 1-G(LS-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & f(2) & \dots & f(LS-2) & f(LS-1) & 1-G(LS-1) \\ 0 & f(1) & f(2) & \dots & f(LS-2) & f(LS-1) & 1-G(LS-1) \\ f(0) & f(1) & f(2) & \dots & f(LS-2) & f(LS-1) & 1-G(LS-1) \end{matrix} \end{matrix} \quad (5.17)$$

Donde

$$f(r) = \Pr(X_i = r) = \left[(1 - (P_2))^r * (P_2) \right] \text{ para } r = 0, 1, 2, \dots, (LS-1)$$

$$G(L-1) = \sum_{r=0}^{L-1} f(r)$$

$$\text{Siendo } P_2 = 1 - F\left((n-1)\left(\frac{K^+}{\delta'}\right)^2\right) + F\left((n-1)\left(\frac{K^-}{\delta'}\right)^2\right)$$

Las condiciones de la cadena de Markov para el gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}C$ son análogas a las del gráfico $\bar{X}\text{-}RL_2$. Por tanto, de la ecuación 3.21 para el caso del gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}C$ se obtiene el vector $\mathbf{E}(\text{NTNSs}C)$ dado por

$$\mathbf{E}(\text{NTNSs}C) = (\mathbf{I} - \mathbf{RsC})^{-1} \cdot \mathbf{1} \quad (5.18)$$

Donde $\mathbf{1}$ es un vector columna de unos, $\mathbf{I}$ es una matriz identidad de tamaño $(LS+1) \times (LS+1)$ y $\mathbf{E}(\text{NTNSs}C)$ es el vector que contiene el valor $\mathbf{E}(\text{NTNSs}C)$ de cada

uno de los estados transitorios i no absorbentes. Así, para obtener el valor $E(\text{NTNSs}C)$ de un determinado estado transitorio inicial i de la ecuación 3.22 se calcula

$$E(\text{NTNSs}C) = \mathbf{S}'(\mathbf{I} - \mathbf{R}\mathbf{s}C)^{-1} \cdot \mathbf{1} \quad (5.19)$$

Al obtener el valor $E(\text{NTNSs}C)$ para calcular el ARL del gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}C$ se debe considerar que el estado inicial debe ser mayor o igual a LS . Así, el vector $\mathbf{S}'$ de tamaño $(LS + 1)$ tendrá la forma $\mathbf{S}' = \langle 0, 0, 0 \dots 0, 1 \rangle$ con lo que el estado transitorio inicial estará en la última posición del vector.

Las posibles transiciones de la cadena de Markov del gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}C$ son equivalentes a las del gráfico $\bar{X}\text{-}RL_2$.

5.4.3 Obtención límites del gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}C$ para un ARL bajo control

Para la obtención de los límites del gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}C$ para un ARL bajo control determinado se establece un procedimiento distinto al de los gráficos anteriormente presentados. En primer lugar, se debe obtener un valor aquí denominado P' , resolviendo numéricamente la expresión

$$ARL(\delta' = 1)_{S\text{-}RL_2\text{-}C} = \frac{1}{P'} \times [E_{P'}(\text{NTNSs}C)] \quad (5.20)$$

P' es la probabilidad de falsa alarma requerida en el gráfico S para lograr un ARL conjunto deseado. Los elementos $f(r)$ al interior de la matriz de transición de la cadena de Markov necesaria para obtener valor de $E_{P'}(\text{NTNSs}C)$ vienen dados por

$$f(r) = \Pr(X_i = r) = \left[\left(1 - (P')^r * (P') \right) \right] \text{ para } r = 0, 1, 2, \dots, (LS - 1)$$

Con el valor de la probabilidad de P' es posible establecer los valores de los límites de control superior K^+ e inferior K^- para el gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}C$. Así, para encontrar el valor de K^+ se debe resolver numéricamente la expresión

$$\frac{1}{1 - F\left((n-1)(K^+)^2\right)} = \frac{1}{\left(\frac{P'}{2}\right)} \quad (5.21)$$

Para obtener el valor de se resuelve numéricamente la expresión

$$\frac{1}{F\left((n-1)(K^-)^2\right)} = \frac{1}{\left(\frac{P'}{2}\right)} \quad (5.22)$$

$F(\circ)$ denota la función de distribución acumulada de una distribución *chi* cuadrado con $n-1$ grados de libertad.

Al resolver las expresiones 5.20, 5.21 y 5.22 es posible obtener para el mismo valor de ARL bajo control, diferentes valores de K^- , K^+ y distintos valores de LS establecidos. Cabe recordar que el valor LS otorga el tamaño a la matriz **R**sC pues es $(LS+1) \times (LS+1)$.

Ejemplificando, si se asume un $ARL(\delta' = 1)$ bajo control de 370 y un tamaño de muestra $n = 15$ se obtienen los valores de la tabla 5.16.

Tabla 5.16 Valores de límites de control

LS	K^+	K^-
2	1.297	0.688
3	1.317	0.672
4	1.332	0.660
5	1.344	0.651
7	1.361	0.638
10	1.379	0.624
14	1.395	0.612
15	1.399	0.609

Fuente: el autor

5.4.4 Cálculo del ARL fuera de control

Como ya se ha mencionado, en caso de la existencia de un cambio en el proceso es posible establecer un ARL fuera de control, o $ARL(\delta' \neq 1)$; así, se considera que el valor de la desviación σ_0 pasa a ser $\delta'\sigma_0$. Estableciendo un valor de cambio de diseño δ'_d para el gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}C$ y con los valores de límites de control K^+ , K^- obtenidos y para un límite LS y un ARL bajo control determinados se calcula el ARL fuera de control mediante

$$ARL(\delta'_d)_{S\text{-}RL_2\text{-}C} = \frac{1}{P_2} \times [E_\delta(NTNSsC)] \quad (5.23)$$

Para el cálculo de los valores de $E_\delta(NTNSsC)$ se utiliza la expresión 5.16 donde se asume que el valor $\delta' = \delta'_d$.

Los parámetros necesarios para calcular el ARL fuera de control son (asumiendo una distribución normal de los datos del proceso con $\mu_0 = 0$ y $\sigma_0 = 1$) el tamaño de la muestra n , la magnitud del cambio δ'_d y los límites K^+ , K^- y LS de los subgráficos que permitan el ARL bajo control deseado. Se supone entonces:

- $n = 15$
- $\delta'_d = 1.2$
- Según la tabla 5.16 si $LS = 14$ entonces $K^+ = 1.395$ y $K^- = 0.612$ para un ARL bajo control de 370

Mediante el uso del programa Mathcad se resuelve la expresión 5.23 para los parámetros mencionados y se obtiene un valor de ARL fuera de control de 14.380.

Algunos valores de $ARL(\delta_d)$ en el gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}C$ para un ARL bajo control de 370 y magnitudes de cambio $\delta_d = 0.7$ y 1.2 se presentan en la tabla 5.17.

Tabla 5.17 Valores de ARL fuera de control caso ARL bajo control 370, $n=15$

Límites			Magnitud de Cambio δ_d	
LS	K^+	K^-	0.7	1.2
2	1.297	0.688	6.336	22.013
3	1.317	0.672	6.031	19.064
4	1.332	0.660	5.957	17.442
5	1.344	0.651	5.981	16.434
6	1.353	0.644	6.056	15.765
7	1.361	0.638	6.158	15.304
8	1.368	0.633	6.276	14.981
9	1.373	0.628	6.404	14.754
10	1.379	0.624	6.537	14.596
11	1.383	0.621	6.672	14.490
12	1.388	0.618	6.809	14.425
13	1.392	0.615	6.946	14.390
14	1.395	0.612	7.082	14.380
15	1.399	0.609	7.216	14.391

Fuente: el autor

5.4.5 Optimización

El procedimiento de optimización para el gráfico $S-RL_2-C$ se presenta a continuación:

1. Especificar δ_d' , n y ARL bajo control.
2. Inicializar con el límite inferior para el subgráfico RL_2 en 2, $LS = 2$.
3. Obtener los valores de K^+ y K^- resolviendo numéricamente las ecuaciones 5.20, 5.21 y 5.22.
4. Calcular el valor de ARL_{S-RL_2-C} con el valor actual de K^+ , K^- y LS utilizando la ecuación 5.23.
5. Si el valor de ARL_{S-RL_2-C} disminuye se incrementa el valor de LS en una unidad y volver al paso 3. Si el valor de ARL_{S-RL_2-C} se incrementa, se detiene el procedimiento de búsqueda y se resta una unidad al valor de LS con el que el ARL_{S-RL_2-C} aumentó y se continúa con el paso 6.

6. Los valores de K^+ , K^- y LS actuales son establecidos como parámetros de diseño del gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}C$.
7. Se concluye el proceso de búsqueda para el diseño óptimo para el gráfico de control $S\text{-}RL_2\text{-}C$.

En la tabla 5.17 se resaltan los valores óptimos para cada magnitud de cambio presentada. En la tabla 5.18 se presentan algunos valores óptimos de ARL para diferentes magnitudes de cambio, tamaños de muestra y ARL bajo control de 370.

5.4.6 Diseño del gráfico de control $S\text{-}Synth\text{-}C$

En la literatura revisada no se encontró un gráfico para el control de la desviación típica que pueda considerarse equivalente al gráfico sintético para la media, en el sentido de que controle simultáneamente cambios de la desviación típica en cualquier sentido. Se propone aquí un gráfico, al que denominamos $S\text{-}Synth\text{-}C$, que realiza esa función. Tras caracterizarlo, será posteriormente comparado tanto con el gráfico S de Shewhart como con el gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}C$.

Como se mencionó en la sección 3.5.2, un gráfico sintético para la desviación consiste en la combinación de un gráfico S de Shewhart y un gráfico CRL . En el trabajo desarrollado por Huang y Cheng (2005) solo se presenta el desarrollo del gráfico sintético para incrementos o para decrementos en la desviación pero de manera independiente. En este libro se presentan las expresiones correspondientes para la obtención de límites de control, valores de ARL para el gráfico de control $S\text{-}Synth\text{-}C$.

En la expresión 5.17 se definió un valor de probabilidad

$$P_2 = 1 - F\left((n-1)\left(\frac{K^+}{\delta'}\right)^2\right) + F\left((n-1)\left(\frac{K^-}{\delta'}\right)^2\right)$$

Tabla 5.18 Valores óptimos de $ARL(\delta'_d)$ para el gráfico $S-RL_2-C$ $ARL(1) = 370$

		n			
		5	10	15	20
δ'_d					
0.5	LS	3	2	2	2
	K^+	1.573	1.366	1.297	1.256
	K^-	0.402	0.612	0.688	0.733
	ARL	9.53	2.42	2.04	2.005
0.7	LS	8	6	4	2
	K^+	1.672	1.474	1.332	1.256
	K^-	0.346	0.559	0.660	0.732
	ARL	89.13	13.96	5.95	3.89
0.9	LS	2	39	32	27
	K^+	1.531	1.551	1.434	1.366
	K^-	0.462	0.482	0.583	0.645
	ARL	467.36	2274.83	167.09	111.49
1.05	LS	68	63	59	55
	K^+	1.868	1.577	1.46	1.392
	K^-	0.252	0.465	0.565	0.625
	ARL	216.83	187.09	164.68	146.47
1.1	LS	54	42	35	30
	K^+	1.849	1.555	1.438	1.37
	K^-	0.26	0.479	0.581	0.642
	ARL	119.3	82.11	61.22	47.88
1.2	LS	31	19	14	11
	K^+	1.801	1.509	1.395	1.32
	K^-	0.282	0.509	0.612	0.673
	ARL	41.89	21.99	14.38	10.52

Fuente: el autor

Por tanto, análogamente a las expresiones 3.35 y 3.36 se obtiene el ARL de un gráfico *S-Synth-C* así

$$ARL_{S-Synth-C} = \frac{1}{P_2} \times \frac{1}{1 - (1 - P_2)^{LS-1}} \quad (5.24)$$

Como se ha mencionado, los valores de los límites de control están supeditados al valor de ARL bajo control establecido para el proceso. Así, se debe obtener un valor de probabilidad que denominamos P' y resolvemos numéricamente la expresión

$$ARL(\delta' = 1)_{S-Synth-C} = \frac{1}{P'} \times \frac{1}{1 - (1 - P')^{LS-1}} \quad (5.25)$$

Con el valor de la probabilidad de P' es posible establecer los valores de los límites de control superior K^+ e inferior K^- para el gráfico *S-Synth-C*. Así, para encontrar el valor de K^+ se debe resolver numéricamente la expresión 5.21 y para obtener el valor de K^- la expresión 5.22.

5.4.7 Desempeño

Ya establecidas las expresiones para la obtención del ARL y para el gráfico de control *S-RL₂-C* y *S-Synth-C* se procede a su comparación con el gráfico *S* de Shewhart, teniendo en cuenta los siguientes parámetros:

- Escenario *zero-state*
- Óptimos para un valor δ_a' dado
- ARL bajo control 370
- Tamaño de muestra $n = 5, 10, 15, 20$
- Magnitud de cambio de diseño $\delta_a' = 0.5, 0.7, 0.9, 1.05, 1.1, 1.2$

En la tabla 5.19 se presentan los valores de ARL para los tres gráficos comparados. Se observa que el gráfico de control *S-RL₂-C* tiene un mejor desempeño frente al gráfico sintético

conjunto para la desviación S - $Synth$ - C solo cuando se presentan decrementos en la desviación. El gráfico S - RL_2 - C siempre es más potente que el clásico gráfico S de Shewhart salvo en casos donde los valores de magnitud de cambio están alejados de 1 y tamaño de muestra elevados, como por ejemplo $\delta'_d = 0.5$ y $n = 20$. El gráfico S - $Synth$ - C es la mejor opción para detectar incrementos en la desviación frente a los otros dos gráficos para los tamaños de muestra y los cambios estudiados.

Tabla 5.19 Comparación de valores de ARL óptimos, ARL bajo control 370

		n			
		5	10	15	20
δ'_d					
0.5	S	51.35	6.144	2.175	1.346
	S - $Synth$ - C	13.59	1.77	1.11	1.01
	S - RL_2 - C	9.53	2.42	2.04	2.005
0.7	S	184.26	49.9	20.35	10.56
	S - $Synth$ - C	109.89	16.88	6.08	3.28
	S - RL_2 - C	89.13	13.96	5.95	3.89
0.9	S	445.29	310.98	229.26	176.89
	S - $Synth$ - C	459.04	280.99	175.72	119.18
	S - RL_2 - C	467.36	274.83	167.09	111.49
1.05	S	253.29	227.5	207.42	190.54
	S - $Synth$ - C	214.89	184.83	162.4	144.26
	S - RL_2 - C	216.83	187.09	164.68	146.47
1.1	S	159.42	119.76	95.34	78.5
	S - $Synth$ - C	115.06	78.48	58.13	45.19
	S - RL_2 - C	119.3	82.11	61.22	47.88
1.2	S	64.41	36.85	24.84	18.21
	S - $Synth$ - C	37.5	19.11	12.15	8.64
	S - RL_2 - C	41.89	21.99	14.38	10.52

Fuente: el autor

Una particularidad de los tres gráficos aquí presentados es valor de ARL cuando se presenta decrementos pequeños en la desviación y los tamaños de muestra son pequeños; se observa que cuando $n = 5$ y $\delta'_d = 0.9$ el valor de ARL para dicho descentrado es mayor que el ARL bajo control.

Es importante destacar que el desempeño de los gráficos para controlar la desviación típica de manera conjunta (incrementos o decrementos) es menor que el de los gráficos diseñados para el control de la desviación típica de manera independiente.

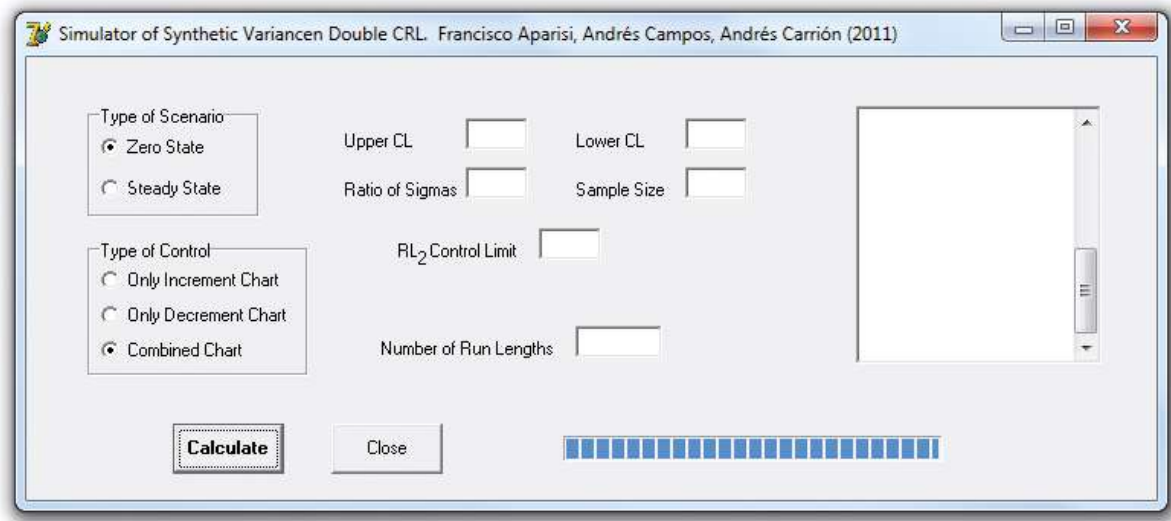
5.5 Comprobación de parámetros y valores de ARL

Con el objetivo de corroborar la veracidad del procedimiento desarrollado en los apartados anteriores para obtener el ARL óptimo del nuevo gráfico de control $S-RL_2$ en sus tres variantes estudiadas mediante el método analítico se desarrolló un programa informático en Delphi 7 para Windows® que mediante simulación calcula el desempeño del gráfico de dichos gráficos. La figura 5.25 presenta la interfaz del programa de simulación del gráfico $S-RL_2$. Dicha interfaz contiene las opciones para los tres tipos de gráficos estudiados. Los datos de entrada para simular el desempeño del gráfico son los límites de control del subgráfico S, K^+ (Upper limit CL) o K^- (Lower limit CL) el límite LS del subgráfico RL_2 , el cambio de diseño en la desviación (*Ratio of Sigmas*), el tamaño de muestra (*Sample Size*) y el número de rachas a simular (*Number of Run Lengths*).

Con el programa desarrollado se obtiene el valor de ARL y la desviación típica de racha SDRL.

Para comprobar formalmente el error de estimación por simulación se ha establecido un nivel de confianza del 95 %; así, se tiene que para una distribución normal las observaciones deben estar en un rango de ± 1.9599 desviaciones típicas de la media; por tanto

$$|ARL_{analítico} - ARL_{simulado}| \leq \frac{1.9599 * SDRL}{\sqrt{80000}} \quad (5.26)$$

Figura 5.25 Interfaz del simulador del gráfico $S-RL_2$ 

Fuente: el autor

En la tabla 5.20 se presentan los valores de ARL bajo control simulados con diferentes parámetros para un ARL bajo control teórico de 370 y su respectiva distribución típica de racha SDRL para el gráfico de control $S-RL_2-U$. Como es posible observar, la diferencia obtenida nunca es mayor que la diferencia permitida a un nivel de confianza del 95 %.

Tabla 5.20 Comparación de ARL bajo control teórico y simulado, gráfico $S-RL_2-U$

n	δ_d^*	L	K^*	ARL(0) Teórico	ARL(0) Simulado	SDRL	Diferencia	MAX
5	1.05	41	1.712	370	369.64	398.69	0.360	2.76264
	1.1	30	1.682	370	369.36	391.3	0.640	2.71143
	1.15	23	1.656	370	371.51	394.98	1.510	2.73693
	1.2	18	1.631	370	370.42	391.00	0.420	2.70935
10	1.05	31	1.464	370	369.06	396.57	0.940	2.74795
	1.1	21	1.439	370	370.27	390.97	0.270	2.70915
	1.15	15	1.417	370	368.70	387.44	1.300	2.68469
	1.2	11	1.396	370	371.39	388.00	1.390	2.68857

Fuente: el autor

En la tabla 5.21 se presentan los valores de ARL fuera de control tanto teóricos como simulados y su respectiva desviación típica de racha SDRL para el gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}U$. Igualmente se observa que en ningún caso la diferencia obtenida supera la diferencia máxima permitida.

Tabla 5.21 Comparación de ARL fuera de control teórico y simulado, gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}U$

n	δ'_d	L	K^*	$ARL(\delta)$ Teórico	$ARL(\delta)$ Simulado	$SDRL$	Diferencia	MAX
5	1.05	41	1.712	136.8	136.78	147.08	0.020	1.01916
	1.1	30	1.682	64.53	64.51	68.82	0.020	0.47687
	1.15	23	1.656	36.19	36.35	37.3	0.160	0.25846
	1.2	18	1.631	23	23.12	22.88	0.120	0.15854
10	1.05	31	1.464	100.5	100.05	107.58	0.450	0.74545
	1.1	21	1.439	39.72	39.65	41.21	0.070	0.28556
	1.15	15	1.417	20.25	20.13	19.87	0.120	0.13769
	1.2	11	1.396	12.28	12.34	11.44	0.060	0.07927

Fuente: el autor

En la tabla 5.22 se corroboran los valores bajo control para el gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}L$. En la tabla 5.23 se presentan los valores fuera de control, igualmente corroborados, para el mismo gráfico.

En las tablas 5.24 y 5.25 se presentan y comprueban respectivamente los valores bajo control y fuera de control para el gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}C$.

Tabla 5.22 Comparación de ARL bajo control teórico y simulado, gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}L$

n	δ'_d	L	K^*	$ARL(0)$ Teórico	ARL Simulado	$SDRL$	Diferencia	MAX
5	0.9	4	0.468	370	369.68	380.17	0.320	2.63431
	0.8	4	0.468	370	368.89	376.72	1.110	2.61040
	0.7	4	0.468	370	369.85	380.54	0.150	2.63687
	0.5	3	0.490	370	369.95	380.64	0.050	2.63757
10	0.9	7	0.613	370	370.30	381.66	0.300	2.64463
	0.8	5	0.632	370	369.28	381.12	0.720	2.64089
	0.7	4	0.645	370	370.66	380.74	0.660	2.63826
	0.5	3	0.661	370	370.66	381.66	0.660	2.64463

Fuente: el autor

Tabla 5.23 Comparación de ARL fuera de control teórico y simulado, gráfico $S-RL_2-L$

n	δ'_σ	L	K^*	K^-	ARL(0) Teórico	ARL Simulado	SDRL	Diferencia	MAX
5	0.9	4	0.468		144.6	145.35	150.29	0.750	1.04140
	0.8	4	0.468		55.59	55.95	58.51	0.360	0.40543
	0.7	4	0.468		21.63	21.75	22.57	0.120	0.15639
	0.5	3	0.490		4.149	4.15	3.11	0.001	0.02155
10	0.9	7	0.613		74.5	74.61	79.16	0.110	0.54852
	0.8	5	0.632		18.19	18.14	18.76	0.050	0.12999
	0.7	4	0.645		5.99	5.97	5.11	0.020	0.03541
	0.5	3	0.661		2.158	2.16	0.43	0.001	0.00298

Fuente: el autor

Tabla 5.24 Comparación de ARL bajo control teórico y simulado, gráfico $S-RL_2-C$

δ'_σ	L	K^*	K^-	ARL(0) Teórico	ARL Simulado	SDRL	Diferencia	MAX
0.5	2	1.366	0.612	370	371.63	375.93	1.630	2.60493
0.7	6	1.437	0.559	370	369.67	380.55	0.330	2.63694
0.9	39	1.551	0.482	370	368.33	395.41	1.670	2.73991
1.05	63	1.577	0.465	370	370.11	400.05	0.110	2.77206
1.1	42	1.555	0.479	370	369.10	396.7	0.900	2.74885
1.2	19	1.509	0.509	370	367.93	387.52	2.070	2.68524

Fuente: el autor

Tabla 5.25 Comparación de ARL fuera de control teórico y simulado, gráfico $S-RL_2-C$

δ'_σ	L	K^*	K^-	ARL(0) Teórico	ARL Simulado	SDRL	Diferencia	MAX
0.5	2	1.366	0.612	2.42	2.42	0.97	0.000	0.00672
0.7	6	1.437	0.559	13.96	13.99	13.99	0.030	0.09694
0.9	39	1.551	0.482	274.83	273.83	293.85	1.000	2.03617
1.05	63	1.577	0.465	187.09	186.98	201.81	0.110	1.39840
1.1	42	1.555	0.479	82.11	81.65	86.69	0.460	0.60070
1.2	19	1.509	0.509	21.99	21.92	21.34	0.070	0.14787

Fuente: el autor

Capítulo VI

Conclusiones y futuros trabajos de investigación

La principal motivación que condujo a la realización del trabajo de investigación aquí presentado fue explorar la posibilidad de generar nuevos gráficos de control que permitieran mejorar el desempeño de los ya existentes para dar a las empresas una nueva herramienta que les permita mejorar sus procesos.

La idea inicial fue de tratar las señales de falta de control en un gráfico de Shewhart como una no conformidad en un gráfico por atributos; así, se permitiría evaluar si la frecuencia de dichas señales es tal que requiere la toma de acciones sobre el proceso. Luego de revisar la literatura al respecto se identificó el denominado gráfico de control sintético que combina el gráfico de control $\bar{X}$ de Shewhart con un gráfico CRL, propuesto por Bourke (1991) —ampliado en 2006 y 2008— quien además desarrolló el gráfico denominado RL_2 . El CRL es un gráfico por atributos que monitoriza con 100 % de inspección. También fue referido un gráfico sintético para la varianza combinando un gráfico S de Shewhart y un gráfico CRL.

Es mencionada la superioridad del gráfico RL_2 frente al CRL para incrementos pequeños en la fracción no conforme pero no se presentan resultados de manera explícita. Por tanto, para corroborar dicha superioridad se realizaron los cálculos necesarios para obtener el desempeño de ambos gráficos (figuras 3.9 a 3.11) y se comprobó la superioridad del gráfico RL_2 frente al CRL en los valores de fracción no conforme descritos en el capítulo 3.

Con esta información y teniendo en cuenta que el gráfico sintético supera notablemente al tradicional gráfico de Shewhart, tanto para la media como para la desviación, se desarrollaron dos nuevos gráficos de control, el gráfico $\bar{X}-RL_2$ para el control de posición y el gráfico $S-RL_2$ para el control de dispersión.

6.1 *Gráfico de control $\bar{X}$ - RL_2*

En el capítulo IV se estableció el desempeño de este gráfico mediante la métrica de ARL. Las actividades más destacadas fueron:

- Se estableció el modo de operar y se caracterizó su comportamiento estadístico.
- Se presentaron expresiones que permitieron establecer los límites de control adecuados para un ARL bajo control determinado.
- Se desarrollaron las expresiones que permitieron obtener el valor de ARL fuera de control y así establecer el su desempeño.
- Se desarrolló un procedimiento para optimizar el valor de ARL para parámetros de diseño especificados.
- Se contrastaron los resultados obtenidos mediante simulación.
- El desempeño se comparó con la de otros gráficos de control.

Dentro de las comparaciones realizadas, el gráfico de control $\bar{X}$ - RL_2 es superior al gráfico $\bar{X}$ de Shewhart en todos los valores de ARL bajo control y en todos los valores de tamaños de muestra estudiados, para magnitudes de cambio pequeña o moderada. La razón por la cual el gráfico $\bar{X}$ - RL_2 no supera al gráfico de control $\bar{X}$ de Shewhart en magnitudes de cambio grande es de tipo operativo, pues el valor de ARL fuera de control del primero nunca será menor que 2, debido al propio diseño del gráfico $\bar{X}$ - RL_2 (es necesario esperar siempre a una segunda salida de control para llevar a cabo el conteo de las muestras en una racha).

El desempeño del gráfico $\bar{X}$ - RL_2 es similar al del gráfico sintético para la media. Las diferencias encontradas al comparar la eficacia de ambos gráficos están relacionadas con el ARL bajo control asumido. Así, si se asume un ARL bajo control de 200, el gráfico sintético es levemente superior al $\bar{X}$ - RL_2 , pero si se aumenta el ARL a 370 el gráfico $\bar{X}$ - RL_2 es levemente superior al sintético. Para un valor de ARL bajo control de 500 la diferencia en el desempeño entre los dos gráficos aumenta a favor del gráfico $\bar{X}$ - RL_2 ; la tendencia se mantiene siendo más evidente para un ARL bajo control de 1000. Las mejora que expone el gráfico $\bar{X}$ - RL_2 frente al sintético para la media se presenta en valores pequeños de magnitud de cambio para todos los tamaños de muestra estudiados.

De los gráficos $\bar{X}$ con reglas adicionales estudiados, el único que superó el desempeño del gráfico $\bar{X}-RL_2$ fue el esquema 3 de 3 y solamente en valores pequeños de magnitud de cambio. El gráfico $\bar{X}-RL_2$ no es competidor para los gráficos Cusum y EWMA para cambios pequeños o moderados en la media.

6.2 Gráfico de control $S-RL_2$

En el capítulo V se estableció la potencia de este gráfico mediante la métrica del ARL; para su diseño se tuvieron en cuenta tres consideraciones para detectar solo incrementos en la desviación ($S-RL_2-U$) solo decrementos en la desviación ($S-RL_2-L$) e incrementos en cualquier sentido ($S-RL_2-C$).

Resultados para $S-RL_2-U$

- Se estableció el modo de operar el gráfico y se caracterizó su comportamiento estadístico.
- Se presentaron expresiones que permiten establecer los límites de control adecuados para un ARL bajo control determinado.
- Se desarrollaron las expresiones que permiten obtener el valor de ARL fuera de control y así establecer el desempeño del mismo.
- Se desarrolló un procedimiento que optimiza el valor de ARL para parámetros de diseño especificados.
- Se contrastaron los resultados obtenidos mediante simulación.
- El desempeño del gráfico se comparó con el de otros gráficos de control.

$S-RL_2-U$ es superior al gráfico de control S de Shewhart en valores pequeños de magnitud de cambio para todos los valores de tamaño de muestra estudiados. Teniendo en cuenta que en este caso el proceso se encuentra bajo control cuando la desviación típica es igual a 1, el gráfico de control $S-RL_2-U$ no presenta mejora frente al gráfico S a partir de un incremento en la desviación entorno a un valor de 2.

$S-RL_2-U$ presenta un desempeño levemente superior al gráfico sintético para incrementos, destacándose solo en valores de magnitud de cambio menores a 1.2. Presenta mayor potencia

frente a gráficos EWMA S y Cusum S para ciertos parámetros de diseño, y de nuevo, dicha superioridad se presenta en valores pequeños de magnitud de cambio.

En general es una muy buena opción cuando se quiere detectar rápidamente pequeños incrementos en la desviación típica del proceso. La superioridad en el desempeño de $S\text{-}RL_2\text{-}U$ aumenta en función del valor de ARL bajo control contemplado.

Resultados para $S\text{-}RL_2\text{-}L$

- Se estableció el modo de operar del gráfico y se caracterizó su comportamiento estadístico.
- Se presentaron expresiones que permiten establecer los límites de control adecuados para un ARL bajo control determinado.
- Se desarrollaron las expresiones que permiten obtener el valor de ARL fuera de control y así establecer el desempeño del mismo.
- Se desarrolló un procedimiento que optimiza el valor para parámetros de diseño especificados.
- Se contrastaron los resultados obtenidos mediante simulación.
- El desempeño del gráfico se comparó con la de otros gráficos de control.

$S\text{-}RL_2\text{-}L$ presenta una notable superioridad frente al de control S de Shewhart para decrementos y para el gráfico de control sintético S para decrementos. En ambos casos, la superioridad del gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}L$ se presenta en todos los valores de tamaño de muestra estudiados, sobre todo cuando los valores en la magnitud de cambio son cercanos al valor bajo control, en este caso 1. Sin embargo, se observó que las mayores mejoras se concentran en valores de tamaño de muestra pequeños y decrementos en la desviación de entre 0.1 y 0.4.

Para poder seguir con el mismo esquema de análisis para el gráfico $S\text{-}RL_2\text{-}C$ fue necesario el desarrollo de un gráfico sintético para la desviación S en cualquier sentido (incrementos y decrementos) al que se denominó $S\text{-}Synth\text{-}C$.

Resultados para $S\text{-Synth-C}$

- Se estableció el modo de operar del gráfico y se caracterizó su comportamiento estadístico.
- Se presentaron expresiones que permiten establecer los límites de control adecuados para un ARL bajo control determinado.
- Se desarrollaron las expresiones que permiten obtener el valor de ARL fuera de control y así establecer el desempeño del mismo.
- Se desarrolló un procedimiento que optimiza el valor de ARL para parámetros de diseño especificados.
- Se contrastaron los resultados obtenidos mediante simulación.
- El desempeño se comparó con la del gráfico S de Shewhart conjunto y el gráfico sintético S conjunto denominado $S\text{-Synth-C}$.
- Fue propuesto por la presente investigación.

Llevar a cabo el control de la dispersión en un proceso para incrementos y decrementos de manera conjunta presenta una gran desventaja que es la notoria disminución en su eficacia comparada con un control llevado de manera independiente. Por otra parte, para valores de decrementos en la desviación cercanos a 1 (bajo control) y tamaños de muestra pequeños, el ARL fuera de control presenta valores mayores al ARL bajo control establecido. Por tanto, las comparaciones realizadas para el gráfico $S\text{-RL}_2\text{-C}$ no tuvieron la misma rigurosidad como en las dos variantes anteriores.

Como era de esperarse, el gráfico $S\text{-RL}_2\text{-C}$ y el gráfico $S\text{-Synth-C}$ tienen una mayor eficacia frente al gráfico de S de Shewhart conjunto. Adicionalmente, el gráfico $S\text{-Synth-C}$ presenta un mejor desempeño sobre el gráfico $S\text{-RL}_2\text{-C}$. Este solo es superior en algunos parámetros cuando se presentan decrementos en la desviación.

6.3 Futuros trabajos de investigación

Algunos trabajos futuros a desarrollar son:

- Caracterización del $\bar{X}-RL_2$ para el control de la posición y del gráfico $S-RL_2$ para el control de la dispersión en el escenario *steady-state*.
 - Caracterización del $\bar{X}-RL_2$ para el control de la posición y del gráfico $S-RL_2$ para el control de la dispersión con tamaño de muestra adaptable en los escenarios *zero-state* y *steady-state*.
 - Caracterización del $\bar{X}-RL_2$ para el control de la posición y del gráfico $S-RL_2$ para el control de la dispersión con doble muestreo en los escenarios *zero-state* y *steady-state*.
 - Caracterización de un gráfico basado en el $\bar{X}-RL_2$ y en el gráfico $S-RL_2$ para el control de la posición y dispersión de manera conjunta.
 - Caracterización del $\bar{X}-RL_2$ para el control de la posición y del gráfico $S-RL_2$ para el control de la dispersión en los escenarios *zero-state* y *steady-state* con límites asimétricos.
 - Caracterización y optimización del $\bar{X}-RL_2$ para el control de la posición y del gráfico $S-RL_2$ para el control de la dispersión en el ámbito multivariante en los escenarios *zero-state* y *steady-state*.
-

Referencias

- Aparisi, F., & de Luna, M. A. (2009). The design and performance of the multivariate synthetic-T 2 control chart. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 38(2), 173-192. doi: 10.1080/03610920802178413
- Barnard, G. (1959). Control Charts and Stochastic Processes. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 21(2), 239-271. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/2983801>
- Bourke, P. D. (1991). Detecting a shift in fraction nonconforming using run-length control charts with 100% inspection. *Journal of Quality Technology*, 23(3), 225-238.
- Bourke, P. D. (2006). The RL2 chart versus the np chart for detecting upward shifts in fraction defective. *Journal of Applied Statistics*, 33(1), 1-15. doi: 10.1080/02664760500389400
- Bourke, P. D. (2008). Performance comparisons for the synthetic control chart for detecting increases in fraction nonconforming. *Journal of Quality Technology*, 40(4), 461-475.
- Brook, D., & Evans, D. (1972). An Approach to the Probability Distribution of Cusum Run Length. *Biometrika*, 59(3), 539-549. doi:10.2307/2334805
- Calzada, M. E., & Scariano, S. M. (2001). The robustness of the synthetic control chart to non-normality. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 30(2), 311-326. doi: 10.1081/SAC-100002369
- Carrión A., & Maluenda R. (1997). *Control estadístico de procesos*. Valencia, España: Ed. Univ. Politéc. Valencia.
- Carot, V. (1998). *Control estadístico de la calidad*. Valencia, España: Ed. Univ. Politéc. Valencia.
-

- Champ, C. W., & Woodall, W. H. (1987). Exact results for Shewhart control charts with supplementary runs rules. *Technometrics*, 29(4), 393-399.
- Champ, C. W. (1992). Steady-state run length analysis of a Shewhart quality control chart with supplementary runs rules. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 21(3), 765-777. doi: 10.1080/03610929208830813
- Chang, T., & Gan, F. (1995). A cumulative sum control chart for monitoring process variance. *Journal of Quality Technology*, 27(2), 109-119.
- Costa, A. F. (1997). X chart with variable sample size and sampling intervals. *Journal of Quality Technology*, 29(2), 197-204.
- Costa, A.F.B., & Rahim, M.A. (2006). A Synthetic control chart for monitoring the process mean and variance, *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, 12(1), 81-88. doi: 10.1108/13552510610654556
- Crowder, S. V. (1987). Computation of ARL for combined individual measurement and moving range charts. *Journal of Quality Technology*, 19(2), 98-102.
- Crowder, S., & Hamilton, M. (1992). An EWMA for monitoring a process standard deviation. *Journal of Quality Technology*, 24(1), 12-21.
- Davis, R. B., & Woodall, W. H. (2002). Evaluating and improving the synthetic control chart. *Journal of Quality Technology*, 34(2), pp. 200-208.
- Fu, J. C., Shmueli, G., & Chang, Y. M. (2003). A unified Markov chain approach for computing the run length distribution in control charts with simple or compound rules. *Statistics & probability letters*, 65(4), 457-466. doi: 10.1016/j.spl.2003.10.004
- Howell D. K. (1987) A Cusum scheme for controlling process variance. *Joint statistical meetings 1987*, San Francisco, CA.
-

- Huang, H. J., & Chen, F. L. (2005). A synthetic control chart for monitoring process dispersion with sample standard deviation. *Computers & Industrial Engineering*, 49(2), 221-240. doi: 10.1016/j.cie.2004.11.001
- Khoo, M. B. (2003). Design of runs rules schemes. *Quality Engineering*, 16(1), 27-43. doi: 10.1081/QEN-120020769
- Klein, M. (1996). Composite Shewhart-EWMA statistical control schemes. *IIE transactions*, 28(6), 475-481. doi: 10.1080/07408179608966294
- Lowry, C. A., Champ, C. W., & Woodall, W. H. (1995). The performance of control charts for monitoring process variation. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 24(2), 409-437. doi: 10.1080/03610919508813250
- Lucas, J. M., & Crosier, R. B. (1982). Fast initial response for Cusum quality-control schemes: give your CUSUM a head start. *Technometrics*, 42(1), 199-205
- Montgomery, D. (2005). *Introduction to Statistical Quality Control*. Nueva York: John Wiley & Sons.
- Page, E. S. (1954). Continuous inspection schemes. *Biometrika*, 41(1/2), 100-115. doi: 10.2307/2333009
- Page, E. S. (1963). Controlling the standard deviation by Cusums and warning lines. *Technometrics*, 5(3), 307-315.
- Prabhu, S. S., Montgomery, D., & Runger, G. (1994). A Combined adaptive sample size and sampling interval X control scheme. *Journal of Quality Technology*, 26(3), 164-176.
- Quaglino, M. B., Villafranca, R. R., & Ramajo, L. R. Z. (2003). *Un gráfico para el control de procesos de alto rendimiento basado en la binomial negativa*. Valencia, España: Ed. Univ. Politéc. Valencia.
-

- Roberts, S.W. (1959) Control chart tests based on geometric moving averages. *Technometrics*, 1(3), 239-250.
- Roes, K. C., Does, R. J., & Schurink, Y. (1993). Shewhart-type control charts for individual observations. *Journal of Quality Technology*, 25(3), 188-198.
- Runger, G. C., & Prabhu, S. S. (1996). A Markov chain model for the multivariate exponentially weighted moving averages control chart. *Journal of the American Statistical Association*, 91(436), 1701-1706
- Schwertman, N. C. (2005). Designing accurate control charts based on the geometric and negative binomial distributions. *Quality and Reliability Engineering International*, 21(8), 743-756. doi: 10.1002/qre.683
- Trip, A., & Wieringa, J. E. (2006). Individuals charts and additional tests for changes in spread. *Quality and Reliability Engineering International*, 22(3), 239-249. doi: 10.1002/qre.700
- Tuprah, K., & Ncube, M. (1987). A comparison of dispersion quality control charts, *Sequential Analysis* 6(2), 155-163. doi: 10.1080/07474948708836122
- Von Collani, E., & Sheil, J. (1989). An approach to controlling process variability. *Journal of Quality Technology*, 21(2), 87-96.
- Western Electric Company (1956). *Statistical Quality Control Handbook*. Nueva York: autor.
- Westgard, J. O., Groth, T., Aronsson, T., & De Verdier, C. H. (1977). Combined Shewhart-cusum control chart for improved quality control in clinical chemistry. *Clinical Chemistry*, 23(10), 1881-1887.
- Woodall, W. H.; Adams B. M. (1993). *The statistical design of Cusum Charts*. *Quality engineering*, 5(4), 559-570. doi: /10.1080/08982119308918998
-

- Woodall, W. H., & Mahmoud, M. A. (2005). The inertial properties of quality control charts. *Technometrics*, 47(4), 425-436. doi: 10.1198/004017005000000256
- Woodall, W. H., & Ncube, M. M. (1985). Multivariate Cusum quality-control procedures. *Technometrics*, 27(3), 285-292. *Technometrics*, 27(3), 285-292.
- Wu, Z., Yeo, S. H., & Fan, H. (2000). A comparative study of the CRL-type control charts. *Quality and Reliability Engineering International*, 16(4), 269-279. doi: 10.1002/1099-1638(200007/08)16:4<269::AID-QRE334>3.0.CO;2-D
- Wu, Z., & Spedding, T. A. (2000a). A synthetic control chart for detecting small shifts in the process mean. *Journal of Quality Technology*, 32(1), 32-38.
- Wu, Z., Yeo, S. H., & Spedding, T. A. (2001). A synthetic control chart for detecting fraction nonconforming increases. *Journal of Quality Technology*, 33(1), 104-111.
- Wu, Z., Xie, M., Liu, Q., & Zhang, Y. (2006). SXC control chart. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 30(5-6), 444-451. doi:10.1007/s00170-005-0080-3
- Xie, M., Lu, X. S., Goh, T. N., & Chan, L. Y. (1999). A quality monitoring and decision-making scheme for automated production processes. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 16(2), 148-157. doi: 10.1108/02656719910218238
- Xie, W., Xie, M., & Goh, T. N. (1995). A shewhart-like charting technique for high yield processes. *Quality and Reliability Engineering International*, 11(3), 189-196. doi: 10.1002/qre.4680110309
- Zhang, S., & Wu, Z. (2005). Designs of control charts with supplementary runs rules. *Computers & Industrial Engineering*, 49(1), 76-97. doi: 10.1016/j.cie.2005.02.002
-

Anexos

A. Tablas con valores óptimos gráfico $\bar{X}$ -RL₂.

Tabla AI.1 Valores óptimos caso ARL bajo control 200											
n	δ_d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	L	52	48	41	35	29	24	20	17	14	12
	Z	2.276	2.26	2.229	2.197	2.158	2.117	2.077	2.041	1.996	1.96
	$ARL(\delta_d)$	188.3	159	123.9	92.01	66.92	48.59	35.63	26.56	20.19	15.67
2	L	51	43	34	26	20	16	13	10	9	7
	Z	2.272	2.239	2.191	2.135	2.077	2.027	1.979	1.917	1.891	1.830
	$ARL(\delta_d)$	177.7	129.9	85.26	54.2	34.87	23.2	16.08	11.61	8.754	6.817
3	L	49	38	28	21	15	12	9	8	6	6
	Z	2.264	2.214	2.150	2.088	2.012	1.960	1.891	1.863	1.792	1.792
	$ARL(\delta_d)$	167.9	108.4	62.83	36.42	22.11	14.29	9.813	7.174	5.483	4.443
4	L	48	35	24	17	12	9	7	6	5	5
	Z	2.260	2.197	2.117	2.041	1.960	1.891	1.830	1.792	1.746	1.746
	$ARL(\delta_d)$	159	92.01	48.59	26.56	15.67	10.06	6.975	5.192	4.093	3.426
5	L	46	32	21	15	11	8	6	5	5	4
	Z	2.252	2.179	2.088	2.012	1.940	1.863	1.792	1.746	1.746	1.690
	$ARL(\delta_d)$	150.8	79.27	38.94	20.5	11.97	7.717	5.436	4.14	3.394	2.881
6	L	45	30	19	13	9	7	6	5	4	4
	Z	2.248	2.165	2.066	1.979	1.891	1.83	1.792	1.746	1.69	1.69
	$ARL(\delta_d)$	143.3	69.14	32.09	16.48	9.58	6.259	4.528	3.538	2.934	2.594
7	L	44	28	17	11	8	6	5	4	4	3
	Z	2.243	2.15	2.041	1.94	1.863	1.792	1.746	1.69	1.69	1.617
	$ARL(\delta_d)$	136.3	60.94	27.04	13.66	7.971	5.277	3.889	3.104	2.673	2.377
8	L	43	26	16	10	7	6	5	4	4	3
	Z	2.239	2.135	2.027	1.917	1.83	1.792	1.746	1.69	1.69	1.617
	$ARL(\delta_d)$	129.9	54.2	23.2	11.61	6.817	4.618	3.481	2.838	2.498	2.262
9	L	41	24	14	9	7	5	4	4	3	3
	Z	2.229	2.117	1.996	1.891	1.83	1.746	1.69	1.69	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	123.9	48.59	20.19	10.06	5.989	4.093	3.139	2.65	2.339	2.185
10	L	40	23	13	9	6	5	4	4	3	3
	Z	2.224	2.108	1.979	1.891	1.792	1.746	1.69	1.69	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	118.3	43.87	17.8	8.881	5.321	3.73	2.918	2.513	2.253	2.131

Fuente: el autor

Tabla AI.2 Valores óptimos caso ARL bajo control 200

n	δ_d	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
1	L	11	9	8	7	7	6	6	5	5	5
	Z	1.94	1.891	1.863	1.83	1.83	1.792	1.792	1.746	1.746	1.746
	$ARL(\delta_d)$	12.44	10.06	8.301	6.975	5.989	5.192	4.603	4.093	3.722	3.426
2	L	6	6	5	5	4	4	4	4	3	3
	Z	1.792	1.792	1.746	1.746	1.690	1.690	1.690	1.690	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	5.507	4.618	3.94	3.481	3.094	2.838	2.645	2.498	2.348	2.262
3	L	5	4	4	4	3	3	3	3	3	3
	Z	1.746	1.690	1.690	1.690	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	3.705	3.187	2.855	2.621	2.415	2.294	2.207	2.144	2.099	2.067
4	L	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.690	1.690	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	2.942	2.65	2.413	2.278	2.185	2.121	2.078	2.049	2.029	2.017
5	L	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.690	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	2.583	2.35	2.224	2.141	2.086	2.051	2.029	2.016	2.009	2.004
6	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	2.343	2.209	2.125	2.073	2.04	2.022	2.011	2.005	2.002	2.001
7	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	2.222	2.128	2.071	2.038	2.019	2.009	2.004	2.002	2.001	2
8	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	2.146	2.079	2.04	2.019	2.009	2.004	2.001	2.001	2	2
9	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	2.097	2.049	2.023	2.01	2.004	2.001	2	2	2	2
10	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	2.065	2.03	2.013	2.005	2.002	2.001	2	2	2	2

Fuente: el autor

Tabla AI.3 Valores óptimos caso ARL bajo control 200											
n	δ_d	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
1	L	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3
	Z	1.69	1.69	1.69	1.69	1.69	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	3.139	2.942	2.782	2.65	2.541	2.413	2.339	2.278	2.227	2.185
2	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	2.197	2.146	2.108	2.079	2.057	2.04	2.028	2.019	2.013	2.009
3	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	2.044	2.029	2.018	2.011	2.007	2.004	2.002	2.001	2.001	2
4	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617
	$ARL(\delta_d)$	2.01	2.005	2.003	2.001	2.001	2	2	2	2	2
5	L	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2
	Z	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.513	1.513
	$ARL(\delta_d)$	2.002	2.001	2	2	2	2	2	2	2	2
6	L	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2
	Z	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.617	1.513	1.513	1.513	1.513
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
7	L	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2
	Z	1.617	1.617	1.617	1.617	1.513	1.513	1.513	1.513	1.513	1.513
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
8	L	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2
	Z	1.617	1.617	1.513	1.513	1.513	1.513	1.513	1.513	1.513	1.513
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
9	L	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	Z	1.617	1.513	1.513	1.513	1.513	1.513	1.513	1.513	1.513	1.513
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
10	L	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	Z	1.513	1.513	1.513	1.513	1.513	1.513	1.513	1.513	1.513	1.513
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Fuente: el autor

Tabla AI.4 Valores óptimos caso ARL bajo control 370

n	δ_d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	L	79	70	60	49	40	32	26	22	18	15
	Z	2.464	2.441	2.412	2.372	2.33	2.284	2.239	2.203	2.158	2.116
	$ARL(\delta_d)$	344.6	282.5	211.4	150.2	104.6	72.94	51.52	37.13	27.37	20.66
2	L	76	62	47	35	26	20	15	12	10	8
	Z	2.457	2.418	2.363	2.303	2.239	2.181	2.116	2.064	2.021	1.968
	$ARL(\delta_d)$	321.7	223.3	137.7	82.47	50.3	31.93	21.23	14.8	10.79	8.184
3	L	73	55	38	27	19	14	11	9	7	6
	Z	2.449	2.395	2.320	2.247	2.170	2.100	2.044	1.996	1.936	1.898
	$ARL(\delta_d)$	301.1	181.2	97.43	52.8	30.27	18.62	12.29	8.646	6.421	5.026
4	L	70	49	32	22	15	11	9	7	6	5
	Z	2.441	2.372	2.284	2.203	2.116	2.044	1.996	1.936	1.898	1.853
	$ARL(\delta_d)$	282.5	150.2	72.94	37.13	20.66	12.63	8.425	6.042	4.636	3.745
5	L	68	44	28	18	13	9	7	6	5	4
	Z	2.436	2.350	2.255	2.158	2.083	1.996	1.936	1.898	1.853	1.798
	$ARL(\delta_d)$	265.6	126.8	56.92	27.82	15.3	9.386	6.359	4.695	3.703	3.079
6	L	66	41	24	16	11	8	6	5	4	4
	Z	2.43	2.335	2.222	2.131	2.044	1.968	1.898	1.853	1.798	1.798
	$ARL(\delta_d)$	250.2	108.6	45.84	21.84	11.96	7.436	5.138	3.887	3.146	2.724
7	L	64	37	22	14	9	7	6	5	4	4
	Z	2.424	2.314	2.203	2.1	1.996	1.936	1.898	1.853	1.798	1.798
	$ARL(\delta_d)$	236.1	94.11	37.87	17.74	9.734	6.153	4.379	3.401	2.821	2.505
8	L	62	35	20	12	8	6	5	4	4	3
	Z	2.418	2.303	2.181	2.064	1.968	1.898	1.853	1.798	1.798	1.726
	$ARL(\delta_d)$	223.3	82.47	31.93	14.8	8.184	5.256	3.814	3.026	2.607	2.326
9	L	60	32	18	11	8	6	5	4	4	3
	Z	2.412	2.284	2.158	2.044	1.968	1.898	1.853	1.798	1.798	1.726
	$ARL(\delta_d)$	211.4	72.94	27.37	12.63	7.077	4.636	3.444	2.793	2.457	2.231
10	L	58	30	16	10	7	5	4	4	3	3
	Z	2.405	2.27	2.131	2.021	1.936	1.853	1.798	1.798	1.726	1.726
	$ARL(\delta_d)$	200.5	65.03	23.79	10.96	6.21	4.133	3.126	2.624	2.315	2.165

Fuente: el autor

Tabla AI.5 Valores óptimos caso ARL bajo control 370											
n	δ_d	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
1	L	13	11	10	9	8	7	6	6	5	5
	Z	2.083	2.044	2.021	1.996	1.968	1.936	1.898	1.898	1.853	1.853
	$ARL(\delta_d)$	15.97	12.63	10.21	8.425	7.077	6.042	5.236	4.636	4.122	3.745
2	L	7	6	6	5	5	4	4	4	4	3
	Z	1.936	1.898	1.898	1.853	1.853	1.798	1.798	1.798	1.798	1.726
	$ARL(\delta_d)$	6.453	5.256	4.443	3.814	3.389	3.026	2.787	2.607	2.468	2.326
3	L	5	5	4	4	4	3	3	3	3	3
	Z	1.853	1.853	1.798	1.798	1.798	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726
	$ARL(\delta_d)$	4.1	3.504	3.048	2.758	2.551	2.365	2.258	2.182	2.126	2.086
4	L	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.798	1.798	1.798	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726
	$ARL(\delta_d)$	3.156	2.793	2.549	2.345	2.231	2.153	2.099	2.063	2.039	2.023
5	L	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.798	1.798	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726
	$ARL(\delta_d)$	2.71	2.471	2.279	2.177	2.11	2.066	2.039	2.022	2.012	2.006
6	L	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.798	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726
	$ARL(\delta_d)$	2.462	2.261	2.158	2.093	2.053	2.029	2.015	2.007	2.003	2.002
7	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726
	$ARL(\delta_d)$	2.277	2.161	2.091	2.049	2.025	2.012	2.006	2.002	2.001	2
8	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726
	$ARL(\delta_d)$	2.184	2.101	2.052	2.026	2.012	2.005	2.002	2.001	2	2
9	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726
	$ARL(\delta_d)$	2.124	2.063	2.03	2.013	2.006	2.002	2.001	2	2	2
10	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726
	$ARL(\delta_d)$	2.083	2.039	2.017	2.007	2.003	2.001	2	2	2	2

Fuente: el autor

Tabla AI.6 Valores óptimos caso ARL bajo control 370

n	δ_d	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
1	L	5	4	4	4	4	4	4	3	3	3
	Z	1.853	1.798	1.798	1.798	1.798	1.798	1.798	1.726	1.726	1.726
	$ARL(\delta_d)$	3.444	3.156	2.956	2.793	2.66	2.549	2.457	2.345	2.283	2.231
2	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726
	$ARL(\delta_d)$	2.246	2.184	2.137	2.101	2.073	2.052	2.037	2.026	2.018	2.012
3	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726
	$ARL(\delta_d)$	2.058	2.038	2.024	2.015	2.009	2.005	2.003	2.002	2.001	2.001
4	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726
	$ARL(\delta_d)$	2.013	2.008	2.004	2.002	2.001	2.001	2	2	2	2
5	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726
	$ARL(\delta_d)$	2.003	2.001	2.001	2	2	2	2	2	2	2
6	L	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2
	Z	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.625	1.625	1.625
	$ARL(\delta_d)$	2.001	2	2	2	2	2	2	2	2	2
7	L	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2
	Z	1.726	1.726	1.726	1.726	1.726	1.625	1.625	1.625	1.625	1.625
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
8	L	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2
	Z	1.726	1.726	1.726	1.625	1.625	1.625	1.625	1.625	1.625	1.625
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
9	L	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2
	Z	1.726	1.726	1.625	1.625	1.625	1.625	1.625	1.625	1.625	1.625
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
10	L	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	Z	1.726	1.625	1.625	1.625	1.625	1.625	1.625	1.625	1.625	1.625
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Fuente: el autor

Tabla AI.7 Valores óptimos caso ARL bajo control 500											
n	δ_d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	L	96	85	71	58	46	37	30	24	20	17
	Z	2.55	2.528	2.493	2.454	2.407	2.362	2.318	2.27	2.229	2.193
	$ARL(\delta_d)$	463.1	374.1	274.5	190.9	130.2	88.98	61.74	43.76	31.79	23.68
2	L	92	74	55	40	29	22	17	13	11	9
	Z	2.542	2.501	2.443	2.379	2.311	2.250	2.193	2.131	2.092	2.045
	$ARL(\delta_d)$	430.1	290.9	174.1	101.3	60.2	37.36	24.36	16.68	11.99	8.975
3	L	89	65	44	30	21	16	12	9	8	6
	Z	2.536	2.476	2.398	2.318	2.240	2.179	2.113	2.045	2.017	1.947
	$ARL(\delta_d)$	400.7	232.9	120.7	63.33	35.33	21.25	13.73	9.476	6.967	5.357
4	L	85	58	37	24	17	12	9	7	6	5
	Z	2.528	2.454	2.362	2.270	2.193	2.113	2.045	1.985	1.947	1.903
	$ARL(\delta_d)$	374.1	190.9	88.98	43.76	23.68	14.13	9.219	6.501	4.913	3.921
5	L	82	52	32	20	14	10	8	6	5	4
	Z	2.521	2.432	2.332	2.229	2.148	2.070	2.017	1.947	1.903	1.848
	$ARL(\delta_d)$	350.2	159.5	68.55	32.34	17.27	10.36	6.897	4.98	3.875	3.188
6	L	79	47	28	17	12	9	7	5	5	4
	Z	2.514	2.412	2.303	2.193	2.113	2.045	1.985	1.903	1.903	1.848
	$ARL(\delta_d)$	328.5	135.3	54.62	25.07	13.35	8.123	5.52	4.081	3.306	2.794
7	L	76	43	24	15	10	7	6	5	4	4
	Z	2.506	2.394	2.27	2.164	2.07	1.985	1.947	1.903	1.848	1.848
	$ARL(\delta_d)$	308.8	116.4	44.68	20.17	10.76	6.629	4.622	3.537	2.902	2.554
8	L	74	40	22	13	9	7	5	4	4	3
	Z	2.501	2.379	2.25	2.131	2.045	1.985	1.903	1.848	1.848	1.777
	$ARL(\delta_d)$	290.9	101.3	37.36	16.68	8.975	5.651	3.999	3.129	2.665	2.361
9	L	71	37	20	12	8	6	5	4	4	3
	Z	2.493	2.362	2.229	2.113	2.017	1.947	1.903	1.848	1.848	1.777
	$ARL(\delta_d)$	274.5	88.98	31.79	14.13	7.675	4.913	3.585	2.871	2.501	2.256
10	L	69	34	18	11	8	6	5	4	3	3
	Z	2.488	2.345	2.206	2.092	2.017	1.947	1.903	1.848	1.777	1.777
	$ARL(\delta_d)$	259.4	78.86	27.45	12.19	6.73	4.398	3.284	2.685	2.348	2.184

Fuente: el autor

Tabla AI.8 Valores óptimos caso ARL bajo control 500

n	δ_d	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
1	L	14	12	11	9	8	7	7	6	6	5
	Z	2.148	2.113	2.092	2.045	2.017	1.985	1.985	1.947	1.947	1.903
	$ARL(\delta_d)$	18.08	14.13	11.32	9.219	7.675	6.501	5.629	4.913	4.385	3.921
2	L	8	7	6	5	5	4	4	4	4	3
	Z	2.017	1.985	1.947	1.903	1.903	1.848	1.848	1.848	1.848	1.777
	$ARL(\delta_d)$	7.003	5.651	4.694	3.999	3.523	3.129	2.864	2.665	2.513	2.361
3	L	6	5	4	4	4	3	3	3	3	3
	Z	1.947	1.903	1.848	1.848	1.848	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777
	$ARL(\delta_d)$	4.361	3.651	3.153	2.831	2.604	2.404	2.286	2.202	2.14	2.096
4	L	5	4	4	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.903	1.848	1.848	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777
	$ARL(\delta_d)$	3.317	2.871	2.602	2.382	2.256	2.17	2.111	2.071	2.044	2.027
5	L	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.848	1.848	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777
	$ARL(\delta_d)$	2.779	2.517	2.309	2.196	2.123	2.075	2.044	2.025	2.014	2.007
6	L	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.848	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777
	$ARL(\delta_d)$	2.506	2.289	2.176	2.104	2.06	2.033	2.017	2.009	2.004	2.002
7	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777
	$ARL(\delta_d)$	2.307	2.179	2.102	2.056	2.029	2.014	2.007	2.003	2.001	2
8	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777
	$ARL(\delta_d)$	2.204	2.113	2.059	2.029	2.014	2.006	2.002	2.001	2	2
9	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777
	$ARL(\delta_d)$	2.138	2.071	2.034	2.016	2.006	2.003	2.001	2	2	2
10	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777
	$ARL(\delta_d)$	2.093	2.045	2.02	2.008	2.003	2.001	2	2	2	2

Fuente: el autor

Tabla AI.9 Valores óptimos caso ARL bajo control 500											
n	δ_d	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
1	L	5	5	4	4	4	4	4	3	3	3
	Z	1.903	1.903	1.848	1.848	1.848	1.848	1.848	1.777	1.777	1.777
	$ARL(\delta_d)$	3.585	3.317	3.051	2.871	2.723	2.602	2.501	2.382	2.313	2.256
2	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777
	$ARL(\delta_d)$	2.272	2.204	2.152	2.113	2.082	2.059	2.042	2.029	2.02	2.014
3	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777
	$ARL(\delta_d)$	2.065	2.043	2.028	2.017	2.011	2.006	2.004	2.002	2.001	2.001
4	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777
	$ARL(\delta_d)$	2.016	2.009	2.005	2.003	2.001	2.001	2	2	2	2
5	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777
	$ARL(\delta_d)$	2.004	2.002	2.001	2	2	2	2	2	2	2
6	L	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2
	Z	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.677	1.677
	$ARL(\delta_d)$	2.001	2	2	2	2	2	2	2	2	2
7	L	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2
	Z	1.777	1.777	1.777	1.777	1.777	1.677	1.677	1.677	1.677	1.677
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
8	L	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2
	Z	1.777	1.777	1.777	1.777	1.677	1.677	1.677	1.677	1.677	1.677
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
9	L	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2
	Z	1.777	1.777	1.677	1.677	1.677	1.677	1.677	1.677	1.677	1.677
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
10	L	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	Z	1.777	1.677	1.677	1.677	1.677	1.677	1.677	1.677	1.677	1.677
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Fuente: el autor

Tabla A1.10 Valores óptimos caso ARL bajo control 1000

n	δ_d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	L	154	133	108	85	66	51	40	32	26	21
	Z	2.744	2.717	2.679	2.634	2.584	2.533	2.483	2.436	2.391	2.344
	$ARL(\delta_d)$	914.2	713.5	499.9	330.9	215.1	140.7	93.72	64.03	44.98	32.49
2	L	147	112	80	56	39	29	21	17	13	11
	Z	2.735	2.686	2.622	2.552	2.477	2.415	2.344	2.297	2.236	2.198
	$ARL(\delta_d)$	838.8	534.2	298.2	162.5	91.13	53.76	33.52	22.1	15.31	11.13
3	L	140	97	62	41	28	20	14	11	9	7
	Z	2.727	2.659	2.572	2.488	2.407	2.333	2.253	2.198	2.151	2.092
	$ARL(\delta_d)$	772.4	414.6	197.7	96.42	50.56	28.83	17.79	11.82	8.377	6.264
4	L	133	85	51	32	21	15	11	9	7	6
	Z	2.717	2.634	2.533	2.436	2.344	2.269	2.198	2.151	2.092	2.055
	$ARL(\delta_d)$	713.5	330.9	140.7	64.03	32.49	18.38	11.46	7.801	5.686	4.423
5	L	127	75	43	26	17	12	9	7	6	5
	Z	2.709	2.610	2.498	2.391	2.297	2.218	2.151	2.092	2.055	2.012
	$ARL(\delta_d)$	661.1	270.2	105.3	45.84	22.92	13.04	8.282	5.774	4.365	3.507
6	L	122	67	37	22	14	10	8	6	5	4
	Z	2.702	2.587	2.466	2.355	2.253	2.176	2.123	2.055	2.012	1.958
	$ARL(\delta_d)$	614.2	224.7	81.82	34.62	17.25	9.927	6.466	4.625	3.599	2.976
7	L	117	61	32	19	12	9	7	5	4	4
	Z	2.694	2.569	2.436	2.322	2.218	2.151	2.092	2.012	1.958	1.958
	$ARL(\delta_d)$	572.1	189.8	65.53	27.23	13.6	7.969	5.311	3.893	3.111	2.678
8	L	112	56	29	17	11	8	6	5	4	4
	Z	2.686	2.552	2.415	2.297	2.198	2.123	2.055	2.012	1.958	1.958
	$ARL(\delta_d)$	534.2	162.5	53.76	22.1	11.13	6.639	4.521	3.434	2.815	2.485
9	L	108	51	26	15	10	7	5	4	4	3
	Z	2.679	2.533	2.391	2.269	2.176	2.092	2.012	1.958	1.958	1.889
	$ARL(\delta_d)$	499.9	140.7	44.98	18.38	9.366	5.686	3.956	3.072	2.613	2.32
10	L	104	47	23	13	9	6	5	4	4	3
	Z	2.672	2.516	2.364	2.236	2.151	2.055	2.012	1.958	1.958	1.889
	$ARL(\delta_d)$	468.7	123	38.26	15.6	8.056	4.978	3.572	2.84	2.469	2.231

Fuente: el autor

Tabla A1.11 Valores óptimos caso ARL bajo control 1000											
n	δ_d	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
1	L	18	15	13	11	10	9	8	7	6	6
	Z	2.31	2.269	2.236	2.198	2.176	2.151	2.123	2.092	2.055	2.055
	$ARL(\delta_d)$	24.13	18.38	14.36	11.46	9.366	7.801	6.61	5.686	4.962	4.423
2	L	9	8	7	6	5	5	4	4	4	4
	Z	2.151	2.123	2.092	2.055	2.012	2.012	1.958	1.958	1.958	1.958
	$ARL(\delta_d)$	8.425	6.639	5.404	4.521	3.876	3.434	3.063	2.815	2.628	2.485
3	L	6	5	5	4	4	4	3	3	3	3
	Z	2.055	2.012	2.012	1.958	1.958	1.958	1.889	1.889	1.889	1.889
	$ARL(\delta_d)$	4.93	4.041	3.464	3.022	2.74	2.538	2.358	2.253	2.178	2.123
4	L	5	4	4	4	3	3	3	3	3	3
	Z	2.012	1.958	1.958	1.958	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889
	$ARL(\delta_d)$	3.613	3.072	2.737	2.511	2.32	2.214	2.141	2.091	2.058	2.035
5	L	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.958	1.958	1.958	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889
	$ARL(\delta_d)$	2.957	2.632	2.419	2.247	2.156	2.096	2.058	2.033	2.018	2.01
6	L	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.958	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889
	$ARL(\delta_d)$	2.62	2.361	2.221	2.133	2.077	2.043	2.023	2.012	2.006	2.003
7	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889
	$ARL(\delta_d)$	2.383	2.225	2.13	2.072	2.038	2.019	2.009	2.004	2.002	2.001
8	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889
	$ARL(\delta_d)$	2.256	2.143	2.077	2.039	2.019	2.008	2.004	2.001	2	2
9	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889
	$ARL(\delta_d)$	2.174	2.091	2.045	2.021	2.009	2.004	2.001	2	2	2
10	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889
	$ARL(\delta_d)$	2.119	2.058	2.027	2.011	2.004	2.002	2	2	2	2

Fuente: el autor

Tabla A1.12 Valores óptimos caso ARL bajo control 1000

n	δ_d	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
1	L	5	5	5	4	4	4	4	4	4	3
	Z	2.012	2.012	2.012	1.958	1.958	1.958	1.958	1.958	1.958	1.889
	$ARL(\delta_d)$	3.956	3.613	3.338	3.072	2.888	2.737	2.613	2.511	2.425	2.32
2	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889
	$ARL(\delta_d)$	2.34	2.256	2.192	2.143	2.105	2.077	2.055	2.039	2.027	2.019
3	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889
	$ARL(\delta_d)$	2.084	2.056	2.037	2.024	2.015	2.009	2.005	2.003	2.002	2.001
4	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889
	$ARL(\delta_d)$	2.021	2.012	2.007	2.004	2.002	2.001	2	2	2	2
5	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Z	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889
	$ARL(\delta_d)$	2.005	2.002	2.001	2.001	2	2	2	2	2	2
6	L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2
	Z	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.792
	$ARL(\delta_d)$	2.001	2	2	2	2	2	2	2	2	2
7	L	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2
	Z	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.792	1.792	1.792
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
8	L	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2
	Z	1.889	1.889	1.889	1.889	1.889	1.792	1.792	1.792	1.792	1.792
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
9	L	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2
	Z	1.889	1.889	1.889	1.792	1.792	1.792	1.792	1.792	1.792	1.792
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
10	L	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2
	Z	1.889	1.889	1.792	1.792	1.792	1.792	1.792	1.792	1.792	1.792
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Fuente: el autor

B. Tablas con valores óptimos gráficos $S\text{-}RL_2\text{-}U$ y $S\text{-}RL_2\text{-}L$

Tabla AII.1 Valores óptimos caso ARL bajo control 200											
n	δ_d	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.1
2	LS	52	50	48	46	44	43	41	40	38	37
	K^*	2.276	2.268	2.26	2.252	2.243	2.239	2.229	2.224	2.214	2.208
	$ARL(\delta_d)$	177.4	158.2	141.8	127.7	115.5	104.9	95.65	87.55	80.42	74.12
3	LS	43	41	39	37	36	34	33	31	30	29
	K^*	1.919	1.912	1.906	1.898	1.895	1.887	1.883	1.874	1.869	1.864
	$ARL(\delta_d)$	171.8	148.8	129.7	113.8	100.5	89.24	79.69	71.52	64.51	58.46
4	LS	39	37	35	33	32	30	28	27	26	25
	K^*	1.753	1.748	1.741	1.735	1.731	1.724	1.716	1.712	1.708	1.703
	$ARL(\delta_d)$	167.9	142.3	121.6	104.8	91.03	79.6	70.07	62.08	55.32	49.57
5	LS	37	35	32	31	29	27	26	24	23	22
	K^*	1.654	1.649	1.64	1.637	1.631	1.624	1.62	1.612	1.608	1.604
	$ARL(\delta_d)$	164.8	137.2	115.5	98.06	84.02	72.59	63.2	55.42	48.93	43.47
6	LS	35	33	31	29	27	25	24	22	21	20
	K^*	1.584	1.579	1.574	1.568	1.562	1.555	1.552	1.544	1.54	1.536
	$ARL(\delta_d)$	162.1	133	110.4	92.59	78.44	67.08	57.87	50.32	44.1	38.92
7	LS	34	31	29	27	25	24	22	21	20	19
	K^*	1.533	1.526	1.521	1.516	1.51	1.506	1.499	1.496	1.492	1.488
	$ARL(\delta_d)$	159.7	129.3	106	87.98	73.81	62.58	53.55	46.25	40.27	35.34
8	LS	32	30	28	26	24	23	21	20	19	18
	K^*	1.491	1.487	1.482	1.477	1.471	1.468	1.461	1.457	1.453	1.449
	$ARL(\delta_d)$	157.6	126	102.2	84.01	69.87	58.78	49.95	42.87	37.13	32.42
9	LS	32	29	27	25	23	22	20	19	18	17
	K^*	1.461	1.454	1.45	1.444	1.439	1.436	1.429	1.425	1.422	1.418
	$ARL(\delta_d)$	155.6	123.1	98.85	80.51	66.44	55.5	46.87	40.01	34.48	29.99
10	LS	31	28	26	24	22	21	19	18	17	16
	K^*	1.433	1.427	1.422	1.417	1.412	1.409	1.402	1.399	1.395	1.391
	$ARL(\delta_d)$	153.8	120.4	95.81	77.4	63.4	52.63	44.2	37.54	32.22	27.91

Fuente: el autor

Tabla AII.2 Valores óptimos caso ARL bajo control 200

n	δ_d	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.1
11	LS	30	28	25	23	22	20	19	17	16	15
	K^*	1.41	1.406	1.399	1.394	1.392	1.386	1.382	1.376	1.372	1.368
	$ARL(\delta_d)$	152.1	117.9	93.03	74.59	60.71	50.09	41.86	35.39	30.25	26.12
12	LS	30	27	25	23	21	19	18	17	16	15
	K^*	1.392	1.386	1.381	1.377	1.371	1.365	1.362	1.359	1.355	1.351
	$ARL(\delta_d)$	150.6	115.6	90.5	72.04	58.26	47.81	39.77	33.5	28.54	24.57
13	LS	29	26	24	22	20	19	17	16	15	14
	K^*	1.374	1.368	1.363	1.359	1.353	1.35	1.344	1.341	1.337	1.333
	$ARL(\delta_d)$	149.1	113.5	88.14	69.7	56.04	45.77	37.9	31.8	27	23.19
14	LS	29	26	24	22	20	18	17	16	14	13
	K^*	1.359	1.354	1.35	1.345	1.34	1.334	1.331	1.328	1.32	1.316
	$ARL(\delta_d)$	147.7	111.5	85.97	67.56	54.02	43.9	36.22	30.29	25.63	21.95
15	LS	28	26	23	21	19	18	16	15	14	13
	K^*	1.345	1.341	1.335	1.33	1.325	1.322	1.316	1.313	1.309	1.305
	$ARL(\delta_d)$	146.3	109.6	83.93	65.56	52.16	42.21	34.68	28.91	24.41	20.86
16	LS	28	25	23	21	19	17	16	15	14	13
	K^*	1.333	1.328	1.324	1.32	1.315	1.309	1.306	1.303	1.299	1.295
	$ARL(\delta_d)$	145	107.8	82.02	63.71	50.44	40.64	33.29	27.67	23.31	19.89
17	LS	27	25	22	20	19	17	16	14	13	12
	K^*	1.321	1.318	1.312	1.307	1.305	1.299	1.296	1.29	1.286	1.282
	$ARL(\delta_d)$	143.8	106.1	80.22	61.97	48.85	39.21	32.01	26.52	22.29	18.97
18	LS	27	24	22	20	18	17	15	14	13	12
	K^*	1.312	1.307	1.303	1.298	1.293	1.291	1.285	1.281	1.278	1.274
	$ARL(\delta_d)$	142.6	104.5	78.53	60.35	47.36	37.88	30.81	25.48	21.37	18.17
19	LS	27	24	22	20	18	16	15	14	13	12
	K^*	1.303	1.298	1.295	1.29	1.285	1.28	1.277	1.274	1.27	1.266
	$ARL(\delta_d)$	141.5	103	76.93	58.84	45.97	36.63	29.73	24.52	20.53	17.43
20	LS	27	24	21	19	18	16	15	13	12	11
	K^*	1.296	1.291	1.285	1.28	1.278	1.273	1.27	1.263	1.26	1.256
	$ARL(\delta_d)$	140.4	101.5	75.41	57.39	44.68	35.48	28.72	23.62	19.74	16.72

Fuente: el autor

Tabla AII.3 Valores óptimos caso ARL bajo control 200											
n	δ_d	1.11	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19	1.2
2	LS	36	35	34	33	32	31	30	29	28	28
	K^*	2.203	2.197	2.191	2.185	2.179	2.172	2.165	2.158	2.15	2.15
	$ARL(\delta_d)$	68.54	63.57	59.12	55.14	51.55	48.32	45.39	42.74	40.32	38.13
3	LS	28	26	25	25	24	23	22	21	21	20
	K^*	1.859	1.849	1.843	1.843	1.837	1.831	1.824	1.817	1.817	1.81
	$ARL(\delta_d)$	53.2	48.6	44.57	41.04	37.91	35.12	32.64	30.43	28.45	26.66
4	LS	23	22	21	21	20	19	18	18	17	16
	K^*	1.694	1.688	1.683	1.683	1.677	1.671	1.664	1.664	1.657	1.65
	$ARL(\delta_d)$	44.64	40.4	36.73	33.55	30.76	28.3	26.14	24.24	22.53	21.01
5	LS	21	20	19	18	17	17	16	15	15	14
	K^*	1.599	1.594	1.589	1.583	1.577	1.577	1.571	1.564	1.564	1.557
	$ARL(\delta_d)$	38.86	34.92	31.55	28.64	26.12	23.93	22	20.31	18.83	17.49
6	LS	19	18	17	16	16	15	14	14	13	13
	K^*	1.531	1.526	1.521	1.515	1.515	1.509	1.503	1.503	1.496	1.496
	$ARL(\delta_d)$	34.57	30.9	27.77	25.1	22.81	20.81	19.08	17.57	16.23	15.07
7	LS	18	17	16	15	14	14	13	13	12	12
	K^*	1.483	1.478	1.473	1.468	1.462	1.462	1.456	1.456	1.449	1.449
	$ARL(\delta_d)$	31.23	27.79	24.88	22.4	20.28	18.47	16.89	15.53	14.32	13.27
8	LS	17	16	15	14	13	13	12	12	11	11
	K^*	1.445	1.44	1.435	1.43	1.424	1.424	1.418	1.418	1.411	1.411
	$ARL(\delta_d)$	28.53	25.29	22.57	20.26	18.3	16.63	15.17	13.93	12.82	11.88
9	LS	16	15	14	13	13	12	11	11	10	10
	K^*	1.413	1.409	1.404	1.398	1.398	1.392	1.386	1.386	1.379	1.379
	$ARL(\delta_d)$	26.29	23.23	20.67	18.51	16.7	15.14	13.79	12.64	11.63	10.76
10	LS	15	14	13	13	12	11	11	10	10	9
	K^*	1.386	1.382	1.377	1.377	1.371	1.365	1.365	1.358	1.358	1.351
	$ARL(\delta_d)$	24.39	21.49	19.08	17.07	15.36	13.9	12.67	11.58	10.67	9.845

Fuente: el autor

Tabla AII.4 Valores óptimos caso ARL bajo control 200

n	δ_d	1.11	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19	1.2
11	LS	14	13	13	12	11	11	10	10	9	9
	K^*	1.363	1.358	1.358	1.353	1.347	1.347	1.341	1.341	1.334	1.334
	$ARL(\delta_d)$	22.76	20	17.74	15.83	14.22	12.87	11.7	10.72	9.842	9.105
12	LS	14	13	12	11	11	10	10	9	9	8
	K^*	1.347	1.342	1.337	1.332	1.332	1.326	1.326	1.319	1.319	1.312
	$ARL(\delta_d)$	21.36	18.73	16.56	14.76	13.26	11.98	10.9	9.956	9.166	8.452
13	LS	13	12	12	11	10	10	9	9	8	8
	K^*	1.328	1.324	1.324	1.319	1.313	1.313	1.306	1.306	1.299	1.299
	$ARL(\delta_d)$	20.11	17.6	15.57	13.85	12.41	11.22	10.19	9.326	8.558	7.916
14	LS	13	12	11	10	10	9	9	8	8	8
	K^*	1.316	1.312	1.307	1.301	1.301	1.295	1.295	1.288	1.288	1.288
	$ARL(\delta_d)$	19.02	16.62	14.66	13.03	11.69	10.54	9.588	8.751	8.054	7.456
15	LS	12	11	11	10	10	9	9	8	8	7
	K^*	1.301	1.296	1.296	1.291	1.291	1.285	1.285	1.278	1.278	1.27
	$ARL(\delta_d)$	18.03	15.73	13.88	12.32	11.06	9.961	9.066	8.269	7.616	7.021
16	LS	12	11	10	10	9	9	8	8	8	7
	K^*	1.291	1.286	1.281	1.281	1.275	1.275	1.269	1.269	1.269	1.262
	$ARL(\delta_d)$	17.15	14.95	13.15	11.7	10.46	9.451	8.569	7.846	7.233	6.665
17	LS	11	11	10	9	9	8	8	8	7	7
	K^*	1.278	1.278	1.273	1.267	1.267	1.261	1.261	1.261	1.254	1.254
	$ARL(\delta_d)$	16.34	14.25	12.52	11.11	9.954	8.964	8.154	7.473	6.853	6.351
18	LS	11	10	10	9	9	8	8	7	7	7
	K^*	1.27	1.265	1.265	1.259	1.259	1.253	1.253	1.247	1.247	1.247
	$ARL(\delta_d)$	15.63	13.59	11.96	10.6	9.501	8.553	7.785	7.101	6.546	6.072
19	LS	11	10	9	9	8	8	8	7	7	7
	K^*	1.262	1.258	1.252	1.252	1.247	1.247	1.247	1.24	1.24	1.24
	$ARL(\delta_d)$	14.97	13.01	11.42	10.14	9.059	8.183	7.455	6.797	6.271	5.824
20	LS	11	10	9	9	8	8	7	7	7	6
	K^*	1.256	1.251	1.246	1.246	1.24	1.24	1.234	1.234	1.234	1.226
	$ARL(\delta_d)$	14.38	12.48	10.95	9.725	8.684	7.85	7.115	6.524	6.025	5.557

Fuente: el autor

Tabla AII.5 Valores óptimos caso ARL bajo control 200											
n	δ_d	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.5	3
2	LS	22	18	15	14	12	11	10	10	8	7
	K^*	2.098	2.054	2.012	1.996	1.96	1.94	1.917	1.917	1.863	1.83
	$ARL(\delta_d)$	23.83	16.84	12.9	10.48	8.841	7.696	6.85	6.222	4.49	3.741
3	LS	15	12	10	9	8	7	7	6	5	4
	K^*	1.766	1.731	1.702	1.685	1.665	1.643	1.643	1.617	1.586	1.548
	$ARL(\delta_d)$	15.66	10.73	8.108	6.556	5.548	4.851	4.367	3.981	3.026	2.631
4	LS	12	10	8	7	6	6	5	5	4	4
	K^*	1.614	1.591	1.562	1.544	1.523	1.523	1.499	1.499	1.468	1.468
	$ARL(\delta_d)$	11.97	8.132	6.144	4.998	4.264	3.788	3.424	3.176	2.535	2.304
5	LS	10	8	7	6	5	5	5	4	4	3
	K^*	1.52	1.495	1.48	1.463	1.442	1.442	1.442	1.416	1.416	1.382
	$ARL(\delta_d)$	9.795	6.637	5.064	4.156	3.582	3.219	2.968	2.756	2.316	2.148
6	LS	9	7	6	5	5	4	4	4	3	3
	K^*	1.46	1.435	1.42	1.401	1.401	1.378	1.378	1.378	1.348	1.348
	$ARL(\delta_d)$	8.354	5.677	4.366	3.62	3.182	2.865	2.667	2.526	2.18	2.08
7	LS	8	7	6	5	4	4	4	4	3	3
	K^*	1.413	1.401	1.387	1.37	1.349	1.349	1.349	1.349	1.322	1.322
	$ARL(\delta_d)$	7.317	5.03	3.913	3.278	2.884	2.65	2.491	2.379	2.113	2.044
8	LS	8	6	5	5	4	4	4	3	3	3
	K^*	1.385	1.361	1.345	1.345	1.326	1.326	1.326	1.301	1.301	1.301
	$ARL(\delta_d)$	6.563	4.515	3.544	3.036	2.695	2.501	2.371	2.258	2.072	2.024
9	LS	7	6	5	4	4	4	3	3	3	3
	K^*	1.351	1.339	1.325	1.307	1.307	1.307	1.283	1.283	1.283	1.283
	$ARL(\delta_d)$	5.941	4.153	3.295	2.818	2.558	2.394	2.262	2.19	2.046	2.014
10	LS	7	5	5	4	4	3	3	3	3	3
	K^*	1.333	1.308	1.308	1.291	1.291	1.269	1.269	1.269	1.269	1.269
	$ARL(\delta_d)$	5.474	3.826	3.103	2.678	2.454	2.289	2.2	2.142	2.03	2.008

Fuente: el autor

Tabla AII.6 Valores óptimos caso ARL bajo control 200

n	δ_d	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.5	3
11	LS	6	5	4	4	4	3	3	3	3	3
	K^*	1.306	1.293	1.277	1.277	1.277	1.256	1.256	1.256	1.256	1.256
	$ARL(\delta_d)$	5.055	3.594	2.909	2.569	2.373	2.229	2.155	2.107	2.019	2.004
12	LS	6	5	4	4	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.293	1.28	1.265	1.265	1.246	1.246	1.246	1.246	1.246	1.246
	$ARL(\delta_d)$	4.737	3.406	2.784	2.482	2.283	2.183	2.12	2.08	2.012	2.002
13	LS	6	5	4	4	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.281	1.269	1.255	1.255	1.236	1.236	1.236	1.236	1.236	1.236
	$ARL(\delta_d)$	4.471	3.25	2.681	2.411	2.234	2.147	2.094	2.061	2.008	2.001
14	LS	5	4	4	3	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.259	1.246	1.246	1.228	1.228	1.228	1.228	1.228	1.228	1.228
	$ARL(\delta_d)$	4.206	3.076	2.596	2.324	2.194	2.119	2.074	2.046	2.005	2.001
15	LS	5	4	4	3	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.251	1.237	1.237	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22
	$ARL(\delta_d)$	4.008	2.962	2.525	2.277	2.161	2.096	2.058	2.035	2.003	2
16	LS	5	4	4	3	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.243	1.23	1.23	1.213	1.213	1.213	1.213	1.213	1.213	1.213
	$ARL(\delta_d)$	3.837	2.865	2.463	2.237	2.135	2.078	2.046	2.027	2.002	2
17	LS	5	4	4	3	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.235	1.223	1.223	1.207	1.207	1.207	1.207	1.207	1.207	1.207
	$ARL(\delta_d)$	3.688	2.781	2.411	2.204	2.113	2.063	2.036	2.02	2.001	2
18	LS	5	4	3	3	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.229	1.217	1.201	1.201	1.201	1.201	1.201	1.201	1.201	1.201
	$ARL(\delta_d)$	3.557	2.707	2.335	2.176	2.095	2.052	2.028	2.016	2.001	2
19	LS	5	4	3	3	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.223	1.211	1.196	1.196	1.196	1.196	1.196	1.196	1.196	1.196
	$ARL(\delta_d)$	3.441	2.643	2.297	2.152	2.08	2.042	2.022	2.012	2.001	2
20	LS	5	4	3	3	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.217	1.206	1.191	1.191	1.191	1.191	1.191	1.191	1.191	1.191
	$ARL(\delta_d)$	3.339	2.586	2.264	2.132	2.067	2.034	2.018	2.009	2	2

Fuente: el autor

Tabla AII.7 Valores óptimos caso ARL bajo control 370											
n	δ_d	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.1
2	LS	78	74	71	68	65	62	59	57	54	52
	K^*	2.462	2.452	2.444	2.436	2.427	2.418	2.408	2.402	2.391	2.384
	$ARL(\delta_d)$	321.1	280.5	246.5	217.8	193.6	172.9	155.2	140	126.7	115.2
3	LS	65	61	58	54	52	49	46	44	42	40
	K^*	2.046	2.038	2.031	2.021	2.016	2.008	2	1.994	1.987	1.981
	$ARL(\delta_d)$	310.1	262.2	223.6	192.2	166.4	145	127.3	112.4	99.78	89.08
4	LS	59	55	51	48	45	42	40	38	36	34
	K^*	1.855	1.847	1.839	1.833	1.826	1.818	1.813	1.807	1.801	1.795
	$ARL(\delta_d)$	302.4	249.8	208.5	175.7	149.4	128	110.6	96.3	84.4	74.45
5	LS	55	51	47	44	41	38	36	34	32	30
	K^*	1.739	1.732	1.725	1.719	1.712	1.705	1.7	1.694	1.688	1.682
	$ARL(\delta_d)$	296.1	240	196.9	163.3	136.8	115.8	98.83	85.08	73.82	64.53
6	LS	52	48	44	41	38	35	33	31	29	27
	K^*	1.659	1.653	1.646	1.64	1.634	1.627	1.622	1.616	1.611	1.604
	$ARL(\delta_d)$	290.8	231.9	187.4	153.3	126.9	106.2	89.75	76.57	65.9	57.17
7	LS	50	45	42	39	36	33	31	29	27	25
	K^*	1.601	1.593	1.588	1.582	1.576	1.57	1.565	1.56	1.554	1.548
	$ARL(\delta_d)$	286.2	224.8	179.3	145	118.7	98.39	82.44	69.8	59.65	51.44
8	LS	48	44	40	37	34	31	29	27	25	23
	K^*	1.555	1.549	1.542	1.537	1.531	1.524	1.52	1.514	1.509	1.503
	$ARL(\delta_d)$	281.9	218.6	172.3	137.8	111.8	91.84	76.37	64.22	54.56	46.8
9	LS	46	42	39	35	32	30	27	25	24	22
	K^*	1.517	1.511	1.507	1.5	1.494	1.489	1.482	1.477	1.474	1.468
	$ARL(\delta_d)$	278.1	213	166	131.5	105.8	86.24	71.22	59.53	50.32	42.96
10	LS	45	41	37	34	31	28	26	24	22	21
	K^*	1.487	1.481	1.475	1.47	1.464	1.458	1.453	1.448	1.442	1.439
	$ARL(\delta_d)$	274.6	207.9	160.4	125.9	100.5	81.35	66.78	55.52	46.7	39.72

Fuente: el autor

Tabla AII.8 Valores óptimos caso ARL bajo control 370

n	δ_d	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.1
11	LS	44	40	36	33	30	27	25	23	21	20
	K^*	1.461	1.456	1.45	1.445	1.439	1.433	1.428	1.423	1.418	1.415
	$ARL(\delta_d)$	271.2	203.2	155.3	120.9	95.76	77.04	62.89	52.04	43.58	36.94
12	LS	43	39	35	32	29	26	24	22	20	19
	K^*	1.439	1.434	1.428	1.423	1.417	1.411	1.406	1.401	1.396	1.393
	$ARL(\delta_d)$	268.2	198.9	150.6	116.4	91.54	73.21	59.46	48.97	40.86	34.52
13	LS	42	38	34	31	28	26	23	21	20	18
	K^*	1.419	1.414	1.408	1.403	1.398	1.394	1.387	1.382	1.379	1.374
	$ARL(\delta_d)$	265.2	194.8	146.3	112.2	87.71	69.77	56.39	46.26	38.48	32.39
14	LS	42	37	33	30	27	25	23	21	19	17
	K^*	1.403	1.397	1.391	1.386	1.381	1.377	1.372	1.368	1.362	1.356
	$ARL(\delta_d)$	262.5	191	142.4	108.4	84.23	66.65	53.65	43.84	36.34	30.51
15	LS	41	37	33	29	27	24	22	20	18	17
	K^*	1.388	1.383	1.377	1.371	1.367	1.361	1.357	1.352	1.347	1.344
	$ARL(\delta_d)$	259.8	187.5	138.6	104.9	81.04	63.81	51.15	41.66	34.43	28.85
16	LS	40	36	32	29	26	23	21	19	18	16
	K^*	1.373	1.369	1.363	1.358	1.353	1.347	1.343	1.338	1.335	1.329
	$ARL(\delta_d)$	257.3	184.1	135.2	101.6	78.1	61.22	48.87	39.67	32.72	27.34
17	LS	40	35	31	28	25	23	21	19	17	16
	K^*	1.362	1.356	1.35	1.346	1.34	1.336	1.332	1.327	1.322	1.319
	$ARL(\delta_d)$	255	180.9	131.9	98.59	75.37	58.84	46.81	37.89	31.15	26
18	LS	39	35	31	28	25	22	20	18	17	15
	K^*	1.35	1.345	1.34	1.336	1.33	1.325	1.32	1.315	1.313	1.307
	$ARL(\delta_d)$	252.7	177.9	128.8	95.76	72.86	56.63	44.9	36.23	29.74	24.75
19	LS	39	34	30	27	24	22	20	18	16	15
	K^*	1.34	1.335	1.329	1.325	1.319	1.316	1.311	1.307	1.301	1.298
	$ARL(\delta_d)$	250.5	175	126	93.09	70.5	54.6	43.15	34.73	28.43	23.64
20	LS	38	34	30	27	24	21	19	17	16	14
	K^*	1.33	1.326	1.321	1.316	1.311	1.305	1.301	1.296	1.293	1.287
	$ARL(\delta_d)$	248.3	172.3	123.2	90.59	68.31	52.69	41.52	33.33	27.25	22.6

Fuente: el autor

Tabla AII.9 Valores óptimos caso ARL bajo control 370											
n	δ_d	1.11	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19	1.2
2	LS	50	48	47	45	43	42	40	39	38	37
	K^*	2.376	2.368	2.363	2.354	2.345	2.34	2.33	2.325	2.32	2.314
	$ARL(\delta_d)$	105.2	96.36	88.58	81.69	75.57	70.12	65.24	60.86	56.91	53.35
3	LS	38	36	34	33	32	30	29	28	27	26
	K^*	1.973	1.966	1.958	1.954	1.949	1.94	1.935	1.93	1.925	1.919
	$ARL(\delta_d)$	79.93	72.06	65.26	59.36	54.21	49.69	45.71	42.2	39.08	36.3
4	LS	32	30	29	27	26	25	24	23	22	21
	K^*	1.788	1.781	1.777	1.768	1.764	1.759	1.755	1.75	1.744	1.739
	$ARL(\delta_d)$	66.07	58.96	52.9	47.7	43.22	39.33	35.94	32.98	30.36	28.06
5	LS	28	27	25	24	23	22	21	20	19	18
	K^*	1.675	1.672	1.664	1.66	1.656	1.651	1.647	1.642	1.636	1.631
	$ARL(\delta_d)$	56.79	50.31	44.82	40.17	36.19	32.77	29.81	27.23	24.98	23
6	LS	25	24	23	21	20	19	18	17	17	16
	K^*	1.598	1.594	1.59	1.582	1.578	1.573	1.568	1.563	1.563	1.557
	$ARL(\delta_d)$	49.98	44.01	39.02	34.79	31.21	28.15	25.51	23.24	21.28	19.54
7	LS	23	22	21	20	18	17	17	16	15	14
	K^*	1.541	1.538	1.534	1.53	1.521	1.516	1.516	1.511	1.506	1.5
	$ARL(\delta_d)$	44.72	39.19	34.59	30.74	27.46	24.7	22.35	20.31	18.54	17
8	LS	22	20	19	18	17	16	15	14	14	13
	K^*	1.499	1.492	1.488	1.484	1.48	1.475	1.47	1.465	1.465	1.459
	$ARL(\delta_d)$	40.51	35.34	31.08	27.53	24.54	22.02	19.87	18.02	16.45	15.06
9	LS	20	19	18	17	16	15	14	13	13	12
	K^*	1.462	1.458	1.454	1.45	1.446	1.441	1.436	1.431	1.431	1.425
	$ARL(\delta_d)$	37.02	32.2	28.23	24.94	22.19	19.87	17.9	16.21	14.78	13.53
10	LS	19	18	17	16	15	14	13	13	12	11
	K^*	1.433	1.429	1.425	1.421	1.417	1.412	1.407	1.407	1.402	1.396
	$ARL(\delta_d)$	34.11	29.57	25.86	22.8	20.25	18.1	16.29	14.76	13.43	12.28

Fuente: el autor

Tabla AII.10 Valores óptimos caso ARL bajo control 370

n	δ_d	1.11	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19	1.2
11	LS	18	17	16	15	14	13	12	12	11	11
	K^*	1.408	1.404	1.401	1.396	1.392	1.387	1.382	1.382	1.376	1.376
	$ARL(\delta_d)$	31.62	27.34	23.86	20.99	18.61	16.62	14.94	13.53	12.3	11.27
12	LS	17	16	15	14	13	13	12	11	11	10
	K^*	1.386	1.383	1.379	1.374	1.37	1.37	1.365	1.36	1.36	1.354
	$ARL(\delta_d)$	29.47	25.42	22.14	19.45	17.22	15.39	13.82	12.48	11.37	10.39
13	LS	17	16	14	14	13	12	11	11	10	10
	K^*	1.37	1.367	1.359	1.359	1.355	1.35	1.345	1.345	1.339	1.339
	$ARL(\delta_d)$	27.6	23.77	20.65	18.14	16.04	14.3	12.83	11.62	10.55	9.671
14	LS	16	15	14	13	12	11	11	10	10	9
	K^*	1.353	1.349	1.345	1.341	1.337	1.332	1.332	1.326	1.326	1.32
	$ARL(\delta_d)$	25.94	22.3	19.36	16.96	14.99	13.35	12	10.84	9.874	9.019
15	LS	15	14	13	12	12	11	10	10	9	9
	K^*	1.337	1.333	1.329	1.325	1.325	1.32	1.315	1.315	1.309	1.309
	$ARL(\delta_d)$	24.46	20.99	18.2	15.93	14.09	12.55	11.25	10.18	9.251	8.48
16	LS	15	14	13	12	11	11	10	9	9	8
	K^*	1.326	1.322	1.318	1.314	1.31	1.31	1.305	1.299	1.299	1.293
	$ARL(\delta_d)$	23.16	19.85	17.19	15.04	13.27	11.84	10.61	9.58	8.73	7.978
17	LS	14	13	12	12	11	10	10	9	9	8
	K^*	1.312	1.309	1.305	1.305	1.3	1.295	1.295	1.29	1.29	1.284
	$ARL(\delta_d)$	21.97	18.8	16.27	14.24	12.56	11.18	10.05	9.07	8.274	7.559
18	LS	14	13	12	11	10	10	9	9	8	8
	K^*	1.303	1.3	1.296	1.291	1.287	1.287	1.281	1.281	1.276	1.276
	$ARL(\delta_d)$	20.9	17.87	15.45	13.5	11.9	10.61	9.512	8.618	7.83	7.189
19	LS	14	13	12	11	10	9	9	8	8	8
	K^*	1.295	1.291	1.288	1.284	1.279	1.274	1.274	1.268	1.268	1.268
	$ARL(\delta_d)$	19.94	17.03	14.72	12.85	11.33	10.08	9.059	8.181	7.464	6.86
20	LS	13	12	11	10	10	9	9	8	8	7
	K^*	1.284	1.28	1.276	1.272	1.272	1.267	1.267	1.261	1.261	1.255
	$ARL(\delta_d)$	19.04	16.24	14.03	12.24	10.82	9.617	8.653	7.813	7.136	6.527

Fuente: el autor

Tabla AII.11 Valores óptimos caso ARL bajo control 370											
n	δ_d	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.5	3
2	LS	28	22	19	16	14	13	12	11	8	7
	K^*	2.255	2.203	2.17	2.131	2.1	2.083	2.064	2.044	1.968	1.936
	$ARL(\delta_d)$	31.15	21	15.57	12.31	10.19	8.735	7.682	6.887	4.796	3.927
3	LS	19	15	12	10	9	8	7	7	5	5
	K^*	1.872	1.836	1.801	1.772	1.755	1.736	1.714	1.714	1.659	1.659
	$ARL(\delta_d)$	19.87	12.99	9.485	7.468	6.204	5.347	4.736	4.3	3.156	2.725
4	LS	15	11	9	8	7	6	6	5	4	4
	K^*	1.698	1.659	1.634	1.618	1.601	1.581	1.581	1.556	1.526	1.526
	$ARL(\delta_d)$	14.88	9.61	7.03	5.585	4.683	4.077	3.672	3.352	2.607	2.342
5	LS	12	10	8	7	6	5	5	5	4	3
	K^*	1.588	1.568	1.544	1.529	1.512	1.491	1.491	1.491	1.465	1.432
	$ARL(\delta_d)$	11.97	7.749	5.705	4.581	3.883	3.417	3.116	2.9	2.36	2.17
6	LS	11	8	7	6	5	5	4	4	3	3
	K^*	1.522	1.491	1.478	1.463	1.444	1.444	1.422	1.422	1.392	1.392
	$ARL(\delta_d)$	10.07	6.52	4.862	3.946	3.382	3.038	2.775	2.608	2.209	2.092
7	LS	10	7	6	5	5	4	4	4	3	3
	K^*	1.471	1.44	1.426	1.409	1.409	1.389	1.389	1.389	1.362	1.362
	$ARL(\delta_d)$	8.727	5.677	4.274	3.507	3.069	2.759	2.571	2.439	2.132	2.051
8	LS	9	7	6	5	4	4	4	4	3	3
	K^*	1.43	1.409	1.397	1.381	1.363	1.363	1.363	1.363	1.338	1.338
	$ARL(\delta_d)$	7.716	5.081	3.876	3.216	2.817	2.586	2.432	2.325	2.085	2.029
9	LS	8	6	5	5	4	4	4	3	3	3
	K^*	1.395	1.373	1.359	1.359	1.341	1.341	1.341	1.318	1.318	1.318
	$ARL(\delta_d)$	6.929	4.595	3.538	3.002	2.655	2.461	2.332	2.225	2.055	2.016
10	LS	8	6	5	4	4	4	3	3	3	3
	K^*	1.373	1.353	1.339	1.323	1.323	1.323	1.302	1.302	1.302	1.302
	$ARL(\delta_d)$	6.328	4.241	3.305	2.802	2.533	2.367	2.238	2.168	2.036	2.009

Fuente: el autor

Tabla AII.12 Valores óptimos caso ARL bajo control 370

n	δ_d	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.5	3
11	LS	7	6	5	4	4	3	3	3	3	3
	K^*	1.346	1.336	1.323	1.308	1.308	1.287	1.287	1.287	1.287	1.287
	$ARL(\delta_d)$	5.806	3.96	3.121	2.673	2.439	2.273	2.185	2.127	2.023	2.005
12	LS	7	5	4	4	4	3	3	3	3	3
	K^*	1.331	1.309	1.294	1.294	1.294	1.275	1.275	1.275	1.275	1.275
	$ARL(\delta_d)$	5.404	3.689	2.936	2.57	2.364	2.219	2.144	2.097	2.015	2.003
13	LS	6	5	4	4	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.308	1.297	1.282	1.282	1.264	1.264	1.264	1.264	1.264	1.264
	$ARL(\delta_d)$	5.032	3.496	2.812	2.486	2.28	2.176	2.113	2.074	2.01	2.002
14	LS	6	5	4	4	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.296	1.286	1.272	1.272	1.254	1.254	1.254	1.254	1.254	1.254
	$ARL(\delta_d)$	4.743	3.335	2.71	2.418	2.233	2.143	2.089	2.056	2.007	2.001
15	LS	6	5	4	4	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.286	1.276	1.263	1.263	1.246	1.246	1.246	1.246	1.246	1.246
	$ARL(\delta_d)$	4.497	3.199	2.625	2.36	2.194	2.116	2.071	2.043	2.004	2.001
16	LS	6	4	4	3	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.277	1.254	1.254	1.238	1.238	1.238	1.238	1.238	1.238	1.238
	$ARL(\delta_d)$	4.285	3.043	2.552	2.286	2.163	2.095	2.056	2.033	2.003	2
17	LS	5	4	4	3	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.259	1.247	1.247	1.231	1.231	1.231	1.231	1.231	1.231	1.231
	$ARL(\delta_d)$	4.061	2.94	2.49	2.247	2.137	2.078	2.044	2.025	2.002	2
18	LS	5	4	4	3	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.251	1.24	1.24	1.224	1.224	1.224	1.224	1.224	1.224	1.224
	$ARL(\delta_d)$	3.896	2.85	2.436	2.213	2.115	2.063	2.035	2.02	2.001	2
19	LS	5	4	4	3	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.245	1.233	1.233	1.218	1.218	1.218	1.218	1.218	1.218	1.218
	$ARL(\delta_d)$	3.75	2.773	2.39	2.185	2.097	2.052	2.028	2.015	2.001	2
20	LS	5	4	3	3	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.238	1.227	1.213	1.213	1.213	1.213	1.213	1.213	1.213	1.213
	$ARL(\delta_d)$	3.621	2.704	2.32	2.161	2.082	2.043	2.022	2.012	2	2

Fuente: el autor

Tabla AII.13 Valores óptimos caso ARL bajo control 500

n	δ_d	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.1
2	LS	95	91	86	82	78	74	71	68	65	62
	K^+	2.548	2.54	2.53	2.521	2.511	2.501	2.493	2.485	2.476	2.467
	$ARL(\delta_d)$	429.1	370.9	322.8	282.6	249	220.5	196.4	175.8	158	142.7
3	LS	79	74	70	66	62	58	55	52	49	47
	K^+	2.104	2.096	2.089	2.081	2.073	2.064	2.057	2.049	2.041	2.035
	$ARL(\delta_d)$	413.9	345.9	291.7	248.1	212.7	183.8	159.8	140	123.3	109.3
4	LS	71	66	62	58	54	50	47	44	42	39
	K^+	1.9	1.893	1.886	1.879	1.872	1.863	1.857	1.849	1.844	1.836
	$ARL(\delta_d)$	403.1	328.9	271.2	226	190.1	161.4	138.2	119.2	103.6	90.72
5	LS	66	61	57	53	49	45	42	39	37	35
	K^+	1.778	1.771	1.765	1.758	1.751	1.743	1.736	1.729	1.724	1.719
	$ARL(\delta_d)$	394.5	315.5	255.5	209.4	173.6	145.3	122.9	104.8	90.18	78.19
6	LS	63	58	53	49	45	42	39	36	34	31
	K^+	1.694	1.688	1.681	1.674	1.667	1.662	1.655	1.649	1.644	1.636
	$ARL(\delta_d)$	387.1	304.3	242.7	196.1	160.5	132.8	111.2	93.94	80.13	68.95
7	LS	60	55	50	46	42	39	36	33	31	29
	K^+	1.632	1.626	1.619	1.612	1.606	1.6	1.594	1.587	1.582	1.577
	$ARL(\delta_d)$	380.6	294.7	231.8	185	149.7	122.7	101.7	85.3	72.24	61.77
8	LS	58	53	48	44	40	37	34	31	29	27
	K^+	1.584	1.578	1.571	1.565	1.559	1.553	1.547	1.541	1.536	1.531
	$ARL(\delta_d)$	374.8	286.2	222.3	175.5	140.6	114.2	93.96	78.22	65.84	55.98
9	LS	56	51	46	42	38	35	32	29	27	25
	K^+	1.545	1.539	1.532	1.526	1.52	1.515	1.509	1.502	1.497	1.492
	$ARL(\delta_d)$	369.4	278.5	213.9	167.2	132.7	106.9	87.36	72.28	60.5	51.2
10	LS	55	49	44	40	37	33	30	28	26	24
	K^+	1.513	1.506	1.5	1.494	1.489	1.482	1.476	1.472	1.467	1.462
	$ARL(\delta_d)$	364.5	271.5	206.4	159.8	125.8	100.6	81.69	67.21	55.99	47.18

Fuente: el autor

Tabla AII.14 Valores óptimos caso ARL bajo control 500

n	δ_d	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.1
11	LS	53	48	43	39	35	32	29	27	24	23
	K^*	1.485	1.479	1.473	1.468	1.461	1.456	1.45	1.446	1.439	1.436
	$ARL(\delta_d)$	360	265.2	199.5	153.1	119.7	95.09	76.74	62.82	52.09	43.75
12	LS	52	47	42	38	34	31	28	26	23	21
	K^*	1.462	1.456	1.45	1.445	1.439	1.434	1.428	1.424	1.417	1.411
	$ARL(\delta_d)$	355.7	259.2	193.3	147.1	114.2	90.16	72.37	58.97	48.71	40.75
13	LS	51	46	41	37	33	30	27	25	22	21
	K^*	1.441	1.436	1.43	1.425	1.419	1.414	1.408	1.404	1.397	1.394
	$ARL(\delta_d)$	351.6	253.7	187.5	141.7	109.2	85.74	68.48	55.57	45.73	38.16
14	LS	50	45	40	36	32	29	26	24	22	20
	K^*	1.423	1.418	1.412	1.407	1.401	1.396	1.39	1.386	1.382	1.376
	$ARL(\delta_d)$	347.8	248.6	182.2	136.6	104.7	81.74	64.99	52.53	43.1	35.85
15	LS	49	44	39	35	31	28	25	23	21	19
	K^*	1.407	1.402	1.396	1.391	1.385	1.38	1.374	1.37	1.366	1.36
	$ARL(\delta_d)$	344.2	243.8	177.2	132	100.5	78.11	61.84	49.8	40.74	33.8
16	LS	49	43	38	34	30	27	24	22	20	18
	K^*	1.393	1.387	1.382	1.377	1.371	1.366	1.36	1.356	1.351	1.346
	$ARL(\delta_d)$	340.7	239.2	172.6	127.7	96.71	74.8	58.98	47.34	38.61	31.96
17	LS	48	42	37	33	29	26	24	21	19	18
	K^*	1.38	1.374	1.369	1.363	1.358	1.353	1.349	1.342	1.338	1.335
	$ARL(\delta_d)$	337.4	234.9	168.3	123.7	93.2	71.76	56.37	45.09	36.69	30.32
18	LS	47	42	37	32	29	26	23	21	19	17
	K^*	1.368	1.363	1.358	1.351	1.347	1.342	1.337	1.332	1.328	1.323
	$ARL(\delta_d)$	334.2	230.8	164.2	120	89.94	68.96	53.98	43.06	34.95	28.81
19	LS	47	41	36	32	28	25	22	20	18	17
	K^*	1.358	1.352	1.347	1.342	1.336	1.331	1.325	1.321	1.316	1.314
	$ARL(\delta_d)$	331.2	226.9	160.3	116.5	86.91	66.36	51.77	41.18	33.35	27.46
20	LS	46	40	35	31	28	25	22	20	18	16
	K^*	1.347	1.342	1.336	1.331	1.327	1.322	1.317	1.313	1.308	1.303
	$ARL(\delta_d)$	328.3	223.2	156.7	113.3	84.09	63.97	49.74	39.47	31.9	26.21

Fuente: el autor

Tabla AII.15 Valores óptimos caso ARL bajo control 500											
n	δ_d	1.11	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19	1.2
2	LS	59	57	54	52	50	48	47	45	43	42
	K^+	2.457	2.451	2.44	2.432	2.424	2.416	2.412	2.403	2.394	2.389
	$ARL(\delta_d)$	129.4	117.8	107.7	98.78	90.9	83.91	77.7	72.15	67.18	62.71
3	LS	44	42	40	38	36	35	33	32	31	29
	K^+	2.026	2.02	2.013	2.006	1.998	1.994	1.986	1.982	1.977	1.967
	$ARL(\delta_d)$	97.38	87.23	78.51	70.99	64.46	58.78	53.8	49.42	45.56	42.12
4	LS	37	35	33	31	30	28	27	26	25	24
	K^+	1.83	1.824	1.817	1.81	1.806	1.798	1.794	1.79	1.785	1.78
	$ARL(\delta_d)$	79.92	70.84	63.14	56.59	50.97	46.13	41.93	38.28	35.09	32.28
5	LS	33	31	29	27	26	24	23	22	21	20
	K^+	1.713	1.707	1.701	1.694	1.69	1.682	1.678	1.673	1.669	1.664
	$ARL(\delta_d)$	68.3	60.07	53.17	47.34	42.4	38.16	34.53	31.38	28.65	26.27
6	LS	29	27	26	24	23	22	21	20	19	18
	K^+	1.63	1.624	1.621	1.613	1.61	1.606	1.602	1.597	1.593	1.588
	$ARL(\delta_d)$	59.81	52.27	46.02	40.77	36.35	32.6	29.4	26.64	24.26	22.18
7	LS	27	25	24	22	21	20	19	18	17	16
	K^+	1.572	1.565	1.562	1.555	1.551	1.547	1.543	1.539	1.534	1.529
	$ARL(\delta_d)$	53.28	46.33	40.61	35.83	31.84	28.47	25.6	23.14	21.03	19.2
8	LS	25	23	22	20	19	18	17	16	15	15
	K^+	1.525	1.519	1.516	1.508	1.505	1.5	1.496	1.491	1.487	1.487
	$ARL(\delta_d)$	48.05	41.61	36.33	31.96	28.31	25.25	22.66	20.45	18.55	16.93
9	LS	23	22	20	19	18	17	16	15	14	13
	K^+	1.486	1.483	1.477	1.473	1.469	1.465	1.461	1.456	1.451	1.446
	$ARL(\delta_d)$	43.77	37.77	32.86	28.84	25.49	22.69	20.33	18.32	16.6	15.12
10	LS	22	20	19	18	17	16	15	14	13	12
	K^+	1.456	1.45	1.447	1.443	1.44	1.436	1.431	1.427	1.422	1.416
	$ARL(\delta_d)$	40.18	34.56	30	26.27	23.18	20.6	18.43	16.59	15.02	13.68

Fuente: el autor

Tabla AII.16 Valores óptimos caso ARL bajo control 500

n	δ_d	1.11	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19	1.2
11	LS	21	19	18	17	16	15	14	13	12	12
	K^*	1.431	1.425	1.421	1.418	1.414	1.41	1.405	1.401	1.396	1.396
	$ARL(\delta_d)$	37.14	31.85	27.58	24.11	21.24	18.85	16.85	15.16	13.71	12.5
12	LS	20	18	17	16	15	14	13	12	12	11
	K^*	1.408	1.402	1.399	1.395	1.391	1.387	1.383	1.378	1.378	1.372
	$ARL(\delta_d)$	34.51	29.52	25.52	22.26	19.59	17.37	15.51	13.94	12.64	11.49
13	LS	19	17	16	15	14	13	12	12	11	10
	K^*	1.389	1.382	1.379	1.375	1.371	1.367	1.362	1.362	1.357	1.351
	$ARL(\delta_d)$	32.22	27.5	23.73	20.67	18.17	16.1	14.37	12.93	11.69	10.64
14	LS	18	17	15	14	13	13	12	11	10	10
	K^*	1.371	1.368	1.361	1.357	1.353	1.353	1.348	1.344	1.338	1.338
	$ARL(\delta_d)$	30.2	25.75	22.17	19.29	16.94	15.02	13.39	12.03	10.88	9.918
15	LS	17	16	15	14	13	12	11	11	10	9
	K^*	1.355	1.351	1.348	1.344	1.34	1.336	1.331	1.331	1.326	1.32
	$ARL(\delta_d)$	28.41	24.18	20.81	18.09	15.87	14.04	12.52	11.28	10.19	9.273
16	LS	17	15	14	13	12	12	11	10	10	9
	K^*	1.343	1.337	1.333	1.329	1.325	1.325	1.321	1.315	1.315	1.31
	$ARL(\delta_d)$	26.83	22.78	19.58	17.01	14.91	13.22	11.78	10.58	9.596	8.728
17	LS	16	15	14	13	12	11	10	10	9	9
	K^*	1.329	1.326	1.323	1.319	1.315	1.311	1.306	1.306	1.3	1.3
	$ARL(\delta_d)$	25.39	21.55	18.51	16.07	14.08	12.45	11.1	9.994	9.037	8.252
18	LS	16	14	13	12	11	11	10	9	9	8
	K^*	1.32	1.313	1.31	1.306	1.302	1.302	1.297	1.292	1.292	1.286
	$ARL(\delta_d)$	24.11	20.42	17.52	15.2	13.31	11.79	10.51	9.444	8.567	7.799
19	LS	15	14	13	12	11	10	10	9	9	8
	K^*	1.308	1.305	1.301	1.297	1.293	1.289	1.289	1.284	1.284	1.278
	$ARL(\delta_d)$	22.93	19.42	16.65	14.44	12.64	11.18	9.991	8.975	8.151	7.419
20	LS	15	14	12	12	11	10	9	9	8	8
	K^*	1.3	1.297	1.29	1.29	1.286	1.281	1.276	1.276	1.271	1.271
	$ARL(\delta_d)$	21.87	18.51	15.84	13.75	12.04	10.64	9.491	8.555	7.742	7.081

Fuente: el autor

Tabla AII.17 Valores óptimos caso ARL bajo control 500

n	δ_d	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.5	3
2	LS	31	24	20	17	15	14	12	11	9	7
	K^+	2.325	2.27	2.229	2.193	2.164	2.148	2.113	2.092	2.045	1.985
	$ARL(\delta_d)$	35.41	23.33	17.01	13.28	10.9	9.274	8.092	7.22	4.966	4.019
3	LS	21	16	13	11	10	9	8	7	6	5
	K^+	1.92	1.879	1.846	1.82	1.805	1.788	1.769	1.747	1.722	1.692
	$ARL(\delta_d)$	22.28	14.22	10.23	7.96	6.558	5.616	4.946	4.45	3.243	2.761
4	LS	16	12	10	8	7	7	6	6	4	4
	K^+	1.732	1.696	1.673	1.645	1.627	1.627	1.607	1.607	1.554	1.554
	$ARL(\delta_d)$	16.51	10.43	7.514	5.882	4.888	4.253	3.785	3.467	2.643	2.361
5	LS	14	10	8	7	6	6	5	5	4	3
	K^+	1.627	1.591	1.566	1.551	1.534	1.534	1.514	1.514	1.489	1.456
	$ARL(\delta_d)$	13.21	8.323	6.031	4.785	4.023	3.549	3.192	2.959	2.382	2.18
6	LS	12	9	7	6	5	5	5	4	4	3
	K^+	1.55	1.522	1.498	1.483	1.465	1.465	1.465	1.442	1.442	1.413
	$ARL(\delta_d)$	11.03	6.986	5.107	4.098	3.486	3.111	2.858	2.65	2.24	2.099
7	LS	11	8	6	6	5	4	4	4	3	3
	K^+	1.497	1.47	1.444	1.444	1.428	1.407	1.407	1.407	1.381	1.381
	$ARL(\delta_d)$	9.506	6.054	4.469	3.66	3.148	2.815	2.612	2.47	2.141	2.055
8	LS	10	7	6	5	5	4	4	4	3	3
	K^+	1.455	1.426	1.413	1.398	1.398	1.38	1.38	1.38	1.355	1.355
	$ARL(\delta_d)$	8.368	5.365	4.029	3.311	2.912	2.629	2.463	2.348	2.091	2.031
9	LS	9	7	5	5	4	4	4	3	3	3
	K^+	1.419	1.4	1.374	1.374	1.357	1.357	1.357	1.334	1.334	1.334
	$ARL(\delta_d)$	7.484	4.867	3.668	3.079	2.706	2.495	2.357	2.243	2.059	2.018
10	LS	8	6	5	4	4	4	3	3	3	3
	K^+	1.388	1.367	1.354	1.338	1.338	1.338	1.317	1.317	1.317	1.317
	$ARL(\delta_d)$	6.778	4.442	3.412	2.867	2.574	2.395	2.257	2.182	2.039	2.01

Fuente: el autor

Tabla AII.18 Valores óptimos caso ARL bajo control 500

n	δ_d	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.5	3
11	LS	8	6	5	4	4	4	3	3	3	3
	K^+	1.369	1.349	1.337	1.322	1.322	1.322	1.302	1.302	1.302	1.302
	$ARL(\delta_d)$	6.232	4.13	3.212	2.727	2.473	2.318	2.2	2.138	2.025	2.006
12	LS	7	5	5	4	4	3	3	3	3	3
	K^+	1.344	1.322	1.322	1.308	1.308	1.289	1.289	1.289	1.289	1.289
	$ARL(\delta_d)$	5.747	3.841	3.051	2.616	2.393	2.237	2.157	2.105	2.017	2.003
13	LS	7	5	4	4	4	3	3	3	3	3
	K^+	1.33	1.309	1.295	1.295	1.295	1.277	1.277	1.277	1.277	1.277
	$ARL(\delta_d)$	5.37	3.628	2.881	2.526	2.329	2.192	2.123	2.08	2.011	2.002
14	LS	7	5	4	4	3	3	3	3	3	3
	K^+	1.318	1.298	1.284	1.284	1.267	1.267	1.267	1.267	1.267	1.267
	$ARL(\delta_d)$	5.053	3.451	2.77	2.451	2.253	2.156	2.097	2.062	2.007	2.001
15	LS	6	5	4	4	3	3	3	3	3	3
	K^+	1.298	1.287	1.274	1.274	1.258	1.258	1.258	1.258	1.258	1.258
	$ARL(\delta_d)$	4.741	3.301	2.677	2.39	2.212	2.127	2.077	2.047	2.005	2.001
16	LS	6	5	4	4	3	3	3	3	3	3
	K^+	1.288	1.278	1.266	1.266	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25
	$ARL(\delta_d)$	4.503	3.173	2.598	2.338	2.178	2.104	2.061	2.037	2.003	2
17	LS	6	4	4	3	3	3	3	3	3	3
	K^+	1.279	1.258	1.258	1.242	1.242	1.242	1.242	1.242	1.242	1.242
	$ARL(\delta_d)$	4.298	3.025	2.531	2.269	2.15	2.085	2.049	2.028	2.002	2
18	LS	6	4	4	3	3	3	3	3	3	3
	K^+	1.271	1.25	1.25	1.235	1.235	1.235	1.235	1.235	1.235	1.235
	$ARL(\delta_d)$	4.119	2.927	2.473	2.233	2.126	2.07	2.039	2.022	2.001	2
19	LS	5	4	4	3	3	3	3	3	3	3
	K^+	1.255	1.244	1.244	1.229	1.229	1.229	1.229	1.229	1.229	1.229
	$ARL(\delta_d)$	3.919	2.841	2.423	2.202	2.107	2.057	2.031	2.017	2.001	2
20	LS	5	4	4	3	3	3	3	3	3	3
	K^+	1.248	1.237	1.237	1.223	1.223	1.223	1.223	1.223	1.223	1.223
	$ARL(\delta_d)$	3.775	2.766	2.379	2.176	2.091	2.047	2.025	2.013	2.001	2

Fuente: el autor

Tabla AII.19 Valores óptimos caso ARL bajo control 1000											
n	δ_d	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.1
2	LS	152	143	135	127	120	113	107	101	96	91
	K^+	2.741	2.73	2.72	2.709	2.699	2.688	2.677	2.667	2.657	2.647
	$ARL(\delta_d)$	836	705	599.3	513.3	442.9	384.6	336.2	295.6	261.4	232.4
3	LS	126	117	108	101	94	88	82	77	72	68
	K^+	2.235	2.226	2.216	2.207	2.198	2.189	2.18	2.172	2.163	2.156
	$ARL(\delta_d)$	803.9	653.6	537.1	445.9	373.6	315.9	269.2	231.3	200.1	174.3
4	LS	113	104	95	88	81	75	70	65	60	56
	K^+	2.005	1.996	1.987	1.979	1.971	1.963	1.955	1.948	1.939	1.932
	$ARL(\delta_d)$	781.2	618.7	496.3	402.9	330.8	274.5	230	194.4	165.8	142.6
5	LS	105	95	87	80	73	67	62	57	53	49
	K^+	1.867	1.858	1.85	1.843	1.835	1.827	1.82	1.812	1.806	1.798
	$ARL(\delta_d)$	762.9	591.3	465.1	370.9	299.6	244.9	202.4	169.1	142.6	121.4
6	LS	99	89	81	74	67	61	56	52	48	44
	K^+	1.772	1.764	1.757	1.75	1.742	1.734	1.727	1.721	1.715	1.707
	$ARL(\delta_d)$	747.4	568.6	439.7	345.3	275.1	222.1	181.5	150.1	125.4	105.9
7	LS	94	85	77	69	63	57	52	48	44	40
	K^+	1.702	1.695	1.688	1.68	1.674	1.666	1.66	1.654	1.647	1.64
	$ARL(\delta_d)$	733.7	548.9	418.2	324	255	203.7	164.9	135.1	112.1	93.94
8	LS	91	81	73	66	59	54	49	44	40	37
	K^+	1.648	1.641	1.634	1.627	1.62	1.614	1.607	1.6	1.593	1.588
	$ARL(\delta_d)$	721.4	531.6	399.6	305.9	238.1	188.4	151.2	123	101.3	84.41
9	LS	88	78	70	62	56	51	46	42	38	35
	K^+	1.605	1.598	1.591	1.584	1.577	1.571	1.565	1.559	1.552	1.547
	$ARL(\delta_d)$	710.2	516.1	383.1	290	223.6	175.3	139.6	112.8	92.39	76.6
10	LS	85	75	67	60	54	48	43	39	36	32
	K^+	1.568	1.561	1.555	1.549	1.542	1.535	1.529	1.523	1.518	1.511
	$ARL(\delta_d)$	699.9	502	368.3	276	210.9	164.1	129.8	104.2	84.9	70.06

Fuente: el autor

Tabla AII.20 Valores óptimos caso ARL bajo control 1000

n	δ_d	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.1
11	LS	83	73	65	58	51	46	41	37	34	31
	K^*	1.538	1.531	1.525	1.519	1.512	1.506	1.499	1.493	1.488	1.483
	$ARL(\delta_d)$	690.3	489.1	355	263.5	199.7	154.2	121.2	96.8	78.48	64.51
12	LS	81	71	63	56	49	44	39	36	32	29
	K^*	1.512	1.505	1.499	1.493	1.486	1.48	1.474	1.469	1.463	1.457
	$ARL(\delta_d)$	681.3	477.2	342.9	252.2	189.7	145.5	113.7	90.35	72.93	59.72
13	LS	79	69	61	54	48	42	38	34	31	28
	K^*	1.489	1.482	1.476	1.47	1.464	1.457	1.452	1.446	1.441	1.436
	$ARL(\delta_d)$	672.8	466.1	331.7	242	180.6	137.7	107	84.66	68.08	55.56
14	LS	78	68	59	52	46	41	36	33	29	26
	K^*	1.469	1.463	1.456	1.45	1.444	1.438	1.432	1.427	1.421	1.415
	$ARL(\delta_d)$	664.8	455.7	321.4	232.6	172.5	130.7	101.1	79.62	63.78	51.9
15	LS	76	66	58	51	45	40	35	31	28	25
	K^*	1.451	1.445	1.439	1.433	1.427	1.421	1.415	1.409	1.404	1.398
	$ARL(\delta_d)$	657.2	446	311.8	224	165	124.4	95.72	75.1	59.97	48.67
16	LS	75	65	57	49	43	38	34	30	27	24
	K^*	1.435	1.429	1.423	1.416	1.411	1.405	1.4	1.394	1.389	1.383
	$ARL(\delta_d)$	650	436.9	302.9	216.1	158.2	118.6	90.88	71.04	56.56	45.78
17	LS	74	64	55	48	42	37	33	29	26	23
	K^*	1.421	1.415	1.408	1.402	1.397	1.391	1.386	1.38	1.375	1.369
	$ARL(\delta_d)$	643.1	428.3	294.6	208.7	151.9	113.3	86.49	67.38	53.49	43.19
18	LS	73	63	54	47	41	36	32	28	25	23
	K^*	1.408	1.402	1.395	1.39	1.384	1.378	1.373	1.367	1.362	1.358
	$ARL(\delta_d)$	636.4	420.1	286.7	201.8	146.1	108.5	82.48	64.04	50.71	40.88
19	LS	72	62	53	46	40	35	31	27	24	22
	K^*	1.396	1.39	1.383	1.378	1.372	1.366	1.361	1.355	1.35	1.346
	$ARL(\delta_d)$	630.1	412.3	279.4	195.4	140.7	104	78.79	61	48.18	38.76
20	LS	71	61	52	45	39	34	30	27	24	21
	K^*	1.385	1.379	1.373	1.367	1.361	1.355	1.35	1.346	1.341	1.335
	$ARL(\delta_d)$	624	404.9	272.4	189.4	135.7	99.9	75.4	58.22	45.88	36.83

Fuente: el autor

Tabla AII.21 Valores óptimos caso ARL bajo control 1000

n	δ_d	1.11	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19	1.2
2	LS	86	82	78	75	71	68	65	62	60	57
	K^*	2.636	2.627	2.617	2.61	2.599	2.59	2.581	2.572	2.565	2.555
	$ARL(\delta_d)$	207.6	186.3	168	152.1	138.3	126.1	115.5	106.1	97.82	90.43
3	LS	64	60	56	53	51	48	46	43	41	39
	K^*	2.148	2.139	2.13	2.122	2.117	2.109	2.103	2.093	2.087	2.08
	$ARL(\delta_d)$	152.9	134.8	119.6	106.7	95.64	86.13	77.92	70.78	64.56	59.1
4	LS	53	49	46	43	41	39	36	35	33	31
	K^*	1.926	1.917	1.91	1.903	1.897	1.892	1.883	1.88	1.873	1.866
	$ARL(\delta_d)$	123.5	107.7	94.59	83.57	74.27	66.36	59.6	53.79	48.76	44.39
5	LS	46	43	40	37	35	33	31	29	28	26
	K^*	1.793	1.786	1.779	1.772	1.767	1.761	1.755	1.748	1.745	1.737
	$ARL(\delta_d)$	104.2	90.11	78.53	68.91	60.86	54.08	48.33	43.41	39.2	35.56
6	LS	41	38	35	33	31	29	27	25	24	23
	K^*	1.702	1.695	1.688	1.683	1.678	1.672	1.666	1.659	1.655	1.652
	$ARL(\delta_d)$	90.21	77.52	67.16	58.63	51.54	45.6	40.6	36.35	32.73	29.62
7	LS	37	34	32	30	28	26	24	23	21	20
	K^*	1.634	1.627	1.623	1.618	1.612	1.607	1.6	1.597	1.589	1.585
	$ARL(\delta_d)$	79.55	67.99	58.63	50.96	44.63	39.36	34.94	31.22	28.03	25.32
8	LS	34	31	29	27	25	23	22	21	19	18
	K^*	1.582	1.575	1.571	1.565	1.56	1.554	1.55	1.547	1.54	1.536
	$ARL(\delta_d)$	71.11	60.5	51.95	45	39.29	34.56	30.62	27.31	24.48	22.08
9	LS	32	29	27	25	23	22	20	19	18	17
	K^*	1.541	1.535	1.53	1.525	1.519	1.516	1.509	1.506	1.502	1.498
	$ARL(\delta_d)$	64.24	54.44	46.59	40.24	35.05	30.77	27.2	24.22	21.71	19.56
10	LS	30	27	25	23	22	20	19	18	16	15
	K^*	1.507	1.5	1.495	1.49	1.487	1.481	1.477	1.474	1.466	1.462
	$ARL(\delta_d)$	58.52	49.42	42.18	36.34	31.6	27.68	24.45	21.75	19.46	17.53

Fuente: el autor

Tabla AII.22 Valores óptimos caso ARL bajo control 1000

n	δ_d	1.11	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19	1.2
11	LS	28	26	24	22	20	19	17	16	15	14
	K^*	1.477	1.473	1.468	1.462	1.457	1.453	1.447	1.443	1.439	1.434
	$ARL(\delta_d)$	53.69	45.22	38.5	33.1	28.72	25.14	22.17	19.7	17.62	15.87
12	LS	26	24	22	21	19	18	16	15	14	13
	K^*	1.451	1.446	1.441	1.439	1.433	1.43	1.423	1.419	1.415	1.41
	$ARL(\delta_d)$	49.55	41.62	35.36	30.36	26.3	23	20.26	17.99	16.09	14.48
13	LS	25	23	21	19	18	17	15	14	14	13
	K^*	1.43	1.425	1.42	1.415	1.412	1.409	1.401	1.398	1.398	1.393
	$ARL(\delta_d)$	45.97	38.53	32.67	27.99	24.23	21.17	18.64	16.54	14.81	13.33
14	LS	24	22	20	18	17	16	15	14	13	12
	K^*	1.411	1.407	1.401	1.396	1.393	1.39	1.386	1.382	1.378	1.374
	$ARL(\delta_d)$	42.84	35.83	30.33	25.95	22.45	19.6	17.26	15.32	13.7	12.33
15	LS	23	21	19	18	16	15	14	13	12	11
	K^*	1.394	1.39	1.384	1.382	1.376	1.372	1.369	1.365	1.36	1.356
	$ARL(\delta_d)$	40.08	33.46	28.28	24.19	20.89	18.23	16.05	14.24	12.73	11.46
16	LS	22	20	18	17	15	14	13	12	12	11
	K^*	1.379	1.374	1.369	1.366	1.36	1.356	1.353	1.349	1.349	1.344
	$ARL(\delta_d)$	37.63	31.37	26.48	22.62	19.52	17.03	14.98	13.3	11.91	10.72
17	LS	21	19	18	16	15	14	13	12	11	10
	K^*	1.365	1.36	1.357	1.352	1.349	1.345	1.342	1.338	1.333	1.329
	$ARL(\delta_d)$	35.44	29.49	24.89	21.23	18.33	15.98	14.07	12.48	11.16	10.06
18	LS	20	19	17	15	14	13	12	11	11	10
	K^*	1.352	1.349	1.344	1.338	1.335	1.332	1.328	1.324	1.324	1.319
	$ARL(\delta_d)$	33.47	27.83	23.45	19.99	17.25	15.03	13.23	11.74	10.53	9.485
19	LS	20	18	16	15	14	13	12	11	10	10
	K^*	1.342	1.337	1.332	1.329	1.326	1.322	1.319	1.315	1.31	1.31
	$ARL(\delta_d)$	31.7	26.32	22.15	18.89	16.3	14.21	12.51	11.1	9.934	8.981
20	LS	19	17	16	14	13	12	11	11	10	9
	K^*	1.331	1.326	1.323	1.317	1.314	1.31	1.306	1.306	1.302	1.297
	$ARL(\delta_d)$	30.08	24.95	21	17.88	15.42	13.44	11.83	10.53	9.426	8.5

Fuente: el autor

Tabla AII.23 Valores óptimos caso ARL bajo control 1000											
n	δ_d	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.5	3
2	LS	40	31	25	21	18	16	14	13	10	8
	K^+	2.483	2.429	2.383	2.344	2.31	2.284	2.253	2.236	2.176	2.123
	$ARL(\delta_d)$	47.27	29.58	20.77	15.78	12.67	10.59	9.123	8.052	5.341	4.248
3	LS	26	19	15	13	11	10	9	8	6	5
	K^+	2.021	1.975	1.939	1.917	1.891	1.876	1.86	1.841	1.795	1.766
	$ARL(\delta_d)$	28.87	17.48	12.11	9.183	7.394	6.234	5.424	4.832	3.393	2.846
4	LS	20	15	12	10	8	7	7	6	5	4
	K^+	1.815	1.78	1.753	1.73	1.702	1.685	1.685	1.665	1.642	1.613
	$ARL(\delta_d)$	20.96	12.57	8.729	6.665	5.414	4.614	4.084	3.678	2.749	2.405
5	LS	17	12	9	8	7	6	6	5	4	4
	K^+	1.695	1.658	1.628	1.615	1.601	1.584	1.584	1.564	1.539	1.539
	$ARL(\delta_d)$	16.47	9.857	6.882	5.323	4.395	3.792	3.404	3.099	2.434	2.219
6	LS	14	10	8	7	6	5	5	5	4	3
	K^+	1.607	1.575	1.554	1.542	1.527	1.509	1.509	1.509	1.487	1.459
	$ARL(\delta_d)$	13.56	8.143	5.752	4.507	3.767	3.289	2.988	2.777	2.274	2.114
7	LS	13	9	7	6	5	5	4	4	3	3
	K^+	1.55	1.519	1.497	1.484	1.468	1.468	1.448	1.448	1.422	1.422
	$ARL(\delta_d)$	11.54	6.975	4.98	3.949	3.341	2.978	2.71	2.543	2.165	2.064
8	LS	11	8	7	5	5	4	4	4	3	3
	K^+	1.498	1.473	1.462	1.435	1.435	1.417	1.417	1.417	1.393	1.393
	$ARL(\delta_d)$	10.03	6.121	4.45	3.546	3.062	2.735	2.538	2.404	2.107	2.037
9	LS	10	7	6	5	5	4	4	4	3	3
	K^+	1.46	1.434	1.422	1.409	1.409	1.392	1.392	1.392	1.37	1.37
	$ARL(\delta_d)$	8.89	5.471	4.019	3.267	2.86	2.578	2.416	2.305	2.07	2.021
10	LS	10	7	6	5	4	4	4	3	3	3
	K^+	1.435	1.41	1.399	1.386	1.371	1.371	1.371	1.35	1.35	1.35
	$ARL(\delta_d)$	8.013	4.984	3.715	3.057	2.675	2.462	2.325	2.215	2.046	2.012

Fuente: el autor

Tabla AII.24 Valores óptimos caso ARL bajo control 1000

n	δ_d	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.5	3
11	LS	9	6	5	4	4	4	3	3	3	3
	K^*	1.406	1.38	1.367	1.353	1.353	1.353	1.333	1.333	1.333	1.333
	$ARL(\delta_d)$	7.277	4.568	3.438	2.861	2.556	2.373	2.238	2.164	2.031	2.007
12	LS	8	6	5	4	4	4	3	3	3	3
	K^*	1.381	1.363	1.351	1.337	1.337	1.337	1.319	1.319	1.319	1.319
	$ARL(\delta_d)$	6.669	4.253	3.243	2.728	2.462	2.304	2.187	2.126	2.02	2.004
13	LS	8	6	5	4	4	3	3	3	3	3
	K^*	1.365	1.348	1.337	1.323	1.323	1.306	1.306	1.306	1.306	1.306
	$ARL(\delta_d)$	6.187	3.995	3.085	2.622	2.387	2.229	2.148	2.097	2.014	2.002
14	LS	7	5	4	4	4	3	3	3	3	3
	K^*	1.343	1.324	1.311	1.311	1.311	1.294	1.294	1.294	1.294	1.294
	$ARL(\delta_d)$	5.75	3.746	2.92	2.534	2.326	2.187	2.117	2.075	2.009	2.001
15	LS	7	5	4	4	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.331	1.313	1.3	1.3	1.284	1.284	1.284	1.284	1.284	1.284
	$ARL(\delta_d)$	5.401	3.56	2.808	2.462	2.254	2.153	2.093	2.058	2.006	2.001
16	LS	7	5	4	4	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.32	1.302	1.29	1.29	1.275	1.275	1.275	1.275	1.275	1.275
	$ARL(\delta_d)$	5.103	3.403	2.713	2.401	2.214	2.125	2.075	2.045	2.004	2
17	LS	6	5	4	4	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.303	1.293	1.282	1.282	1.267	1.267	1.267	1.267	1.267	1.267
	$ARL(\delta_d)$	4.811	3.269	2.633	2.349	2.181	2.103	2.06	2.035	2.003	2
18	LS	6	5	4	3	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.294	1.285	1.273	1.259	1.259	1.259	1.259	1.259	1.259	1.259
	$ARL(\delta_d)$	4.581	3.152	2.564	2.282	2.153	2.085	2.048	2.027	2.002	2
19	LS	6	5	4	3	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.286	1.277	1.266	1.252	1.252	1.252	1.252	1.252	1.252	1.252
	$ARL(\delta_d)$	4.38	3.051	2.504	2.245	2.13	2.07	2.038	2.021	2.001	2
20	LS	6	4	4	3	3	3	3	3	3	3
	K^*	1.278	1.259	1.259	1.245	1.245	1.245	1.245	1.245	1.245	1.245
	$ARL(\delta_d)$	4.203	2.923	2.452	2.213	2.111	2.058	2.031	2.016	2.001	2

Fuente: el autor

Tabla AII.25 Valores óptimos caso ARL bajo control 200										
n	δ_d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	LS	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	K	0.164	0.164	0.164	0.164	0.164	0.164	0.164	0.164	0.164
	ARL(δ_d)	2.271	4.807	10.29	19.43	33.07	52.11	77.43	109.9	150.5
3	LS	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	K	0.374	0.374	0.374	0.374	0.374	0.374	0.374	0.374	0.374
	ARL(δ_d)	2	2.067	2.773	4.905	9.615	18.96	36.29	66.76	117.8
4	LS	2	2	2	2	3	3	3	3	3
	K	0.488	0.488	0.488	0.488	0.451	0.451	0.451	0.451	0.451
	ARL(δ_d)	2	2.001	2.109	2.791	5.011	10	21.28	45.77	97
5	LS	2	2	2	2	3	3	3	4	4
	K	0.559	0.559	0.559	0.559	0.525	0.525	0.525	0.501	0.501
	ARL(δ_d)	2	2	2.016	2.262	3.417	6.374	14.03	33.69	82.15
6	LS	2	2	2	2	3	3	4	4	5
	K	0.608	0.608	0.608	0.608	0.576	0.576	0.554	0.554	0.538
	ARL(δ_d)	2	2	2.002	2.094	2.76	4.675	10.31	25.93	71.05
7	LS	2	2	2	2	3	3	4	4	5
	K	0.644	0.644	0.644	0.644	0.614	0.614	0.594	0.594	0.578
	ARL(δ_d)	2	2	2	2.034	2.441	3.76	7.985	20.78	62.32
8	LS	2	2	2	2	3	3	4	5	6
	K	0.672	0.672	0.672	0.672	0.644	0.644	0.624	0.610	0.598
	ARL(δ_d)	2	2	2	2.012	2.267	3.218	6.503	17.27	55.49
9	LS	2	2	2	2	3	3	4	5	6
	K	0.694	0.694	0.694	0.694	0.668	0.668	0.649	0.635	0.624
	ARL(δ_d)	2	2	2	2.004	2.165	2.875	5.502	14.61	49.82
10	LS	2	2	2	2	3	3	4	5	6
	K	0.713	0.713	0.713	0.713	0.687	0.687	0.670	0.656	0.646
	ARL(δ_d)	2	2	2	2.002	2.103	2.646	4.795	12.6	45.13

Fuente: el autor

Tabla AII.26 Valores óptimos caso ARL bajo control 200

n	δ_d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
11	LS	2	2	2	2	2	3	4	5	6
	K	0.728	0.728	0.728	0.728	0.728	0.704	0.687	0.674	0.664
	ARL(δ_d)	2	2	2	2.001	2.042	2.486	4.277	11.05	41.19
12	LS	2	2	2	2	2	3	3	5	7
	K	0.742	0.742	0.742	0.742	0.742	0.718	0.718	0.690	0.672
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.025	2.372	3.796	9.827	37.9
13	LS	2	2	2	2	2	3	3	5	7
	K	0.753	0.753	0.753	0.753	0.753	0.731	0.731	0.703	0.686
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.015	2.287	3.494	8.841	34.99
14	LS	2	2	2	2	2	3	3	5	7
	K	0.764	0.764	0.764	0.764	0.764	0.742	0.742	0.715	0.699
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.009	2.224	3.257	8.035	32.47
15	LS	2	2	2	2	2	3	3	4	7
	K	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.752	0.752	0.737	0.710
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.005	2.175	3.067	7.287	30.26
16	LS	2	2	2	2	2	3	3	4	7
	K	0.781	0.781	0.781	0.781	0.781	0.760	0.760	0.746	0.720
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.003	2.137	2.914	6.724	28.3
17	LS	2	2	2	2	2	3	3	4	7
	K	0.788	0.788	0.788	0.788	0.788	0.768	0.768	0.754	0.729
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.002	2.108	2.787	6.247	26.57
18	LS	2	2	2	2	2	3	3	4	7
	K	0.795	0.795	0.795	0.795	0.795	0.775	0.775	0.762	0.737
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.001	2.085	2.683	5.839	25.02
19	LS	2	2	2	2	2	3	3	4	7
	K	0.801	0.801	0.801	0.801	0.801	0.782	0.782	0.769	0.744
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.001	2.067	2.595	5.486	23.62
20	LS	2	2	2	2	2	3	3	4	7
	K	0.806	0.806	0.806	0.806	0.806	0.788	0.788	0.775	0.751
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2	2.053	2.521	5.18	22.37

Fuente: el autor

Tabla AII.27 Valores óptimos caso ARL bajo control 370

n	δ_d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	LS	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	K^*	0.131	0.131	0.131	0.131	0.131	0.131	0.131	0.131	0.131
	$ARL(\delta_d)$	2.651	7.159	16.8	33.16	57.98	92.99	139.9	200.6	276.7
3	LS	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	K^*	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332
	$ARL(\delta_d)$	2	2.154	3.363	6.85	14.77	31.06	62.22	118.3	213.9
4	LS	2	2	2	3	3	3	3	3	3
	K^*	0.448	0.448	0.448	0.414	0.414	0.414	0.414	0.414	0.414
	$ARL(\delta_d)$	2	2.004	2.208	3.461	6.723	14.9	34.28	78.23	173.4
5	LS	2	2	2	3	3	3	4	4	4
	K^*	0.522	0.522	0.522	0.490	0.490	0.490	0.468	0.468	0.468
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2.035	2.542	4.149	8.768	21.63	55.59	144.6
6	LS	2	2	2	3	3	3	4	5	5
	K^*	0.574	0.574	0.574	0.544	0.544	0.544	0.523	0.508	0.508
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2.005	2.228	3.132	6.022	14.9	41.69	123.2
7	LS	2	2	2	2	3	3	4	5	6
	K^*	0.612	0.612	0.612	0.612	0.584	0.584	0.564	0.550	0.538
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2.001	2.064	2.652	4.593	11.05	32.44	106.7
8	LS	2	2	2	2	3	3	4	5	7
	K^*	0.642	0.642	0.642	0.642	0.615	0.615	0.597	0.583	0.562
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2.025	2.396	3.769	8.664	26.1	93.76
9	LS	2	2	2	2	3	3	4	5	7
	K^*	0.666	0.666	0.666	0.666	0.640	0.640	0.623	0.610	0.590
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2.009	2.249	3.258	7.089	21.55	83.18
10	LS	2	2	2	2	3	3	4	5	7
	K^*	0.685	0.685	0.685	0.685	0.661	0.661	0.645	0.632	0.613
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2.004	2.158	2.922	5.998	18.19	74.5

Fuente: el autor

Tabla AII.28 Valores óptimos caso ARL bajo control 370

n	δ_d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
11	LS	2	2	2	2	3	3	4	5	8
	K	0.702	0.702	0.702	0.702	0.679	0.679	0.663	0.651	0.626
	ARL(δ_d)	2	2	2	2.001	2.101	2.692	5.215	15.63	67.33
12	LS	2	2	2	2	3	3	4	5	8
	K	0.717	0.717	0.717	0.717	0.694	0.694	0.679	0.667	0.643
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.065	2.529	4.633	13.64	61.2
13	LS	2	2	2	2	2	3	4	5	8
	K	0.729	0.729	0.729	0.729	0.729	0.708	0.693	0.681	0.658
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.026	2.409	4.191	12.05	55.96
14	LS	2	2	2	2	2	3	4	5	8
	K	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.719	0.705	0.694	0.672
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.016	2.32	3.847	10.77	51.45
15	LS	2	2	2	2	2	3	4	5	8
	K	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.730	0.716	0.705	0.684
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.01	2.252	3.574	9.726	47.53
16	LS	2	2	2	2	2	3	3	5	8
	K	0.759	0.759	0.759	0.759	0.759	0.739	0.739	0.715	0.694
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.006	2.2	3.273	8.856	44.08
17	LS	2	2	2	2	2	3	3	5	8
	K	0.767	0.767	0.767	0.767	0.767	0.748	0.748	0.725	0.704
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.003	2.158	3.093	8.127	41.05
18	LS	2	2	2	2	2	3	3	5	8
	K	0.774	0.774	0.774	0.774	0.774	0.755	0.755	0.733	0.713
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.002	2.126	2.945	7.508	38.35
19	LS	2	2	2	2	2	3	3	5	8
	K	0.781	0.781	0.781	0.781	0.781	0.763	0.763	0.740	0.721
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.001	2.1	2.822	6.98	35.95
20	LS	2	2	2	2	2	3	3	5	8
	K	0.787	0.787	0.787	0.787	0.787	0.769	0.769	0.747	0.728
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.001	2.08	2.718	6.524	33.79

Fuente: el autor

Tabla AII.29 Valores óptimos caso ARL bajo control 500										
n	δ_d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	LS	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	K^*	0.118	0.118	0.118	0.118	0.118	0.118	0.118	0.118	0.118
	$ARL(\delta_d)$	2.945	8.858	21.57	43.36	76.63	123.8	187.3	269.6	373
3	LS	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	K^*	0.313	0.313	0.313	0.313	0.313	0.313	0.313	0.313	0.313
	$ARL(\delta_d)$	2	2.22	3.766	8.193	18.43	39.86	81.4	156.9	286.8
4	LS	2	2	2	3	3	3	3	3	3
	K^*	0.431	0.431	0.431	0.398	0.398	0.398	0.398	0.398	0.398
	$ARL(\delta_d)$	2	2.006	2.278	3.806	7.87	18.29	43.6	102.1	230.9
5	LS	2	2	2	3	3	3	4	4	5
	K^*	0.506	0.506	0.506	0.475	0.475	0.475	0.454	0.454	0.438
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2.049	2.664	4.621	10.37	26.76	71.42	191.5
6	LS	2	2	2	3	3	3	4	5	6
	K^*	0.558	0.558	0.558	0.529	0.529	0.529	0.509	0.494	0.482
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2.008	2.281	3.365	6.895	18.01	52.74	162
7	LS	2	2	2	2	3	3	4	5	7
	K^*	0.597	0.597	0.597	0.597	0.570	0.570	0.551	0.537	0.516
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2.001	2.084	2.781	5.121	13.08	40.5	139.4
8	LS	2	2	2	2	3	3	4	6	7
	K^*	0.628	0.628	0.628	0.628	0.602	0.602	0.584	0.560	0.551
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2.033	2.475	4.112	10.07	32.29	121.5
9	LS	2	2	2	2	3	3	4	6	8
	K^*	0.652	0.652	0.652	0.652	0.628	0.628	0.611	0.587	0.572
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2.013	2.299	3.493	8.103	26.36	107.3
10	LS	2	2	2	2	3	3	4	6	8
	K^*	0.673	0.673	0.673	0.673	0.649	0.649	0.633	0.611	0.595
	$ARL(\delta_d)$	2	2	2	2.005	2.192	3.089	6.757	22.01	95.57

Fuente: el autor

Tabla AII.30 Valores óptimos caso ARL bajo control 500

n	δ_d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
11	LS	2	2	2	2	3	3	4	6	9
	K	0.690	0.690	0.690	0.690	0.668	0.668	0.652	0.630	0.610
	ARL(δ_d)	2	2	2	2.002	2.124	2.815	5.798	18.74	85.91
12	LS	2	2	2	2	3	3	4	6	9
	K	0.705	0.705	0.705	0.705	0.683	0.683	0.668	0.648	0.628
	ARL(δ_d)	2	2	2	2.001	2.08	2.622	5.093	16.2	77.71
13	LS	2	2	2	2	3	3	4	6	9
	K	0.718	0.718	0.718	0.718	0.697	0.697	0.682	0.663	0.643
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.052	2.481	4.56	14.21	70.73
14	LS	2	2	2	2	3	3	4	6	9
	K	0.729	0.729	0.729	0.729	0.709	0.709	0.695	0.676	0.657
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.033	2.377	4.148	12.61	64.73
15	LS	2	2	2	2	2	3	4	6	9
	K	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.720	0.706	0.688	0.669
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.013	2.297	3.824	11.31	59.54
16	LS	2	2	2	2	2	3	4	5	9
	K	0.749	0.749	0.749	0.749	0.749	0.730	0.716	0.706	0.681
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.008	2.236	3.564	10.16	55
17	LS	2	2	2	2	2	3	3	5	9
	K	0.757	0.757	0.757	0.757	0.757	0.738	0.738	0.716	0.691
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.005	2.188	3.276	9.259	51.02
18	LS	2	2	2	2	2	3	3	5	9
	K	0.764	0.764	0.764	0.764	0.764	0.746	0.746	0.724	0.700
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.003	2.15	3.101	8.5	47.49
19	LS	2	2	2	2	2	3	3	5	9
	K	0.771	0.771	0.771	0.771	0.771	0.754	0.754	0.732	0.708
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.002	2.12	2.956	7.855	44.35
20	LS	2	2	2	2	2	3	3	5	9
	K	0.778	0.778	0.778	0.778	0.778	0.760	0.760	0.739	0.716
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.001	2.096	2.834	7.301	41.54

Fuente: el autor

Tabla AII.31 Valores óptimos caso ARL bajo control 1000

n	δ_d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	LS	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	K^*	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092
	$ARL(\delta_p)$	4.025	14.98	39.1	81.38	146.9	240.6	367.7	533.3	742.4
3	LS	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	K^*	0.276	0.276	0.276	0.276	0.276	0.276	0.276	0.276	0.276
	$ARL(\delta_p)$	2.001	2.457	5.11	12.8	31.41	71.91	152.7	302.7	564.8
4	LS	2	2	2	3	3	3	3	3	3
	K^*	0.393	0.393	0.393	0.363	0.363	0.363	0.363	0.363	0.363
	$ARL(\delta_p)$	2	2.018	2.508	4.904	11.66	30.02	77.05	190.5	448.2
5	LS	2	2	2	3	3	4	4	5	5
	K^*	0.470	0.470	0.470	0.442	0.442	0.422	0.422	0.407	0.407
	$ARL(\delta_p)$	2	2	2.099	3.037	6.105	15.84	44.54	129	365.9
6	LS	2	2	2	3	3	4	5	6	7
	K^*	0.525	0.525	0.525	0.498	0.498	0.479	0.465	0.454	0.444
	$ARL(\delta_p)$	2	2	2.019	2.441	4.075	9.782	28.62	92.1	305.1
7	LS	2	2	2	3	3	4	5	6	8
	K^*	0.566	0.566	0.566	0.540	0.540	0.523	0.509	0.498	0.482
	$ARL(\delta_p)$	2	2	2.003	2.202	3.167	6.843	19.82	68.58	258.8
8	LS	2	2	2	3	3	4	5	7	9
	K^*	0.598	0.598	0.598	0.574	0.574	0.557	0.544	0.525	0.512
	$ARL(\delta_p)$	2	2	2	2.093	2.704	5.237	14.63	53.07	222.8
9	LS	2	2	2	2	3	4	5	7	10
	K^*	0.624	0.624	0.624	0.624	0.601	0.585	0.573	0.555	0.536
	$ARL(\delta_p)$	2	2	2	2.026	2.444	4.28	11.35	42.21	194.1
10	LS	2	2	2	2	3	3	5	7	10
	K^*	0.646	0.646	0.646	0.646	0.624	0.624	0.597	0.579	0.561
	$ARL(\delta_p)$	2	2	2	2.011	2.288	3.58	9.162	34.41	170.8

Fuente: el autor

Tabla AII.32 Valores óptimos caso ARL bajo control 1000

n	δ_d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
11	LS	2	2	2	2	3	3	5	7	11
	K	0.664	0.664	0.664	0.664	0.643	0.643	0.617	0.600	0.579
	ARL(δ_d)	2	2	2	2.004	2.19	3.172	7.643	28.63	151.7
12	LS	2	2	2	2	3	3	4	7	11
	K	0.680	0.680	0.680	0.680	0.660	0.660	0.645	0.618	0.597
	ARL(δ_d)	2	2	2	2.002	2.125	2.889	6.467	24.25	135.7
13	LS	2	2	2	2	3	3	4	7	11
	K	0.694	0.694	0.694	0.694	0.674	0.674	0.660	0.634	0.614
	ARL(δ_d)	2	2	2	2.001	2.083	2.686	5.65	20.86	122.2
14	LS	2	2	2	2	3	3	4	7	12
	K	0.706	0.706	0.706	0.706	0.687	0.687	0.674	0.648	0.625
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.055	2.536	5.028	18.18	110.8
15	LS	2	2	2	2	3	3	4	7	12
	K	0.717	0.717	0.717	0.717	0.698	0.698	0.685	0.661	0.638
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.036	2.424	4.546	16.03	100.9
16	LS	2	2	2	2	3	3	4	6	12
	K	0.727	0.727	0.727	0.727	0.709	0.709	0.696	0.679	0.650
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.023	2.338	4.164	14.21	92.36
17	LS	2	2	2	2	2	3	4	6	12
	K	0.736	0.736	0.736	0.736	0.736	0.718	0.706	0.689	0.661
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.009	2.271	3.857	12.76	84.9
18	LS	2	2	2	2	2	3	4	6	12
	K	0.744	0.744	0.744	0.744	0.744	0.727	0.715	0.698	0.671
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.006	2.218	3.608	11.56	78.36
19	LS	2	2	2	2	2	3	4	6	12
	K	0.751	0.751	0.751	0.751	0.751	0.734	0.723	0.706	0.68
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.003	2.176	3.402	10.54	72.58
20	LS	2	2	2	2	2	3	4	6	12
	K	0.758	0.758	0.758	0.758	0.758	0.742	0.73	0.714	0.688
	ARL(δ_d)	2	2	2	2	2.002	2.142	3.231	9.681	67.45

Fuente: el autor

C. Códigos desarrollados en el programa Mathcad 14 y Matlab R2009b

Códigos desarrollados en el programa Mathcad 14 y Matlab R2009b para la obtención de los resultados pertinentes

Cálculos en Mathcad 14 para la obtención del límite de control del gráfico RL_2

$$\alpha:=0.002$$

$$p:=0.000$$

$$k:=1$$

Given

$$1-(1-p)^{(k+1)}[(k+1)p+1]=\frac{\alpha}{2}$$

$$L:=\text{Find}(k)$$

$$L:=527.309$$

Cálculos en Mathcad 14 para la obtención del ANI para el gráfico RL_2

$p := 0.001, 0.002, 0.3$

$L := 50$

$TNSs(p) =$

837207.3131
111481.9248
35121.766
15727.0982
8533.0064
5224.9689
3476.5842
2457.5845
1819.027
1395.864
1102.7026
892.1324
736.2868
617.9975
526.2607
...

```

TNSs(p) :=
  pot ← p
  Ga ←
    Gm ←
      for i ∈ 0..L-1
        for j ∈ 0..i
          aj,i ← dnbinom(i,1,pot)
      a
    Gd ← reverse(Gm)
    G0 ←
      for z ∈ 0..L-1
        bz ← 0
      b
    Gf ← stack(G0T, Gd)
    GL ←
      for i ∈ 0..L
        ci ← 1 - ∑z=0L-1 GfL,z
      c
    Gm ← augment(Gf, GL)
  I ← identity(L+1)
  U ←
    for j ∈ 0..L
      dj ← 1
    d
  s ←
    for j ∈ 0..L
      fL ← 1
    f
  ⎛ 1 ⎞
  ⎜ p ⎟ ⋅ [ sT ⋅ (I - Ga)-1 ⋅ U ]

```

Cálculos en Mathcad 14 para la obtención del ARL para el gráfico sintético para la media

$$\delta := 0$$

$$k := 1$$

$$L := 4$$

$$Lx := 1$$

Given

$$\left[\left[\frac{1}{2 \cdot (\text{cnorm}(-Lx))} \right] \cdot \left[\frac{1}{\sum_{r=k}^L \left[\text{combin}[(r-1), (k-1)] \cdot [2 \cdot (\text{cnorm}(-Lx))]^k \left[1 - [2 \cdot (\text{cnorm}(-Lx))] \right]^{r-k} \right]} \right] \right] = 370.4$$

$$LS := \text{Find}(Lx)$$

$$LS := 2.218769424476601$$

$$LI := -LS$$

$$n := 1$$

$$\text{pot} := \text{cnorm} \left[LI - (\delta \cdot \sqrt{n}) \right] + \left(1 - \text{cnorm} \left(LS - \delta \cdot \sqrt{n} \right) \right)$$

$$\text{pot} = 0.02650241514363638$$

$$F := \sum_{r=k}^L \left[\text{combin}[(r-1), (k-1)] \cdot \text{pot}^k \cdot (1 - \text{pot})^{r-k} \right]$$

$$F := 0.10186935804327524$$

$$\text{ARL} := \left(\frac{1}{F} \right) \cdot \left(\frac{1}{\text{pot}} \right)$$

$$\text{ARL} = 370.40000000000005$$

Cálculos en Mathcad 14 para la obtención del ARL para el gráfico $\bar{X} - RL_2$.

$n := 2 \quad \delta := 0$

$Lx := 1 \quad L := 3$

Dado

```

ARL0(Lx) := | pot ← 2·cnorm(-Lx)
              | Ga ← | Gm ← | for i ∈ 0..L - 1
                  |   |   |   for j ∈ 0..i
                  |   |   |   aj,i ← dnbinom(i,1,pot)
                  |   |   |   |
                  |   |   |   a
                  |   |   |
                  |   |   | Gd ← reverse(Gm)
                  |   |   |
                  |   |   | G0 ← | for z ∈ 0..L - 1
                  |   |   |   |   bz ← 0
                  |   |   |   |   |
                  |   |   |   |   b
                  |   |   |   |
                  |   |   |   | Gf ← stack(G0T,Gd)
                  |   |   |   |
                  |   |   |   | GL ← | for i ∈ 0..L
                  |   |   |   |   |   ci ← 1 - ∑z=0L-1 GfL,z
                  |   |   |   |   |   |
                  |   |   |   |   |   c
                  |   |   |   |
                  |   |   |   | Gm ← augment(Gf,GL)
                  |   |   |
                  |   |   | I ← identity(L + 1)
                  |   |   |
                  |   |   | U ← | for j ∈ 0..L
                  |   |   |   |   dj ← 1
                  |   |   |   |   |
                  |   |   |   |   d
                  |   |   |   |
                  |   |   |   | s ← | for j ∈ 0..L
                  |   |   |   |   |   fL ← 1
                  |   |   |   |   |   |
                  |   |   |   |   |   f
                  |   |   |   |
                  |   |   |   | ⌈ 1 ⌋
                  |   |   |   | ⌊ pot ⌋ ⌋ · [sT · (I - Ga)-1 · U]

```

$ARL0(Lx) = 370.4$

$LX := \text{Find}(Lx)$

$Lx = 1.72615$

$ARL(L) = 370.4$

```

ARL(L) := | LI ← -LX
          | pot2 ← cnorm[LI - (δ·√n)] + (1 - cnorm(LX - δ·√n))
          | Ga ← | Gm ← | for i ∈ 0..L - 1
                  |   |   | for j ∈ 0..i
                  |   |   |   aj,i ← dnbinom(i,1,pot2)
                  |   |   |   a
                  |   |   |
                  |   |   | Gd ← reverse(Gm)
                  |   |   | G0 ← | for z ∈ 0..L - 1
                  |   |   |   | bz ← 0
                  |   |   |   | b
                  |   |   |   |
                  |   |   |   | Gf ← stack(G0T,Gd)
                  |   |   |   | GL ← | for i ∈ 0..L
                  |   |   |   |   | ci ← 1 - ∑z=0L-1 GfL,z
                  |   |   |   |   | c
                  |   |   |   |   |
                  |   |   |   |   | Gm ← augment(Gf,GL)
          | I ← identity(L + 1)
          | U ← | for j ∈ 0..L
                  |   | dj ← 1
                  |   | d
          | s ← | for j ∈ 0..L
                  |   | fL ← 1
                  |   | f
          | (1/pot2) · [sT · (I - Ga)-1 · U]

```

Cálculos en Mathcad 14 para la obtención del ARL para el gráfico S de Shewhart.

$$n := 20$$

$$k := 2$$

Dado

$$\left[\frac{1}{1 - \left[\text{pchisq} \left[\left[(n-1) \cdot (k)^2 \right], (n-1) \right] \right]} \right] = 1000$$

$$k2 := \text{Find}(k)$$

$$k2 := 1.5186593112$$

$$\delta := 1.05, 1.1 \dots 3$$

$$\text{ARL}(\delta, n) := \left[\frac{1}{1 - \left[\text{pchisq} \left[\left[(n-1) \cdot \left(\frac{k2}{\delta} \right)^2 \right], (n-1) \right] \right]} \right]$$

$$n := 20$$

$$k := 2$$

Dado

$$\left[\frac{1}{\left[\text{pchisq} \left[\left[(n-1) \cdot (k)^2 \right], (n-1) \right] \right]} \right] = 1000$$

$$k2 := \text{Find}(k)$$

$$k2 := 0.5334503095$$

$$\delta := 0.1, 0.15 \dots 0.95$$

$$\text{ARL}(\delta) := \left[\frac{1}{\left[\text{pchisq} \left[\left[(n-1) \cdot \left(\frac{k2}{\delta} \right)^2 \right], (n-1) \right] \right]} \right]$$

Cálculos en Mathcad 14 para la obtención del ARL para el gráfico sintético S

$$L := 5$$

$$n := 5$$

$$k := 2$$

Dado

$$\left[\frac{1}{1 - \left[\text{pchisq} \left[\left[(n-1) \cdot (k)^2 \right], (n-1) \right] \right]} \right] \cdot \left[\frac{1}{1 - \left[\text{pchisq} \left[\left[(n-1) \cdot (k)^2 \right], (n-1) \right] \right]^{L-1}} \right] = 370$$

$$k2 := \text{Find}(k)$$

$$k2 := 1.658627769$$

$$\delta := 1.1$$

$$\text{ARL} := \left[\frac{1}{1 - \left[\text{pchisq} \left[\left[(n-1) \cdot \left(\frac{k2}{\delta} \right)^2 \right], (n-1) \right] \right]} \right] \cdot \left[\frac{1}{1 - \left[\text{pchisq} \left[\left[(n-1) \cdot \left(\frac{k2}{\delta} \right)^2 \right], (n-1) \right] \right]^{L-1}} \right]$$

$$\text{ARL} = 79.04937739$$

$L := 9$

$n := 5$

$k := 2$

Dado

$$\left[\frac{1}{\left[\text{pchisq} \left[\left[(n-1) \cdot (k)^2 \right], (n-1) \right] \right]} \right] \cdot \left[\frac{1}{1 - \left[1 - \text{pchisq} \left[\left[(n-1) \cdot (k)^2 \right], (n-1) \right] \right]^{L-1}} \right] = 1000$$

$k2 := \text{Find}(k)$

$k2 := -0.2821393376$

$\delta := 0.9$

$$\text{ARL} := \left[\frac{1}{\left[\text{pchisq} \left[\left[(n-1) \cdot \left(\frac{k2}{\delta} \right)^2 \right], (n-1) \right] \right]} \right] \cdot \left[\frac{1}{1 - \left[1 - \text{pchisq} \left[\left[(n-1) \cdot \left(\frac{k2}{\delta} \right)^2 \right], (n-1) \right] \right]^{L-1}} \right] = 1000$$

$\text{ARL} = 460.91952241$

Cálculos en Mathcad 14 para la obtención del ARL para el gráfico $S\text{-}RL_2$

para $\delta < 1$

$n := 5$

$L := 7$ $k := 1.5514$

```

Ga := | pot ← 1 - [pchisq[[(n-1)·(k)2],(n-1)]]
      | Gm ← | for i ∈ 0..L-1
      |       | for j ∈ 0..i
      |       |   aj,i ← dnbinom(i,1,pot)
      |       | a
      | Gd ← reverse(Gm)
      | G0 ← | for z ∈ 0..L-1
      |       | bz ← 0
      |       | b
      | Gf ← stack(G0T,Gd)
      | GL ← | for i ∈ 0..L
      |       | ci ← 1 - ∑z=0L-1 GfL,z
      |       | c
      | Gm ← augment(Gf,GL)

```

```

U := | for j ∈ 0..L
      | dj ← 1
      | d

```

$I := \text{identity}(L+1)$

$$\mu := \left[\frac{1}{1 - \left[\text{pchisq} \left[\left[(n-1) \cdot (k)^2 \right], (n-1) \right] \right]} \right]$$

```
s := | for j ∈ 0..L
      | f_L ← 1
      | f
```

$$\text{ARL0} := \mu \left[s^T \cdot \left[(I - G_a)^{-1} \right] \cdot U \right]$$

$$\text{ARL0} = 499.920183$$

$$\delta := 1.6$$

$$\text{pot} := 1 - \left[\text{pchisq} \left[\left[(n-1) \cdot \left(\frac{k}{\delta} \right)^2 \right], (n-1) \right] \right]$$

$$\text{pot} = 0.439$$

```
Ga := | Gm ← | for i ∈ 0..L-1
      |       | for j ∈ 0..i
      |       |   a_j,i ← dnbinom(i,1,pot)
      |       | a
      | Gd ← reverse(Gm)
      | G0 ← | for z ∈ 0..L-1
      |       | b_z ← 0
      |       | b
      | Gf ← stack(G0^T, Gd)
      | GL ← | for i ∈ 0..L
      |       |   c_i ← 1 - ∑_{z=0}^{L-1} Gf_{L,z}
      |       | c
      | Gm ← augment(Gf, GL)
```

```
U := | for j ∈ 0..L
      | d_j ← 1
      | d
```

$I := \text{identity } (L+1)$

$s := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..L \\ f_L \leftarrow 1 \\ f \end{array} \right|$

$$\mu := \left[\frac{1}{1 - \left[\text{pchisq} \left[\left[(n-1) \cdot \left(\frac{k}{\delta} \right)^2 \right], (n-1) \right] \right]} \right]$$

$$\text{ARL} := \mu \cdot \left[s^T \cdot \left[(I - Ga)^{-1} \right] \cdot U \right]$$

$$\text{ARL} = 4.785$$

para $\delta < 1$

$n := 5$

$k := 0.501339$

$L := 4$

```

Ga := | pot ← [pchisq[[ $(n-1) \cdot (k)^2$ ],  $(n-1)$ ]]
      | Gm ← | for i ∈ 0..L-1
      |       | for j ∈ 0..i
      |       |   aj,i ← dnbinom(i,1,pot)
      |       | a
      | Gd ← reverse(Gm)
      | G0 ← | for z ∈ 0..L-1
      |       | bz ← 0
      |       | b
      | Gf ← stack(G0T, Gd)
      | GL ← | for i ∈ 0..L
      |       | ci ← 1 -  $\sum_{z=0}^{L-1} Gf_{L,z}$ 
      |       | c
      | Gm ← augment(Gf, GL)

U := | for j ∈ 0..L
     | dj ← 1
     | d

```

$I := \text{identity}(L+1)$

$$\mu := \left[\frac{1}{\left[\text{pchisq} \left[\left[(n-1) \cdot (k)^2 \right], (n-1) \right] \right]} \right]$$

$$s := \begin{cases} \text{for } j \in 0..L \\ f_L \leftarrow 1 \\ f \end{cases}$$

$$ARL0 := \mu \cdot \left[s^T \cdot \left[(I - Ga)^{-1} \right] \cdot U \right]$$

$$ARL = 199.987758$$

$$\delta := 0.5$$

$$pot := \left[pchisq \left[\left[(n-1) \cdot \left(\frac{k}{\delta} \right)^2 \right], (n-1) \right] \right]$$

$$pot = 0.597$$

$$Ga := \begin{cases} Gm \leftarrow \begin{cases} \text{for } i \in 0..L-1 \\ \text{for } j \in 0..i \\ a_{j,i} \leftarrow \text{dnbinom}(i, 1, pot) \end{cases} \\ a \\ Gd \leftarrow \text{reverse}(Gm) \\ G0 \leftarrow \begin{cases} \text{for } z \in 0..L-1 \\ b_z \leftarrow 0 \end{cases} \\ b \\ Gf \leftarrow \text{stack}(G0^T, Gd) \\ GL \leftarrow \begin{cases} \text{for } i \in 0..L \\ c_i \leftarrow 1 - \sum_{z=0}^{L-1} Gf_{L,z} \end{cases} \\ c \\ Gm \leftarrow \text{augment}(Gf, GL) \end{cases}$$

$$U := \begin{cases} \text{for } j \in 0..L \\ d_j \leftarrow 1 \\ d \end{cases}$$

$I := \text{identity } (L + 1)$

$$\mu := \left[\frac{1}{\text{pchisq} \left[\left[(n-1) \cdot \left(\frac{k}{\delta} \right)^2 \right], (n-1) \right]} \right]$$

$s := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..L \\ \quad f_L \leftarrow 1 \\ \quad f \end{array} \right.$

$ARL := \mu \cdot \left[s^T \cdot \left[\left(I - Ga \right)^{-1} \right] \cdot U \right]$

$ARL = 3.575$

Programa en Matlab R2009b que optimiza el gráfico sintético para la media

```
function opt_sin(nv,delthav,ARL0)
clc, format compact, format short g, warning off
for i=1:length(nv)
    for j=1:length(delthav)
        n=nv(i);
        deltha=delthav(j);
        ARL2=0;
        LI=1;
        ARL1=FO(LI,n,deltha,ARL0);
        while ARL1>ARL2
            if LI~=1,ARL1=ARL2;end
            LI=LI+1;
            ARL2=FO(LI,n,deltha,ARL0);
        end;
        [ARL z]=FO(LI,n,deltha,ARL0);
        zv(i)=z;
        ARLv(i)=ARL;
        LIv(i)=LI;
        ARL0v(i)=ARL0;
        if i==1 && j==1
            fprintf(['n' char(9) 'deltha' char(9) 'LI' char(9) 'z' char(9) 'ARL\n'])
        end;
        fprintf([num2str(n) char(9) num2str(deltha) char(9) num2str(LI,4) char(9) num-
2str(z,4) char(9) num2str(ARL,4) '\n'])
        end;
    end;
end;
function [ARL z]=FO(LI,n,deltha,ARL0)
    Fn1=@(z,LI,n) abs(ARL0-Fn_ARL(z,LI,n,0));
    z=fminsearch(@(z)Fn1(z,LI,n),1.5,optimset('TolX',1e-4,'TolFun',1e-4));
    ARL=Fn_ARL(z,LI,n,deltha);
function ARL=Fn_ARL(z,LI,n,deltha)
    P = normcdf(-z-deltha.*sqrt(n),0,1)+1-normcdf(z-deltha.*sqrt(n),0,1);
    ARL=1./(P.*(1-(1-P).^LI));
```

Programa en Matlab R2009b que optimiza el gráfico $\bar{X} - RL_2$

```
function opt_rl2(nv,delthav,ARL0)
clc, format compact, format short g, warning off
for i=1:length(nv)
    for j=1:length(delthav)
        n=nv(i);
        deltha=delthav(j);
        ARL2=0;
        LI=1;
        ARL1=FO(LI,n,deltha,ARL0);
        while ARL1>ARL2
            if LI~=1,ARL1=ARL2;end
            LI=LI+1;
            ARL2=FO(LI,n,deltha,ARL0);
        end;
        [ARL z]=FO(LI,n,deltha,ARL0);
        zv(i)=z;
        ARLv(i)=ARL;
        LIv(i)=LI;
        ARL0v(i)=ARL0;
        if i==1 && j==1
            fprintf(['n' char(9) 'deltha' char(9) 'LI' char(9) 'z' char(9) 'ARL\n'])
        end;
        fprintf([num2str(n) char(9) num2str(deltha) char(9) num2str(LI,4) char(9) num-
2str(z,4) char(9) num2str(ARL,4) '\n'])
        end;
    end;
end;
function [ARL z]=FO(LI,n,deltha,ARL0)
    Fn1=@(z,LI,n) abs(ARL0-Fn_ARL(z,LI,n,0));
    z=fminsearch(@(z)Fn1(z,LI,n),2,optimset('Display','off','TolX',1e-6,'TolFun',1e-6));
    ARL=Fn_ARL(z,LI,n,deltha);
function ARL=Fn_ARL(z,LI,n,deltha)
    R=zeros(LI+1);
    pot = normcdf(-z-deltha.*sqrt(n),0,1)+1-normcdf(z-deltha.*sqrt(n),0,1);
    p = geopdf(0:1:LI-1,pot);
    pl = 1 - sum(p);
    pfil = [p pl];
    for fil=1:LI+1,
        R(fil,end-(fil-1):end) = pfil(end-(fil-1):end);
    end;
    ARL=([zeros(1,LI) 1]*inv(eye(LI+1)-R)*ones(LI+1,1))/pot;
```

Programa en Matlab R2009b que optimiza el gráfico sintético para la desviación

```
function opt_sin_s(nv,delthav,ARL0)
clc, format compact, format short g, warning off
for i=1:length(nv)
    for j=1:length(delthav)
        n=nv(i);
        deltha=delthav(j);
        ARL2=0;
        LI=1;
        ARL1=FO(LI,n,deltha,ARL0);
        while ARL1>ARL2
            if LI~=1,ARL1=ARL2;end
            LI=LI+1;
            ARL2=FO(LI,n,deltha,ARL0);
        end;
        [ARL z]=FO(LI,n,deltha,ARL0);
        zv(i)=z;
        ARLv(i)=ARL;
        LIv(i)=LI;
        ARL0v(i)=ARL0;
        if i==1 && j==1
            fprintf(['n' char(9) 'deltha' char(9) 'LI' char(9) 'z' char(9) 'ARL\n'])
        end;
        fprintf([num2str(n) char(9) num2str(deltha) char(9) num2str(LI,4) char(9) num-
2str(z,4) char(9) num2str(ARL,4) '\n'])
        end;
    end;
end;
function [ARL z]=FO(LI,n,deltha,ARL0)
    Fn1=@(z,LI,n) abs(ARL0-Fn_ARL(z,LI,n,1));
    z=fminsearch(@(z)Fn1(z,LI,n),2,optimset('Display','off','TolX',1e-6,'TolFun',1e-6));
    ARL=Fn_ARL(z,LI,n,deltha);
function ARL=Fn_ARL(z,LI,n,deltha)
    P = 1-chi2cdf(((n-1).*(z./deltha).^2),(n-1)) ;
    ARL=1./(P.*(1-chi2cdf(((n-1).*(z./deltha).^2),(n-1)).^(LI-1)));
```

```

function opt_sin_s_menos(nv,delthav,ARL0)
    clc, format compact, format short g, warning off
    for i=1:length(nv)
        for j=1:length(delthav)
            n=nv(i);
            deltha=delthav(j);
            ARL2=0;
            LI=1;
            ARL1=FO(LI,n,deltha,ARL0);
            while ARL1>ARL2
                if LI~=1,ARL1=ARL2;end
                LI=LI+1;
                ARL2=FO(LI,n,deltha,ARL0);
            end;
            [ARL z]=FO(LI,n,deltha,ARL0);
            zv(i)=z;
            ARLv(i)=ARL;
            LIv(i)=LI;
            ARL0v(i)=ARL0;
            if i==1 && j==1
                fprintf(['n' char(9) 'deltha' char(9) 'LI' char(9) 'z' char(9) 'ARL\n'])
            end;
            fprintf([num2str(n) char(9) num2str(deltha) char(9) num2str(LI,4) char(9) num-
2str(z,4) char(9) num2str(ARL,4) '\n'])
            end;
        end;
    end;
function [ARL z]=FO(LI,n,deltha,ARL0)
    Fn1=@(z,LI,n) abs(ARL0-Fn_ARL(z,LI,n,1));
    z=fminsearch(@(z)Fn1(z,LI,n),2,optimset('Display','off','TolX',1e-6,'TolFun',1e-6));
    ARL=Fn_ARL(z,LI,n,deltha);
function ARL=Fn_ARL(z,LI,n,deltha)
    P = chi2cdf(((n-1).*(z./deltha).^2),(n-1));
    ARL=1./(P.*(1-(1-chi2cdf(((n-1).*(z./deltha).^2),(n-1))).^(LI-1)));

```

Programa en Matlab R2009b que optimiza el gráfico $S-RL_2$

```
function opt_srl2(nv,delthav,ARL0)
clc, format compact, format short g, warning off
for i=1:length(nv)
    for j=1:length(delthav)
        n=nv(i);
        deltha=delthav(j);
        ARL2=0;
        LI=1;
        ARL1=FO(LI,n,deltha,ARL0);
        while ARL1>ARL2
            if LI~=1,ARL1=ARL2;end
            LI=LI+1;
            ARL2=FO(LI,n,deltha,ARL0);
        end;
        [ARL z]=FO(LI,n,deltha,ARL0);
        zv(i)=z;
        ARLv(i)=ARL;
        LIv(i)=LI;
        ARL0v(i)=ARL0;
        if i==1 && j==1
            fprintf(['n' char(9) 'deltha' char(9) 'LI' char(9) 'z' char(9) 'ARL\n'])
        end;
        fprintf([num2str(n) char(9) num2str(deltha) char(9) num2str(LI,4) char(9) num-
2str(z,4) char(9) num2str(ARL,4) '\n'])
        end;
    end;
end;
function [ARL z]=FO(LI,n,deltha,ARL0)
    Fn1=@(z,LI,n) abs(ARL0-Fn_ARL(z,LI,n,1));
    z=fminsearch(@(z)Fn1(z,LI,n),2,optimset('Display','off','ToIX',1e-6,'TolFun',1e-6));
    ARL=Fn_ARL(z,LI,n,deltha);
function ARL=Fn_ARL(z,LI,n,deltha)
    R=zeros(LI+1);
    pot = 1-chi2cdf(((n-1).*(z./deltha).^2),(n-1)) ;
    p = geopdf(0:1:LI-1,pot);
    pl = 1 - sum(p);
    pfil = [p pl];
    for fil=1:LI+1,
        R(fil,end-(fil-1):end) = pfil(end-(fil-1):end);
    end;
    ARL=([zeros(1,LI) 1]*inv(eye(LI+1)-R)*ones(LI+1,1))./pot;
```

```

function opt_srl2(nv,delthav,ARL0)
    clc, format compact, format short g, warning off
    for i=1:length(nv)
        for j=1:length(delthav)
            n=nv(i);
            deltha=delthav(j);
            ARL2=0;
            LI=1;
            ARL1=FO(LI,n,deltha,ARL0);
            while ARL1>ARL2
                if LI~=1,ARL1=ARL2;end
                LI=LI+1;
                ARL2=FO(LI,n,deltha,ARL0);
            end;
            [ARL z]=FO(LI,n,deltha,ARL0);
            zv(i)=z;
            ARLv(i)=ARL;
            LIv(i)=LI;
            ARL0v(i)=ARL0;
            if i==1 && j==1
                fprintf(['n' char(9) 'deltha' char(9) 'LI' char(9) 'z' char(9) 'ARL\n'])
            end;
            fprintf([num2str(n) char(9) num2str(deltha) char(9) num2str(LI,4) char(9) num-
2str(z,4) char(9) num2str(ARL,4) '\n'])
            end;
        end;
    end;
function [ARL z]=FO(LI,n,deltha,ARL0)
    Fn1=@(z,LI,n) abs(ARL0-Fn_ARL(z,LI,n,1));
    z=fminsearch(@(z)Fn1(z,LI,n),2,optimset('Display','off','TolX',1e-6,'TolFun',1e-6));
    ARL=Fn_ARL(z,LI,n,deltha);
function ARL=Fn_ARL(z,LI,n,deltha)
    R=zeros(LI+1);
    pot = chi2cdf(((n-1).*(z./deltha).^2),(n-1)) ;
    p = geopdf(0:1:LI-1,pot);
    pl = 1 - sum(p);
    pfil = [p pl];
    for fil=1:LI+1,
        R(fil,end-(fil-1):end) = pfil(end-(fil-1):end);
    end;
    ARL=([zeros(1,LI) 1]*inv(eye(LI+1)-R)*ones(LI+1,1))./pot;

```

Simulador en Mathcad para el gráfico de control $\bar{X}$ de Shewhart

Nrachas := 10000

n := 5

$L := \frac{3}{\sqrt{n}}$

d := 0

```

ARL := | sumaR ← 0
      | for jj ∈ 1..Nrachas
      |   R ← | fuera ← 0
      |       | racha ← 0
      |       | while fuera = 0
      |       |   F ← mnorm(n,d,1)
      |       |   m ← | s ←  $\sum_{j=0}^{n-1} F_j$ 
      |       |       | s
      |       |   P ←  $\frac{m}{n}$ 
      |       |   racha ← racha + 1
      |       |   fuera ← 0 if  $-L \leq P \leq L$ 
      |       |   fuera ← 1 otherwise
      |       | racha
      |   sumaR ← sumaR + R
      |  $\frac{\text{sumaR}}{\text{Nrachas}}$ 

```

ARL = 373.325

Simulador desarrollado en Matlab R2009b para los gráficos de control $\bar{X}$ y sintético.

```
function simulador(Nrachas,n,mu)
time1 = now;

L1 = 3/sqrt(n);

[z2 L12]=opt_sin(n,mu);
L2 = z2/sqrt(n);

[z3 L13]=opt_rl2(n,mu);
L3 = z3/sqrt(n);

p = mean(normrnd(mu,1,Nrachas*380,n),2);
id10 = union(find(p<=-L1),find(p>=L1));
id1 = id10-[0 id10(1:end-1)]';
id1 = id1(1:Nrachas);

id20 = union(find(p<=-L2),find(p>=L2));
id2 = id20-[0 id20(1:end-1)]';
id2 = id2(1:Nrachas);
id2 = find(id2<=L12);
id2 = id20(id2);
id2 = id2-[0 id2(1:end-1)]';

id30 = union(find(p<=-L3),find(p>=L3));
id3 = id30(2:end)-[0 id30(1:end-2)]';
id3 = id3(1:Nrachas-1);
id31 = find(id3<=L13);
for i=1:length(id31)
    if i==1,
        id32(i)=sum(id3(1:id31(i)));
    else
        id32(i)=sum(id3(id31(i-1)+1:id31(i)));
    end;
end;
% id32 = id30(id31+1);
% id32 = id32-[0 id32(1:end-1)]';
ARL1 = mean(id1);
```

```
ARL2 = mean(id2);  
RL2 = mean(id32);  
transc = datestr(now-time1,'HH:MM:SS');  
fprintf(['ARL1 = ' num2str(ARL1) '\n' ...  
        'z2 = ' num2str(z2) ', ' ...  
        'LI2 = ' num2str(LI2) ', ' ...  
        'ARL2 = ' num2str(ARL2) '\n' ...  
        'z3 = ' num2str(z3) ', ' ...  
        'LI3 = ' num2str(LI3) ', ' ...  
        'RL2 = ' num2str(RL2) '\n' ...  
        '[' transc ']\n']);
```

*El control de procesos en la manufactura.
Alternativas a los gráficos de control
sintéticos y su optimización*

Se terminó de editar en agosto de 2017
En Bogotá, D. C., Colombia.

Se compuso en fuente tipográfica
Adobe Caslon Pro de cuerpo 12 puntos.